



量子もつれとは何だろうか？

量子力学の基礎から

2022年のノーベル物理学賞まで

谷村 省吾

名古屋大学大学院 情報学研究科

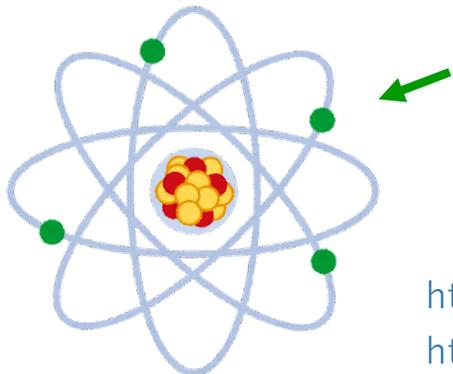
twitter @tani6s

資料を私の[ウェブサイト](#)で公開しています。「谷村省吾」で検索 または QRコード→

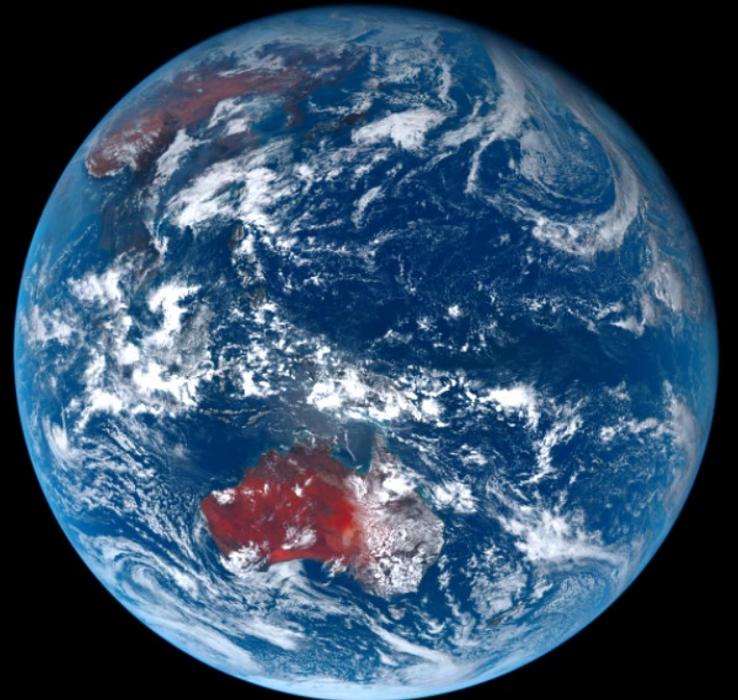


前回の話 1/3

- 原子や電子の世界に慣れてもらうための話をしました。
- 原子の大きさは1億分の1センチメートル
(地球を1億分の1に縮めると直径13センチメートル)
- 電子の質量は
0.9グラムの
1億分の1の1億分の1の1億分の1

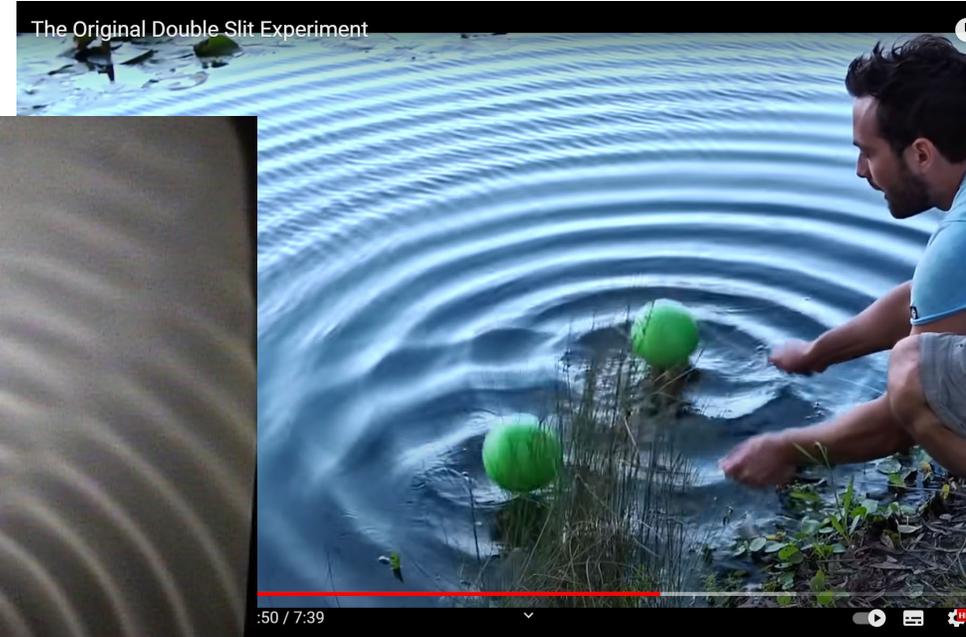
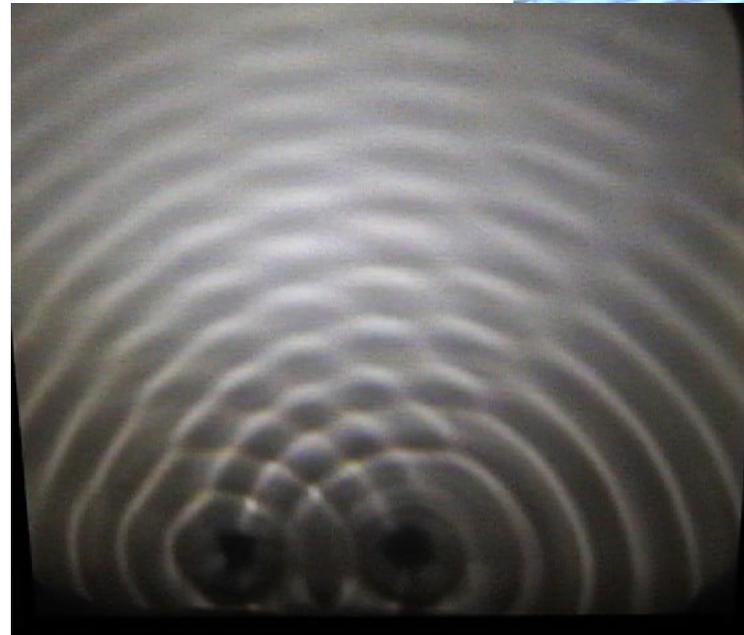
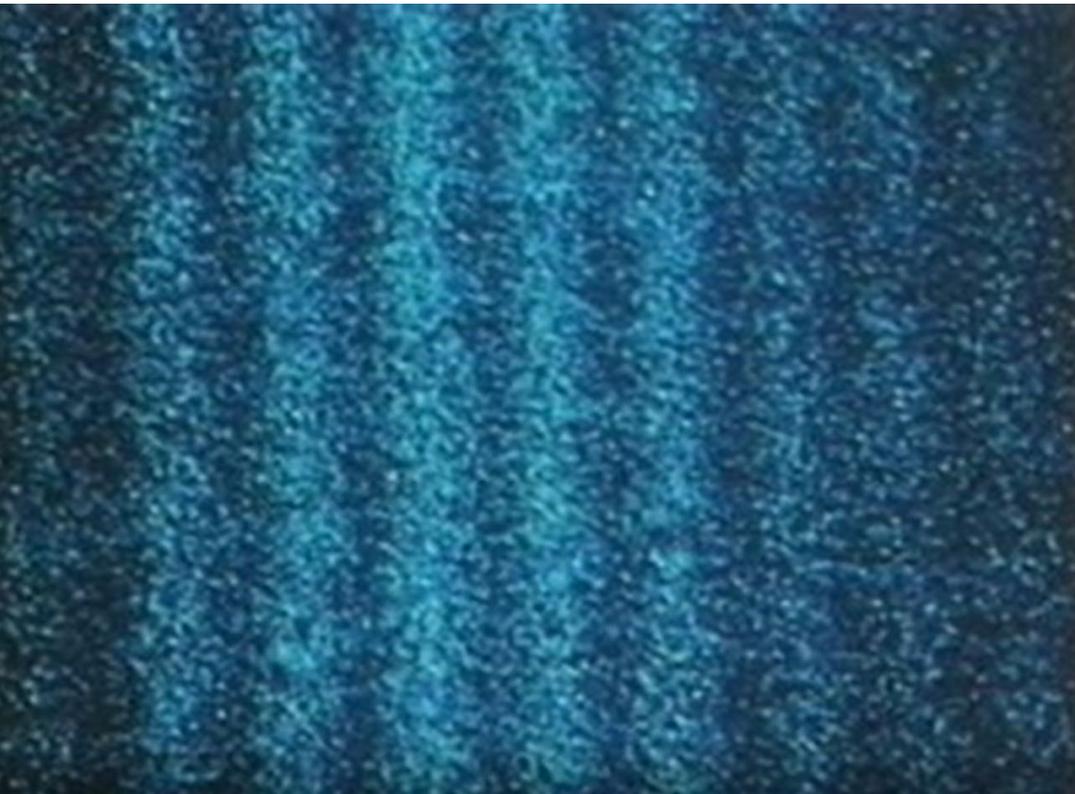


https://www.irasutoya.com/2017/02/blog-post_20.html
<https://himawari8.nict.go.jp/ja/himawari8-image.htm>

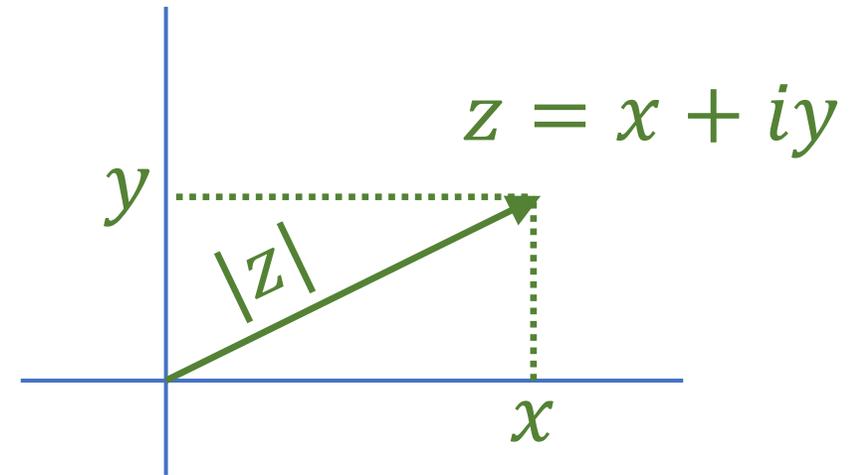
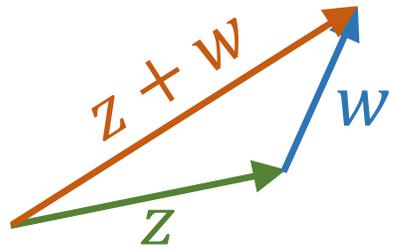


前回の話 2/3

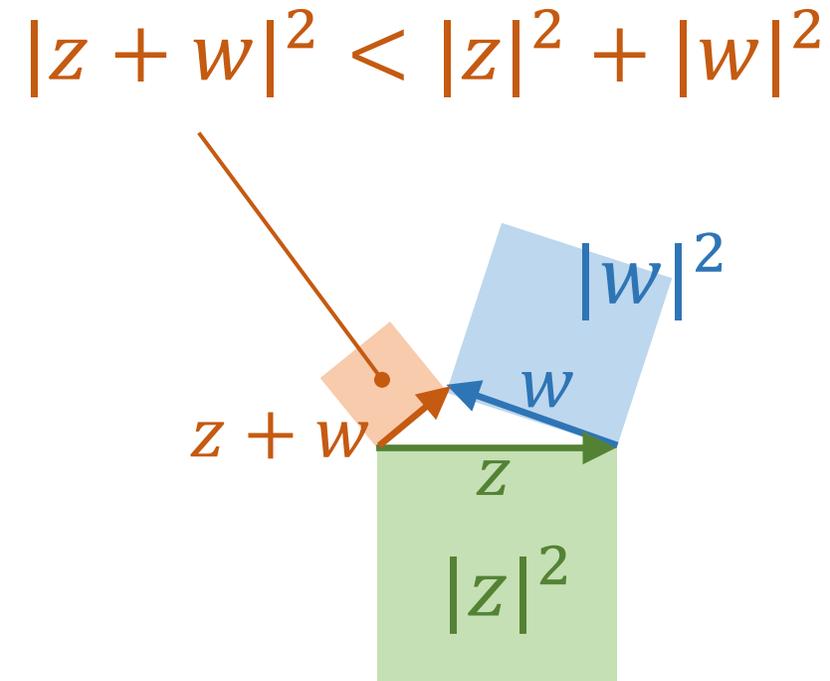
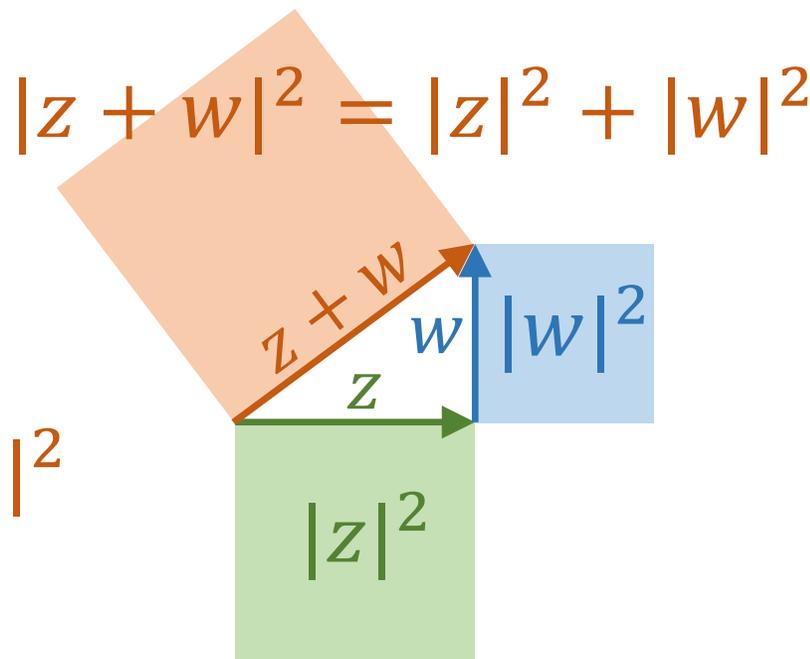
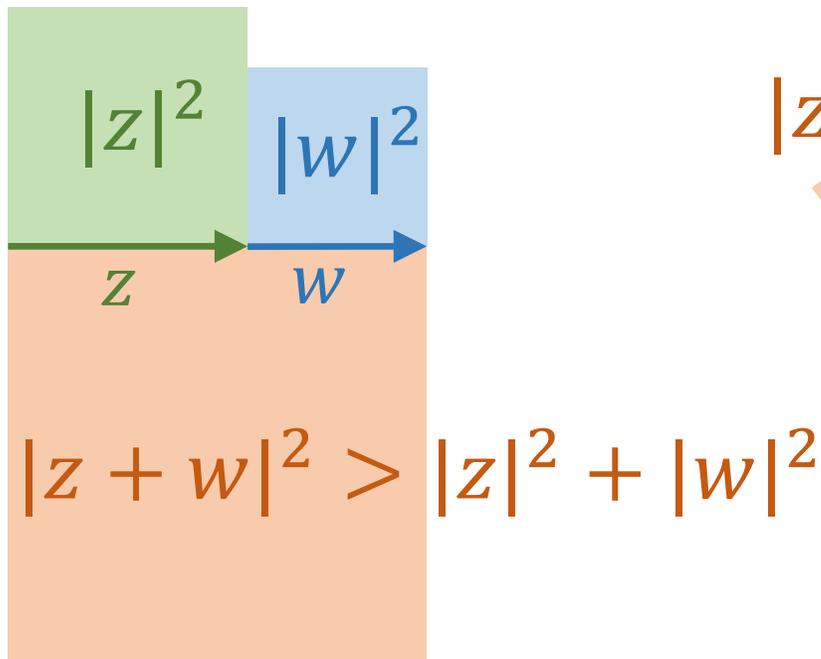
- 電子は1つぶ2つぶと数えられる粒子だが、飛んでいるときは波動のように広がって進み、重なり合って、強め合ったり弱め合ったり（干渉）して、確率的に現れる。



前回の話 3/3



- 確率振幅は複素数。
- 確率振幅の絶対値 2 乗が確率に等しい。
- 2 通りの道筋に対する確率振幅を足してから絶対値 2 乗すると、強め合うこともあるし、弱め合うこともある。



量子論の不思議 1：偶然まかせ

- 量子論は事象が起こる**確率**しか予測できない
- 「次の電子がスクリーンのどこに現れるか」を量子論は予測できない。と言うか、それは誰にもわからない。
- **アインシュタイン「神はサイコロを振らない (God does not play dice)」**：電子などの究極的な要素が偶然まかせで動いているとは信じられない。

量子論の不思議 2：見ると見ないで違う

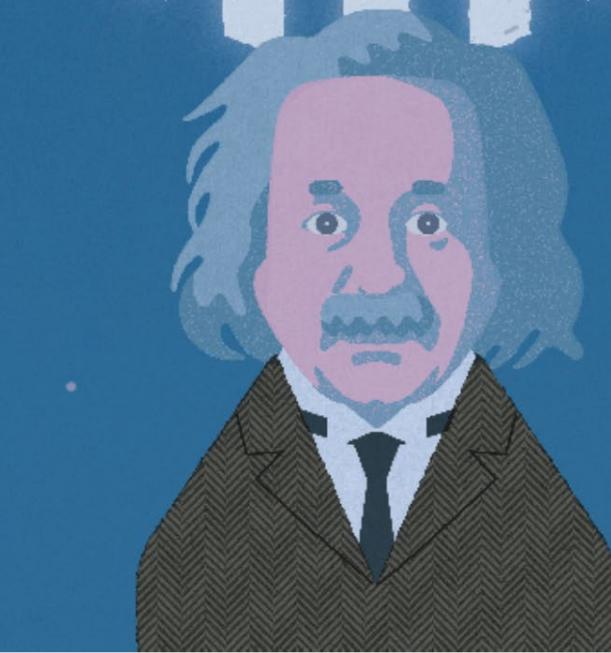
- 電子を探せば必ず「ひとつぶ」の粒子として見つかる。
- 電子を探していないときは、電子は波動のように広がり、同時に2箇所窓を通過して、重なって強め合ったり弱め合ったりしているかのように振る舞う。
- 見たときだけ粒子なのか？

アインシュタインのクレーム

- 電子は見ているときと見ていないときで別物なのか？
- 「空を見上げたときにだけ月があると君は信ずるのか？

Do you really believe that the moon exists only when you look at it ?

(アインシュタインがパイースと散歩中に言った)



アインシュタインのクレームに答える

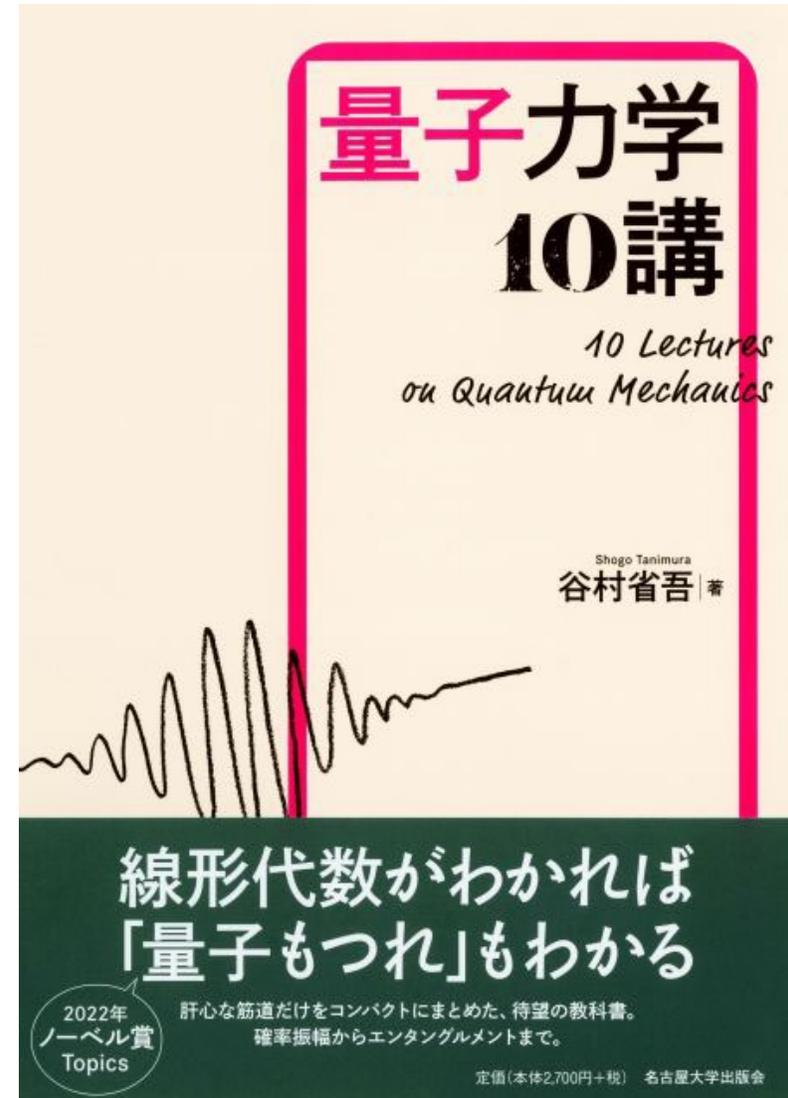
- 「原子や電子は、人に見られていないときも、見られたときと同じ性質を持っているか？」という疑問を検証したくても、「見ていないときの性質」を実験で確かめる方法はなさそう。
- アインシュタインは1955年に没。
- **見ていないときの性質を検証するための数式を、1964年にベルが発表した。**
- 1969年にクラウザーたちがベルの不等式を実験検証しやすい形に作り替え、偏光を使う実験を考案した。

今日の話

- 2022年のノーベル物理学賞の対象となった実験の材料・道具・設定を説明する。
- とくに、光の偏光という性質を説明する。
- CHSHの不等式を導びいて見せる。
- 量子力学ではCHSH不等式が破れることがある、ということを知りたい（数学を使った説明は次回）。

参考文献

1. 筒井泉『量子力学の反常識と素粒子の自由意志』岩波書店、2022.
2. アダム・ベッカー（吉田三知世 訳）『実在とは何か』筑摩書房、2021.
3. 谷村省吾 [『量子力学10講』](#) 名古屋大学出版会、2021.
4. 谷村省吾「アインシュタインの夢 つかえる一測っていない値は実在しない」[日経サイエンス2019年2月](#) [（電子記事を購入可能）](#) [（ウェブ補足あり）](#)



偏光 Polarization

光にはいろいろな性質がある：

- 色（＝波長）
- 明るさ（＝電磁波の振幅の大きさ＝光子の個数）
- 偏り

偏光フィルター



2枚の偏光フィルターを重ねる (動画)

A calendar grid showing dates from 28 to 25. The days of the week are indicated by the column headers: 日 (Sunday), 月 (Monday), 火 (Tuesday), 水 (Wednesday), 木 (Thursday), 金 (Friday), 土 (Saturday). The dates are arranged in a 4x7 grid. Some dates are highlighted in red. Various Japanese characters are placed next to the dates, indicating fortune or events.

日	月	火	水	木	金	土
28	29	30	1 仏滅	2 大安	3 赤口	4 先勝
5 友引	6 先負	7 仏滅	8 大安 (有難)	9 赤口	10 先勝	11 友引
12 先負	13 仏滅 体育の日	14 大安	15 赤口	16 先勝	17 友引	18 先負
19 仏滅	20 大安	21 赤口	22 先勝	23 友引 (有難)	24 先負	25 仏滅

2枚の偏光フィルターを重ねる

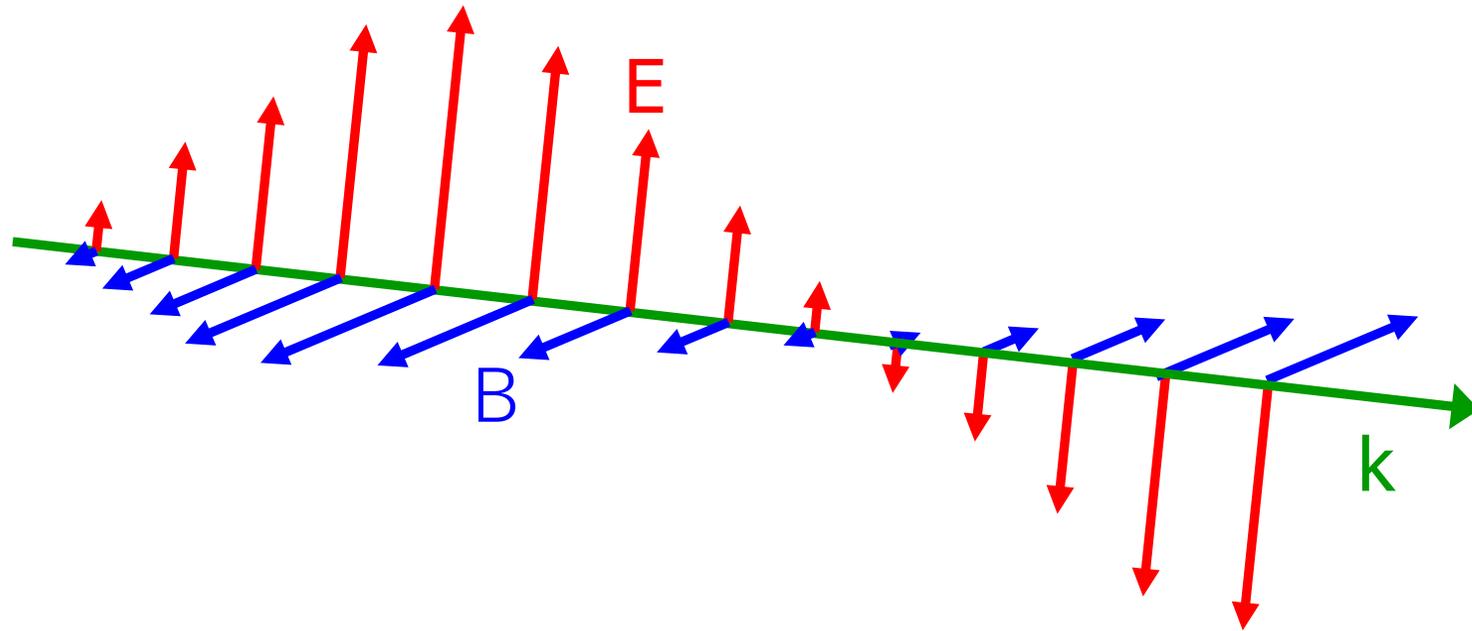


90°回して重ねるとほとんど光を通さない

(科学館 理工館 4 階に偏光の実験コーナーがあります)

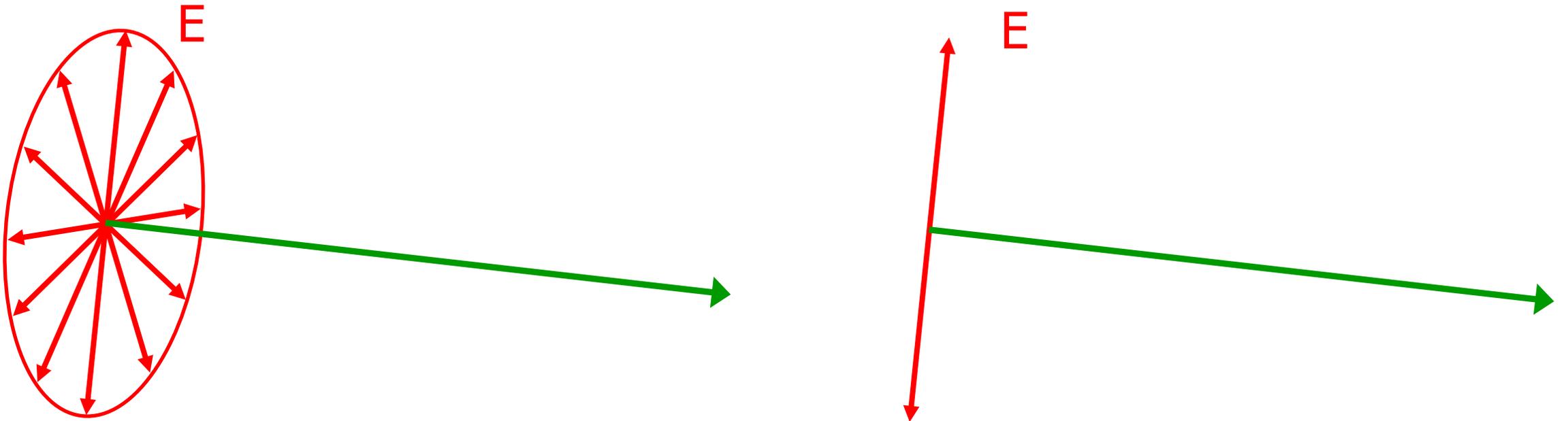
これをどう解釈するか？ 1/4

- 光は横波（電磁波）
- 進行方向 \mathbf{k} に対して垂直に電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{B} が振動している。



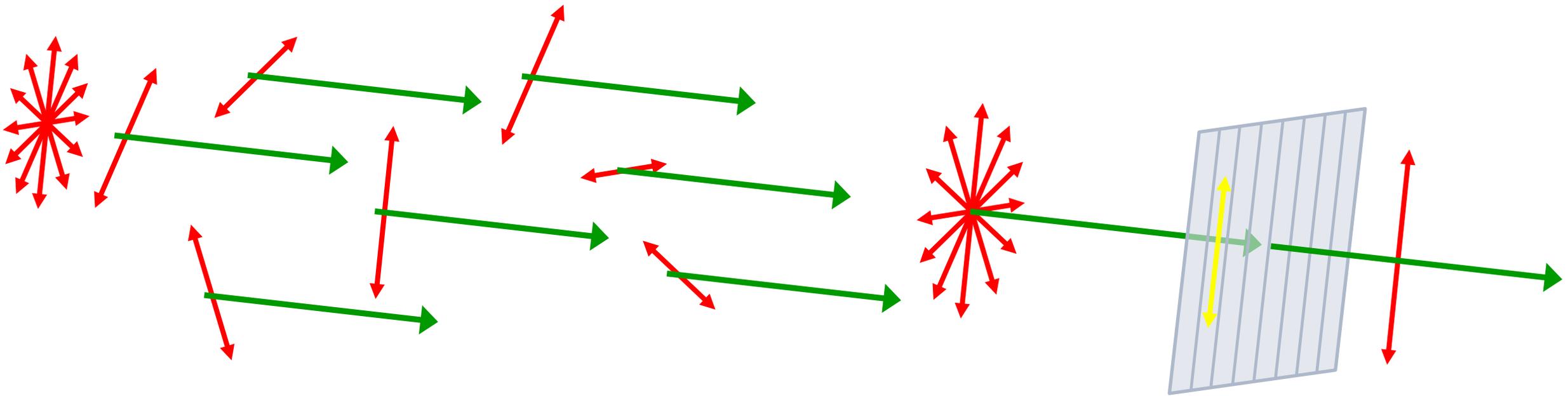
これをどう解釈するか？ 2/4

- 横波の振動方向には多様性がある。
- 特定の方向だけに振動している波が偏光。



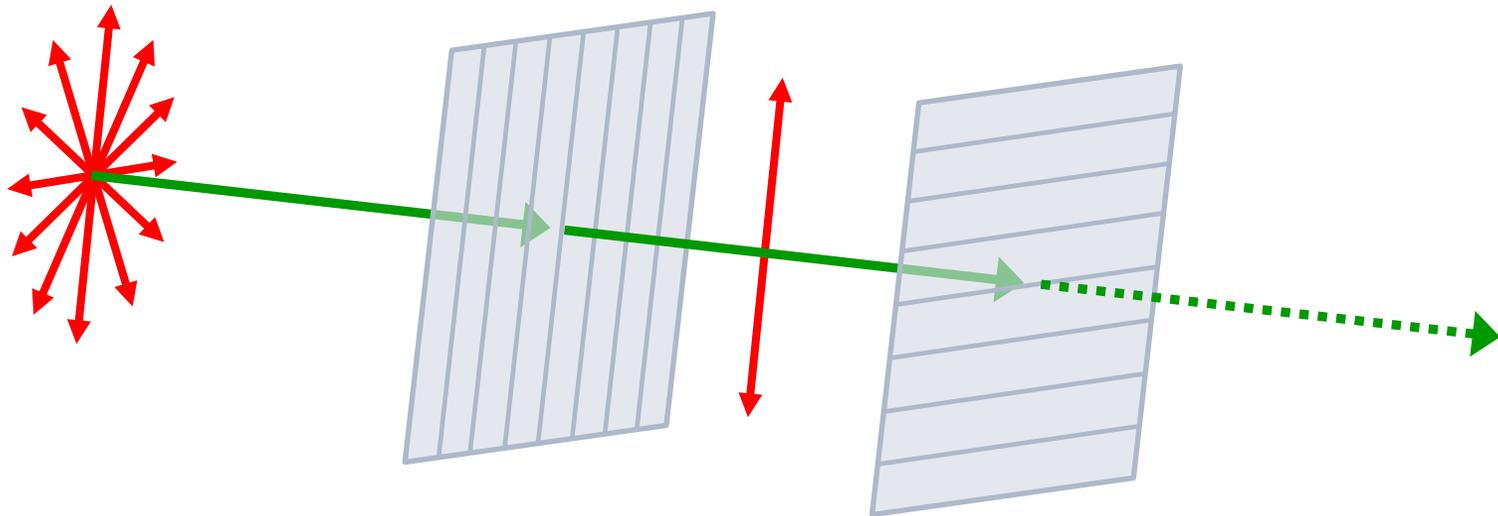
これをどう解釈するか？ 3/4

- 太陽や電球の光にはいろいろな方向の偏光が混じっている。
- 偏光フィルターは特定の方向の偏光だけを通す。



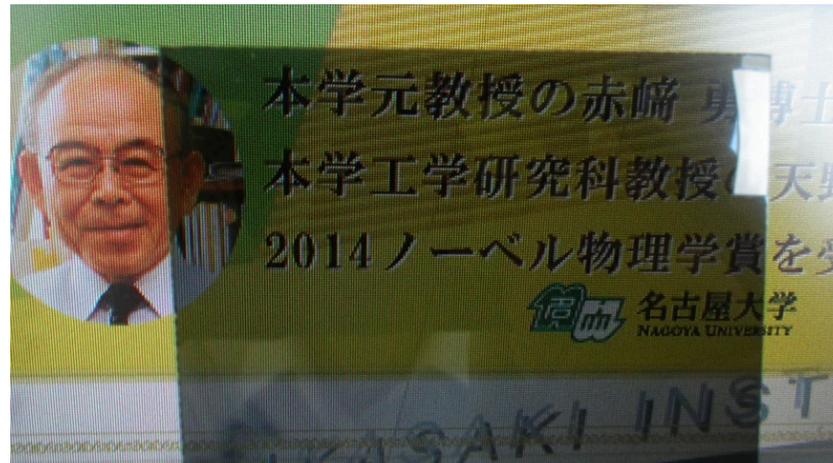
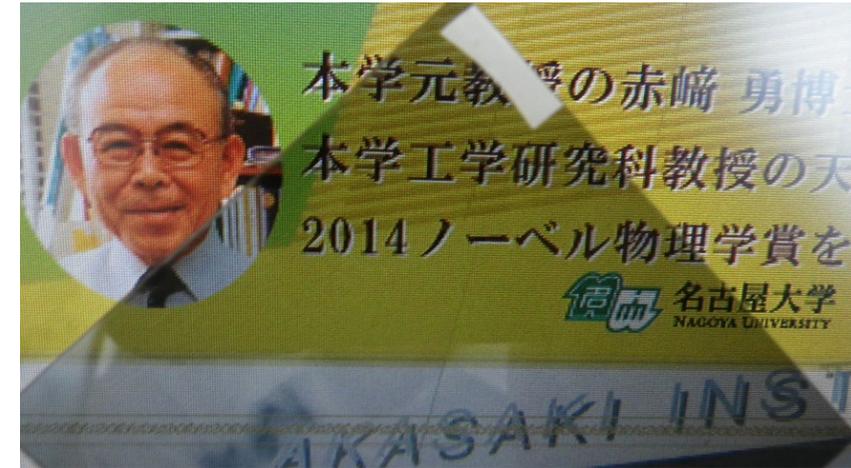
これをどう解釈するか？ 4/4

- 透過軸が互いに垂直になるように偏光フィルターを重ねると光は完全にさえぎられる。



身近なところで利用されている偏光

- スマホやテレビの液晶ディスプレイ（電氣的に偏光フィルターをオンオフすることによって画像を作っている）
- 偏光サングラス



3枚の偏光フィルターを重ねる (動画)

日	月	火	水	木	金	土
28	29	30	1 <small>仏滅</small>	2 <small>大安</small>	3 <small>赤口</small>	4 <small>先勝</small>
5 <small>友引</small>	6 <small>先負</small>	7 <small>仏滅</small>	8 <small>大安</small> <small>(家)</small>	9 <small>赤口</small>	10 <small>先勝</small>	11 <small>友引</small>
12 <small>先負</small>	13 <small>仏滅</small> <small>体育の日</small>	14 <small>大安</small>	15 <small>赤口</small>	16 <small>先勝</small>	17 <small>友引</small>	18 <small>先負</small>
19 <small>仏滅</small>	20 <small>大安</small>	21 <small>赤口</small>	22 <small>先勝</small>	23 <small>友引</small> <small>(家)</small>	24 <small>先負</small>	25 <small>仏滅</small>

フィルター2枚の間にもう1枚挿入



3枚重なっているところが光が通る！
2枚重ねよりも3枚重ねのほうが通りやすい
(光が通る確率が高い)



色付きセロハンを3枚重ねる

赤・青・黄



青・黄・赤



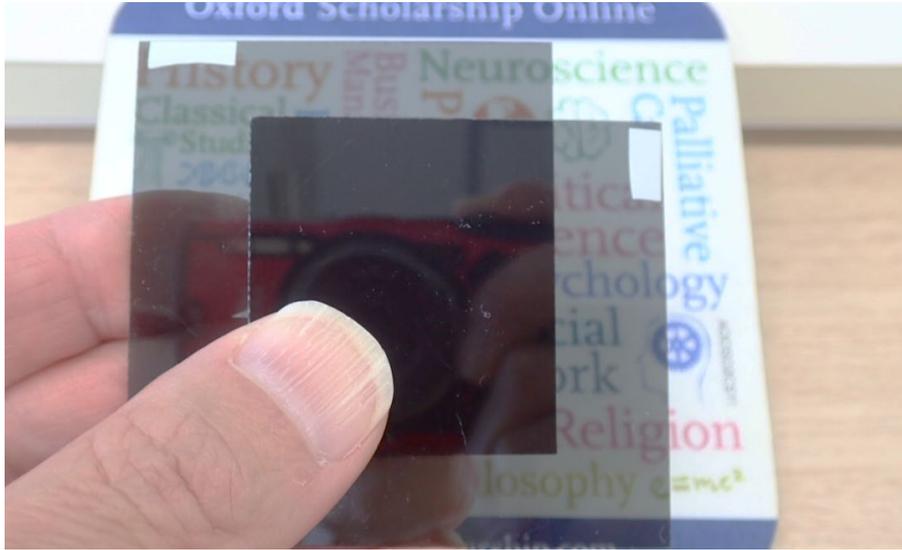
黄・赤・青



どの順番で重ねても暗い

(波長 = 運動量のスペクトル分解射影演算子は可換。角運動量は非可換)

フィルター 3枚重ねの方が光を通す、不思議



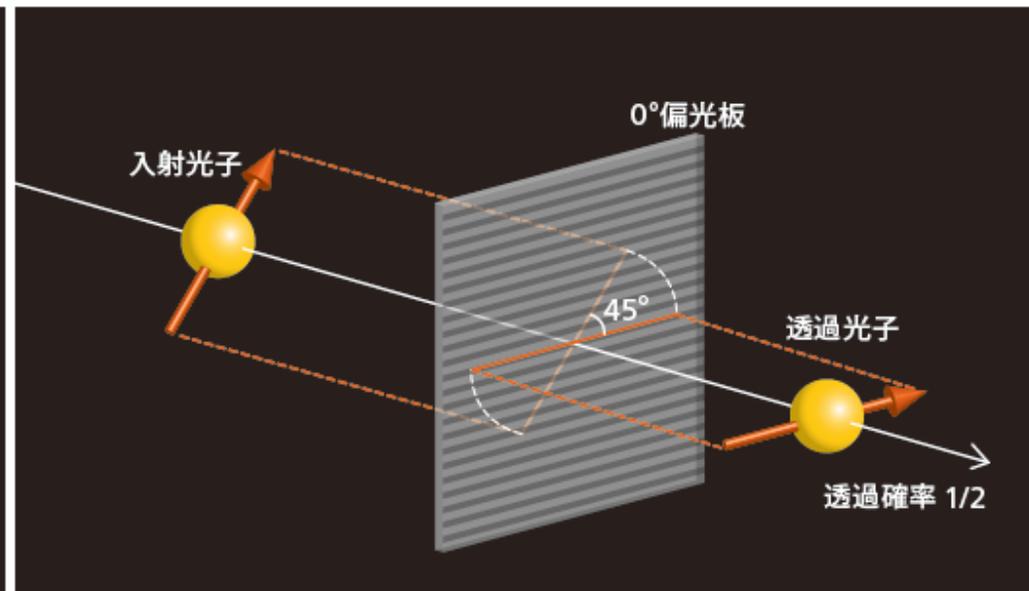
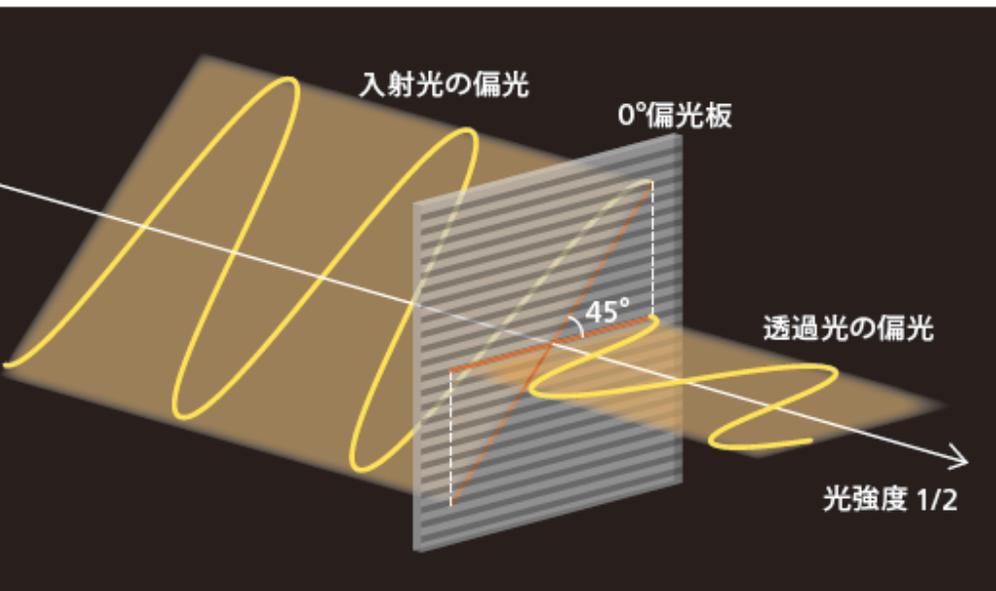
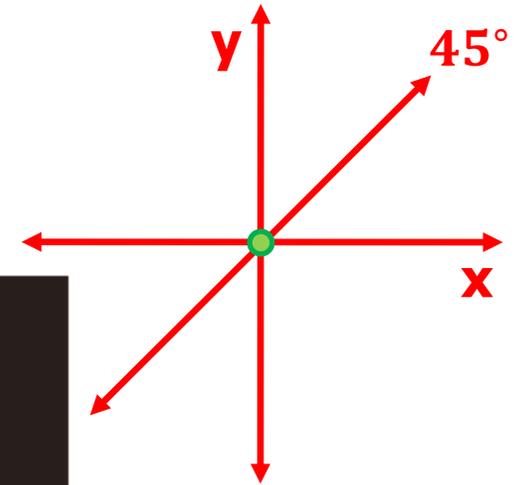
3枚重なっているところが光が通る！
2枚重ねよりも3枚重ねのほうが通りやすい
(光が通る確率が高い)



これを量子力学はどう説明するか？

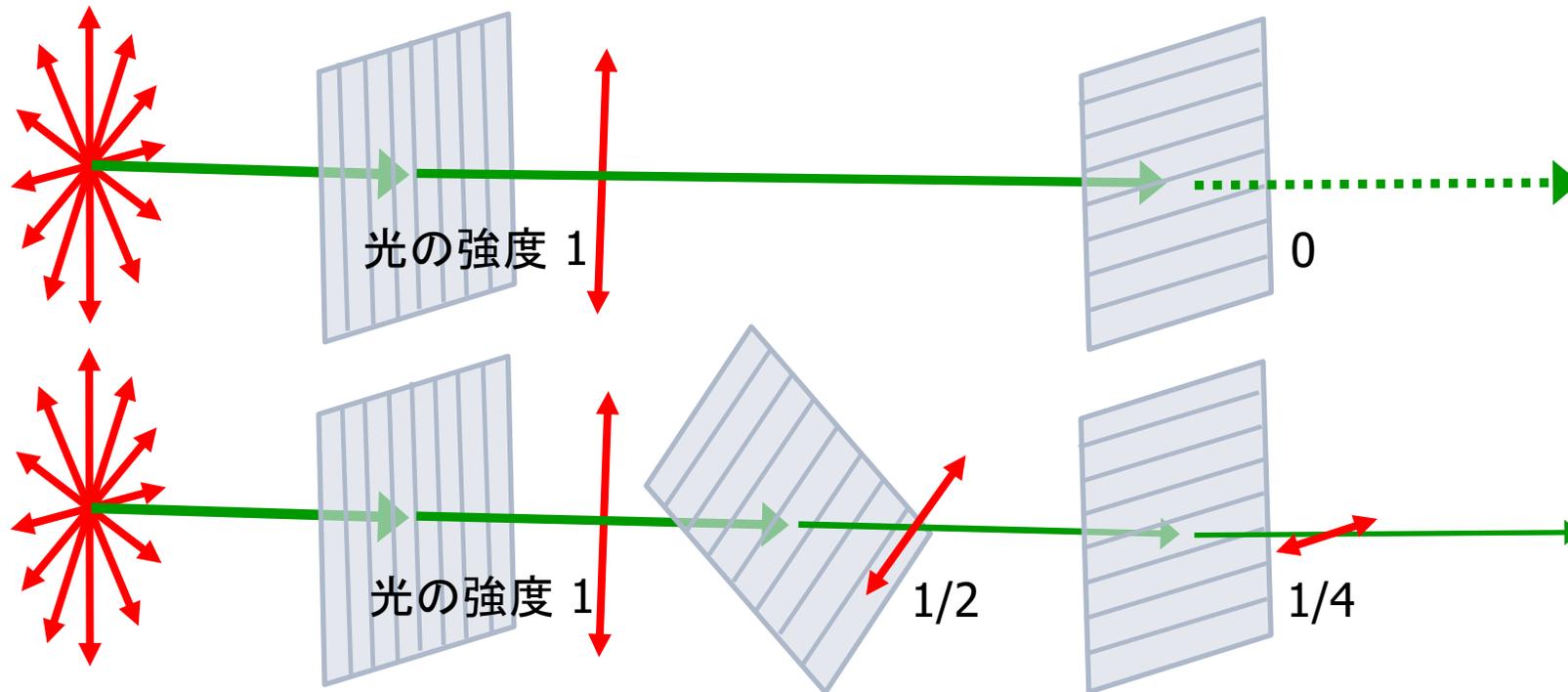
- y偏光が x偏光に変わる確率は 0
- **45°偏光は x偏光とy偏光の重ね合わせ状態 $|45^\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + |y\rangle)$**
- 45°偏光から x偏光に移る確率は 1/2
- 45°偏光から y偏光に移る確率も 1/2

日経サイエンス『光子の逆説』 谷村省吾



これを量子力学はどう説明するか？

- y偏光からx偏光に移る確率は 0
- y偏光が 45°フィルターを通ると 45° 偏光になりきって（以前は y偏光だったことを忘れて） x偏光フィルターを通る。



一般の場合の遷移確率

- 角度 θ 傾いた偏光を x軸に**射影した成分**

$$\alpha = \cos \theta$$

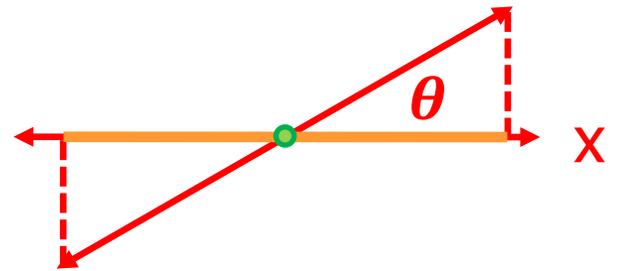
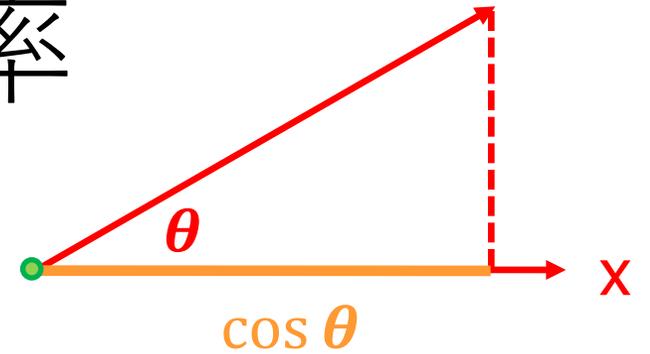
- 角度 θ 傾いた偏光が x偏光フィルターを通る確率は**振幅の絶対値 2 乗**

$$P(\theta) = |\alpha|^2 = \cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

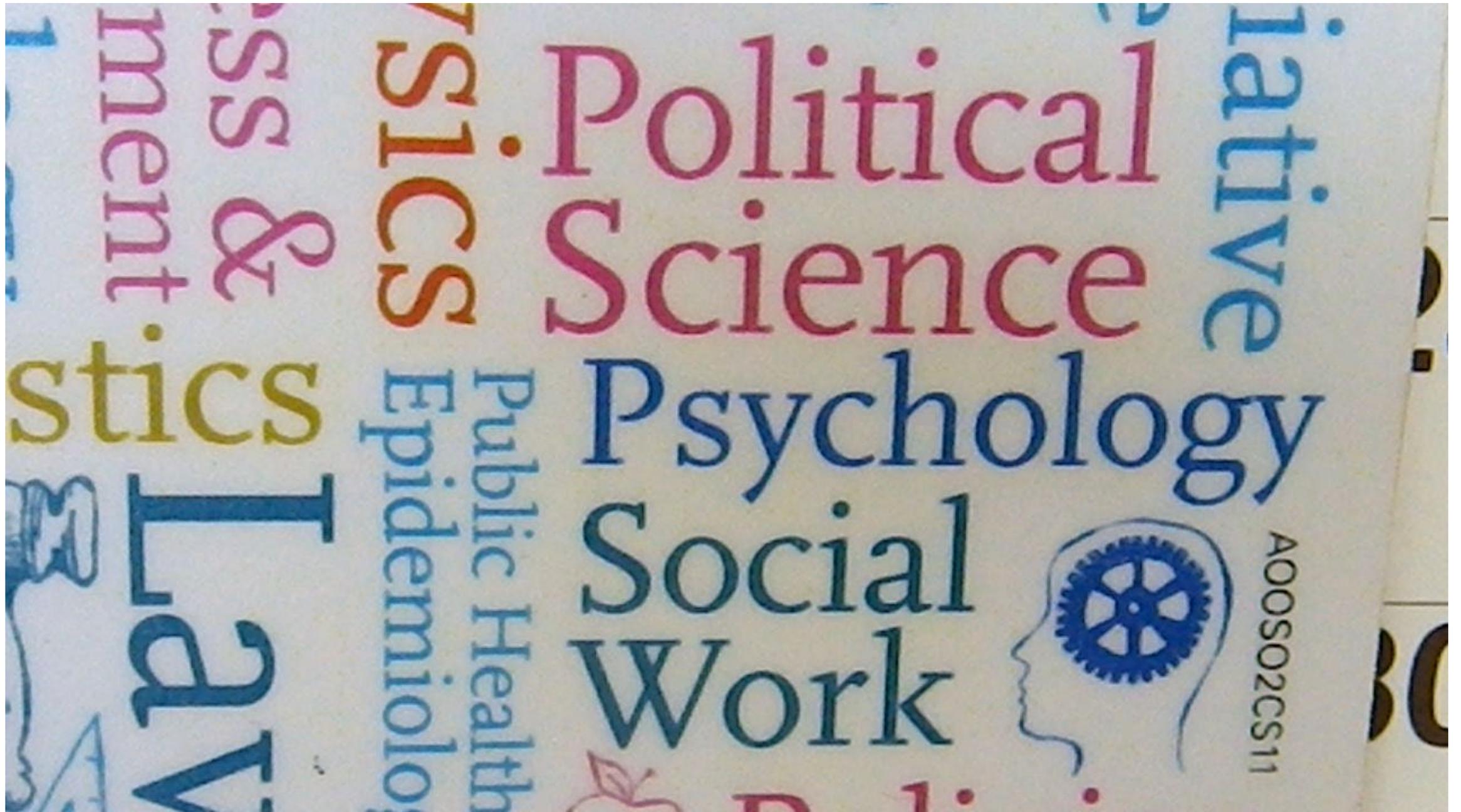
$$P(90^\circ) = 0$$

$$P(45^\circ) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(22.5^\circ) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0.8535 \dots$$

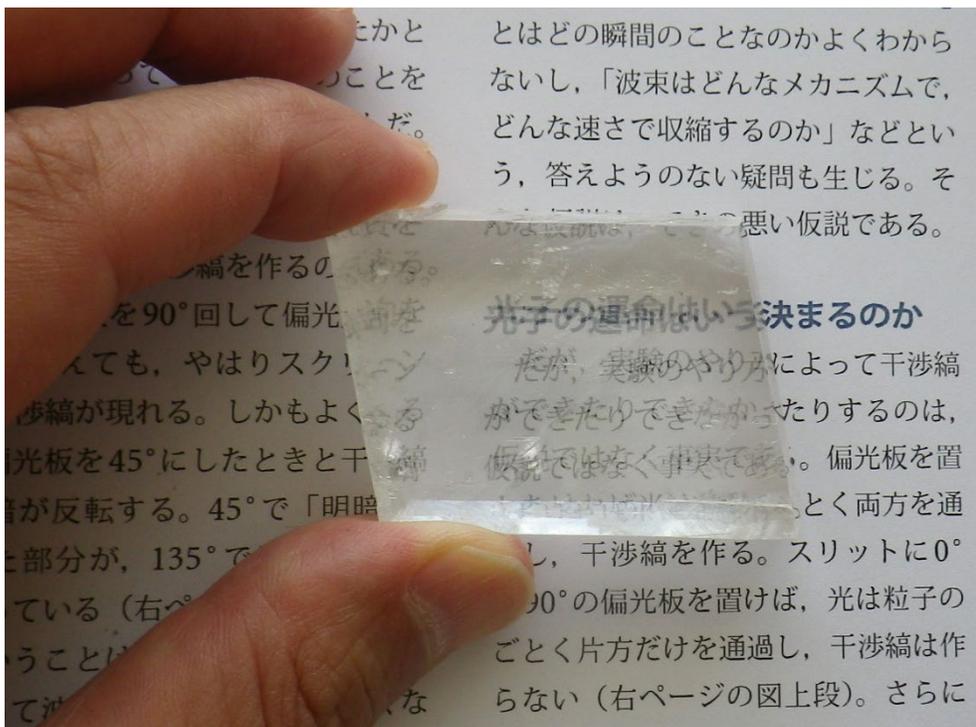


方解石（炭酸カルシウムの結晶）（動画）

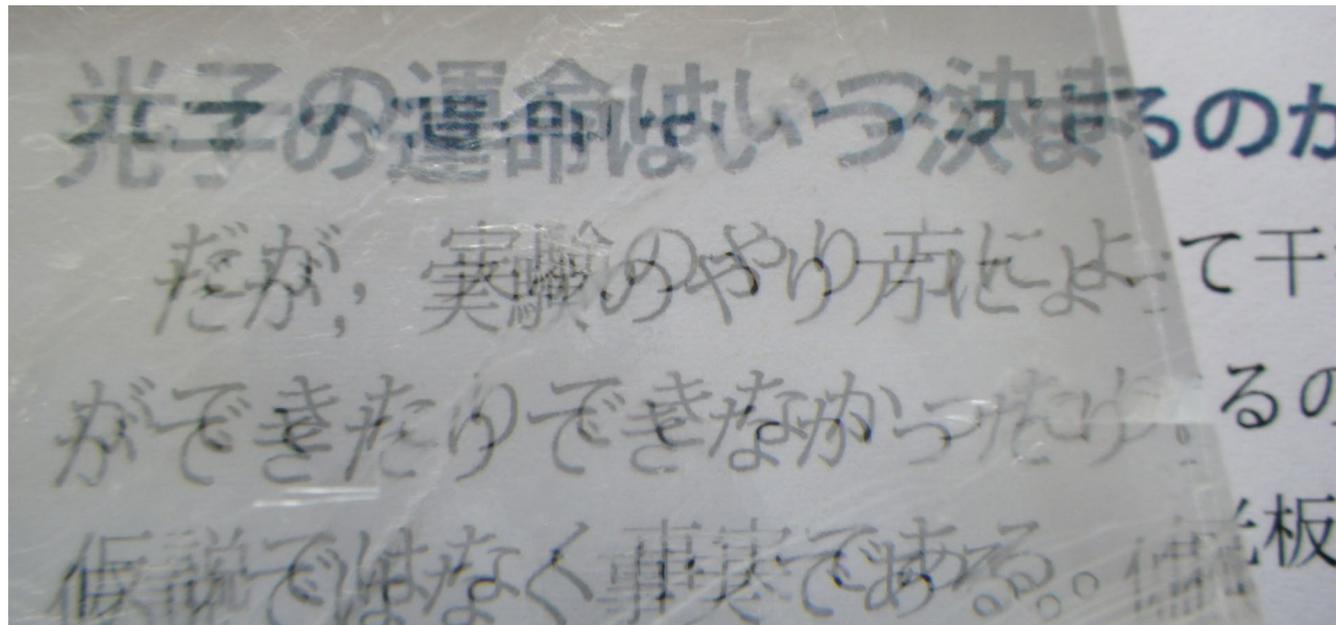


複屈折

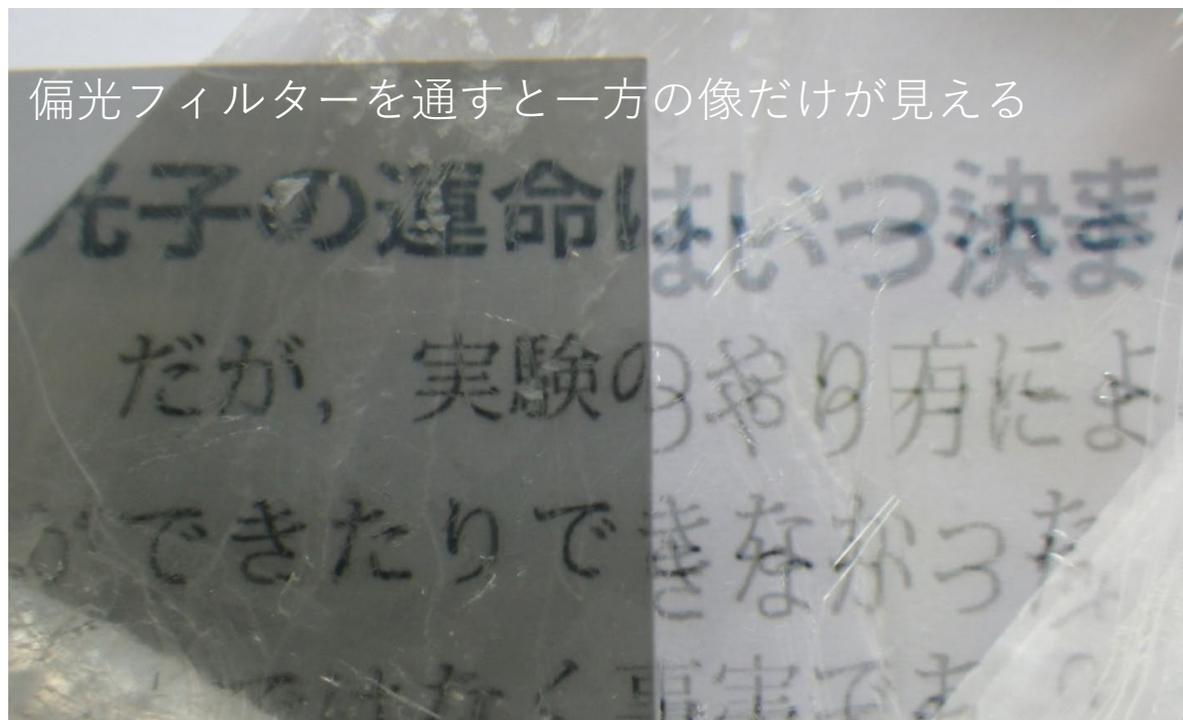
方解石（炭酸カルシウム結晶）は混合状態の光をx偏光とy偏光に分けて屈折させる。



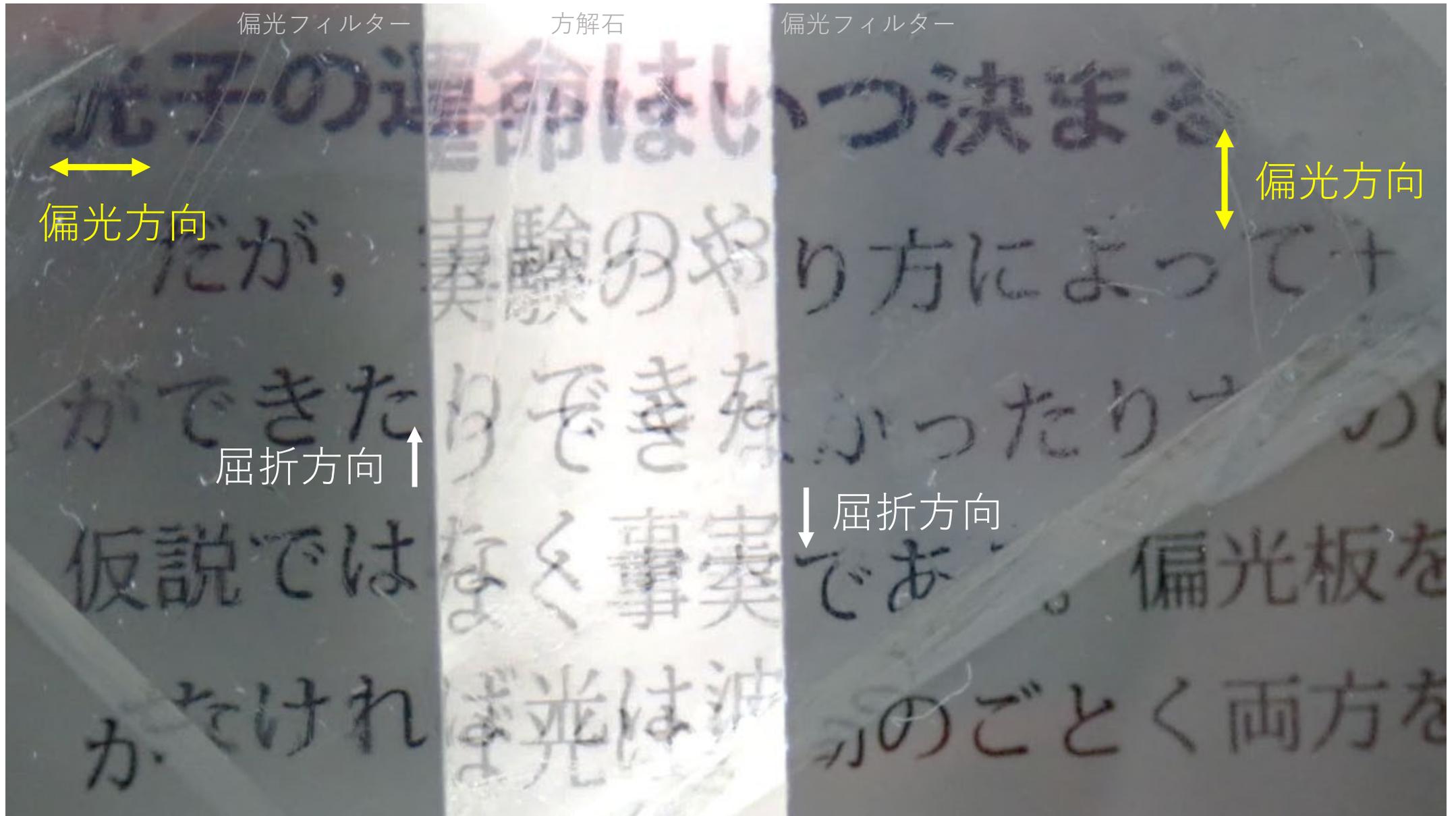
方解石を通すと、文字がダブって見える



偏光フィルターを通すと一方の像だけが見える



複屈折は偏光を分離している



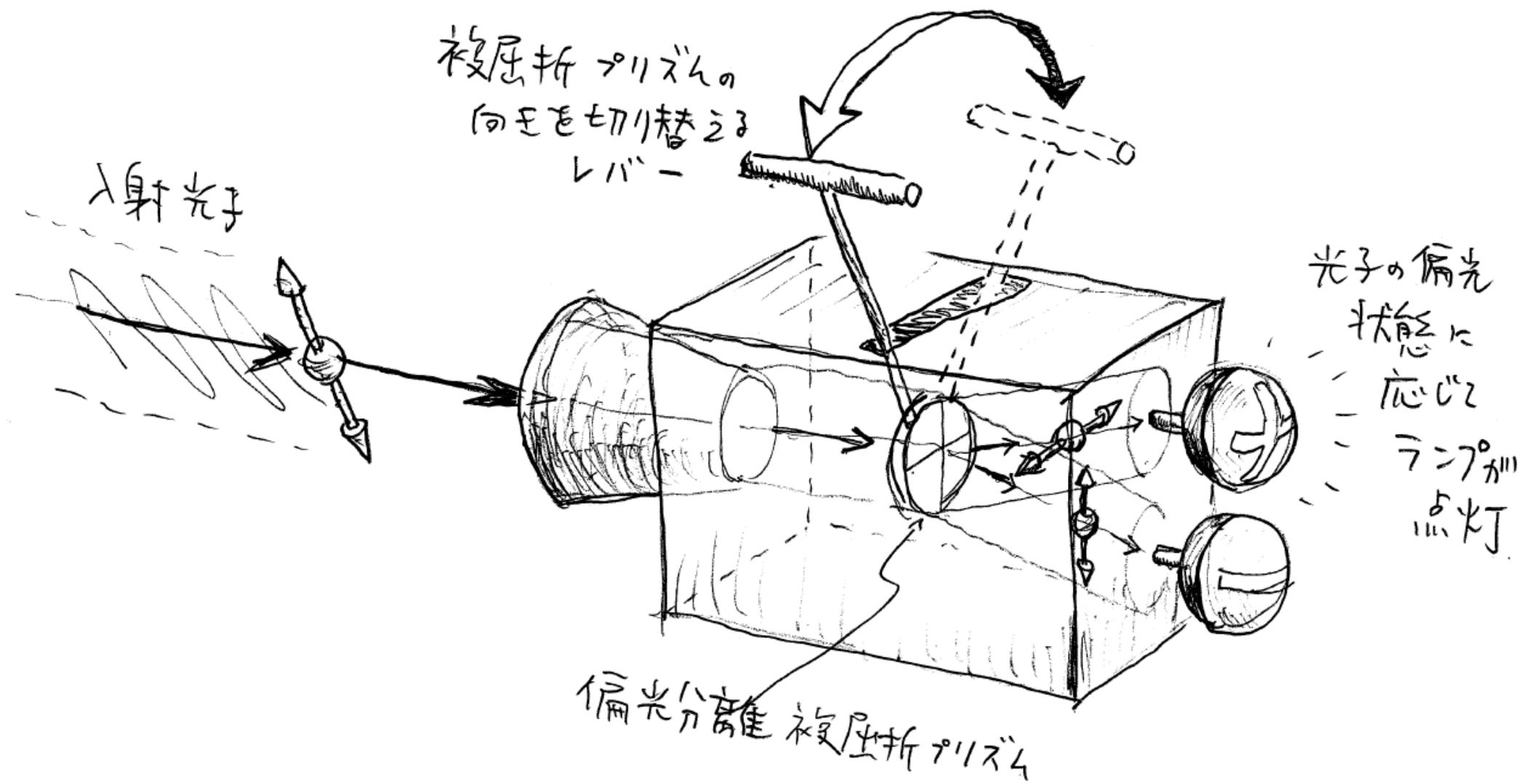
CHSHの実験設定

- 1969年にクラウザー、ホーン、シモニー、ホルト（CHSH）の4人が、ベルの不等式を実験検証しやすい形に改良した。

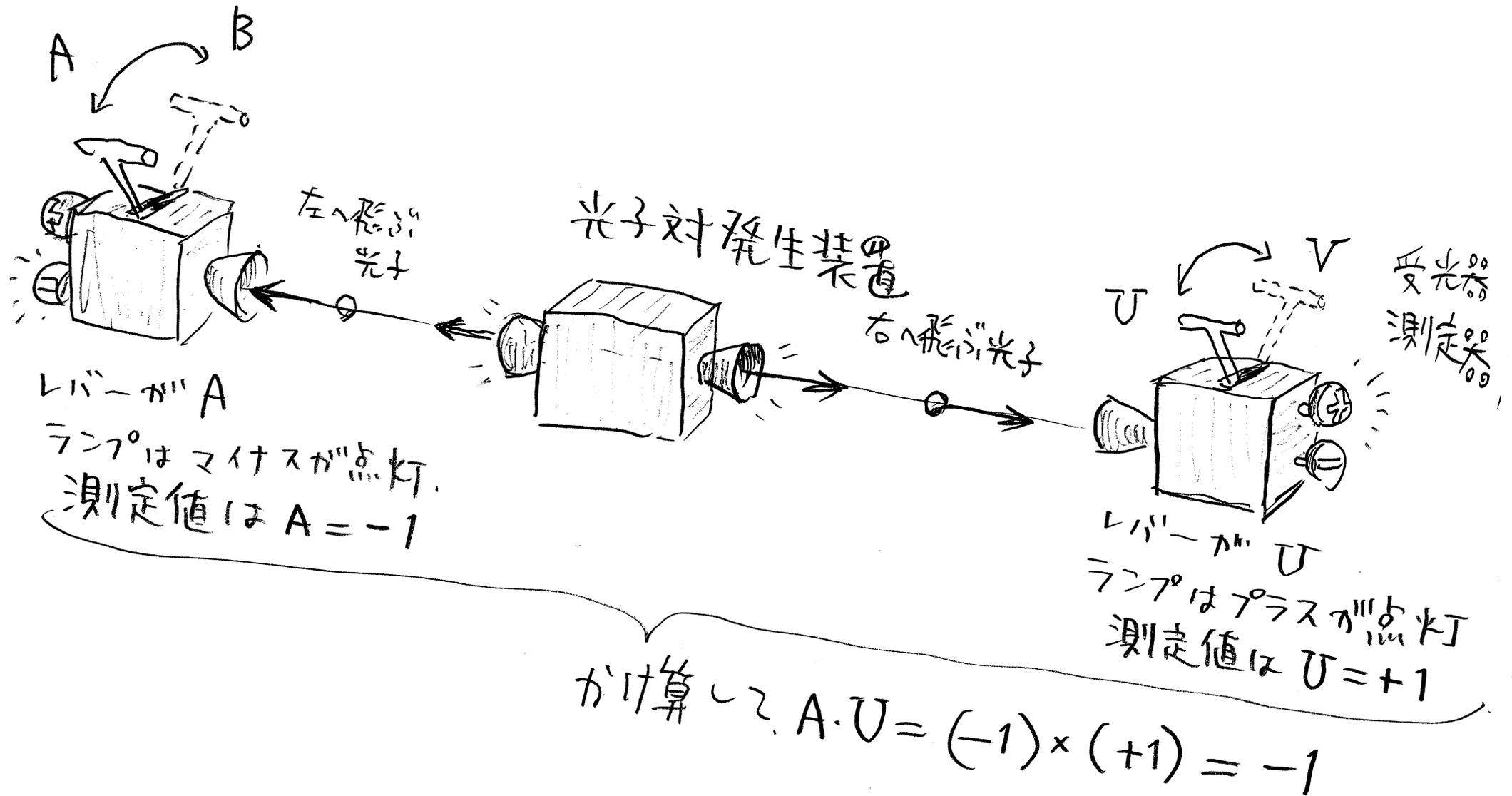
（シモニーはカルナップのもとで哲学の博士を取り、ワイトマンとウィグナーのもとで物理の博士を取った。ワイトマンに「EPR論文の間違いを指摘せよ」と指示されてEPR論文を読んだが、どこも間違っていないと思った、という。ホーンはシモニーの学生。参照：アダム・ベッカー『実在とは何か』）

- CHSHの設定を説明する。

光子の偏光測定器の概念図

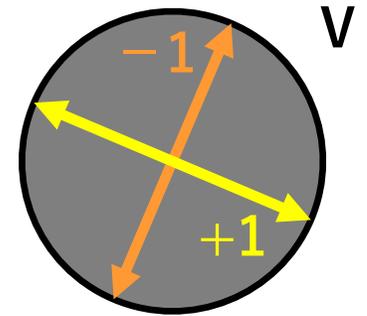
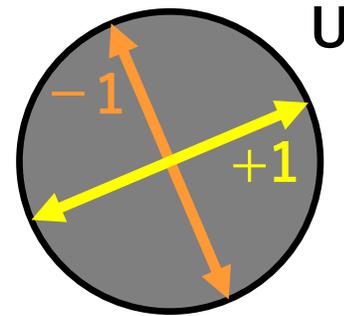
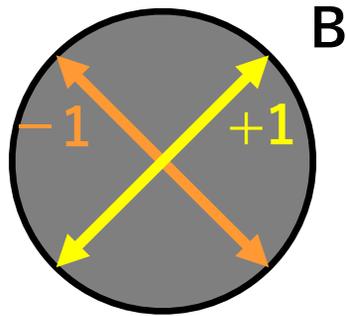
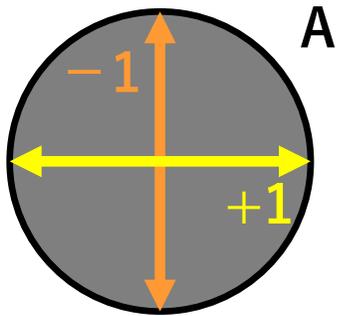


この絵を見ながら説明を聞いてください



偏光分離器

- 複屈折器 A で偏光を分けて、一方の偏光成分を +1、他方を -1 と定める。
- 複屈折の分離方向を切り替えたのが B
- もう一つの複屈折器の U と V も同様。



実験の手順

- 中央に光子ペア発生装置があり、2つの光子を同時に発生させて左右に1つずつ飛ばす。
- 左右の端に受光器。飛び込んで来た光子の偏光状態を測る。x偏光ならプラスのランプ、y偏光ならマイナスのランプが点灯。
- 左右の受光器にはレバーが付いていて、レバーの向きによって偏光の分離角度が変わる。レバーは左右の受光器に付き添っている実験者が切り替える。

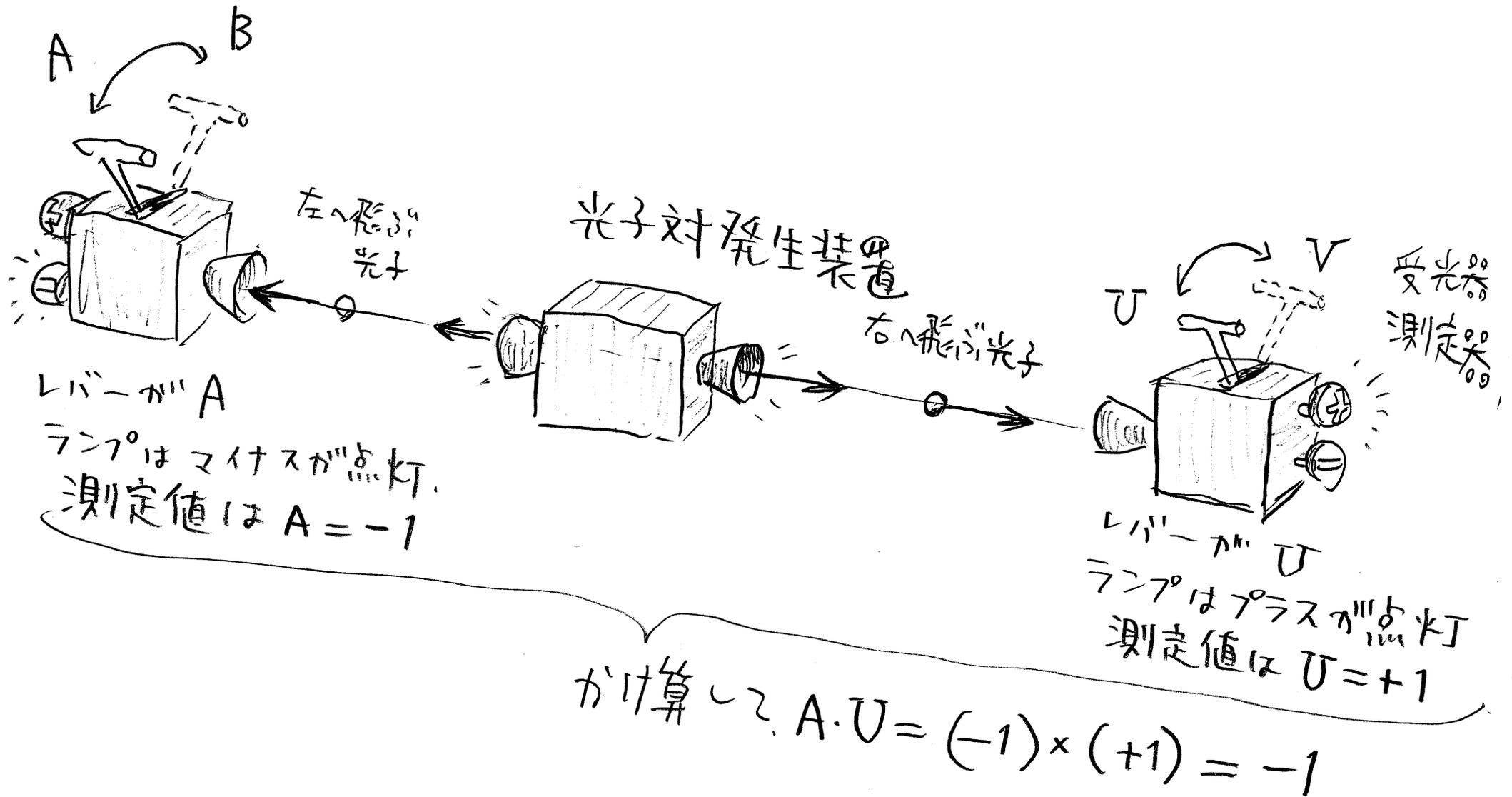
測定値の定義

- 光子が左右の受光装置に飛び込む。
- **レバーがAの位置になっている左の受光器のプラスランプが点灯したら測定値は $A=+1$ とする。**
- レバーがAの位置になっている左の受光器のマイナスランプが点灯したら測定値は $A=-1$ とする。
- レバーがBの位置になっていたら、測定値は $B=\pm 1$.
- 右の受光器についてもレバーの位置とランプの点灯に応じて $U=\pm 1$ または $V=\pm 1$ を測定。

測定を繰り返す

- **1組の光子ペアに対して左の受光器がA、右の受光器がUを測ったなら、掛け算してAUの値を求める。**
- 光子ペアを何回も発生させてAUの値を多数回記録して、その**平均値 $\langle AU \rangle$** を求める。
- 同様に、AとVを測って掛け算値AVを求め、光子ペアの発生を繰り返して、**平均値 $\langle AV \rangle$** を求める。
- 同様に、 **$\langle BU \rangle$** , **$\langle BV \rangle$** を求める。

やることはわかりましたか？



測定データの最終処理

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{AU} \rangle + \langle \mathbf{AV} \rangle + \langle \mathbf{BU} \rangle - \langle \mathbf{BV} \rangle$$

を求める。

局所实在論によれば、

$$-2 \leq \langle \mathbf{S} \rangle \leq +2 \quad (\text{CHSHの不等式})$$

となるはずである。

CHSHの不等式の証明 1/2

平均化する前の式を書く：

$$S = AU + AV + BU - BV$$

因数分解する：

$$S = A(U + V) + B(U - V)$$

U と V の値は ± 1 なので、

U + V の値は ± 2 または 0.

U - V の値も 0 または ± 2 .

U + V と U - V のどちらか一方は 0 で、もう一方は ± 2 .

CHSHの不等式の証明 2/2

$$S = A(\mathbf{U} + \mathbf{V}) + B(\mathbf{U} - \mathbf{V})$$

$U+V$ と $U-V$ は 必ず一方が 0 で、もう一方が ± 2 .

A, B の値は ± 1 なので、けっきょく S の値は ± 2 .

平均値は、必ず最大値と最小値の間にあるので、

$$-2 \leq \langle S \rangle \leq +2 \quad (\text{CHSHの不等式})$$

**$\langle S \rangle$ がこの不等式の外にはみ出るなんてありえない！
と想像していただけではないでしょうか？**

実在論 vs. 量子論

$$-2 \leq \langle S \rangle \leq +2 \quad (\text{CHSHの不等式})$$

$$-2.828 = -2\sqrt{2} \leq \langle S \rangle \leq +2\sqrt{2} = 2.828 \quad (\text{量子論})$$

量子論では、CHSH不等式の破れ (violation) が起きうる。

ここまでのまとめ

- 光には偏光という性質がある。
- 偏光は **x (プラス)** か **y (マイナス)** かどちらか。
- 光子対に対して、測定器の向きをあちこち変えて、光子の偏光を測って掛け算して平均して足し算・引き算した数量を考えると

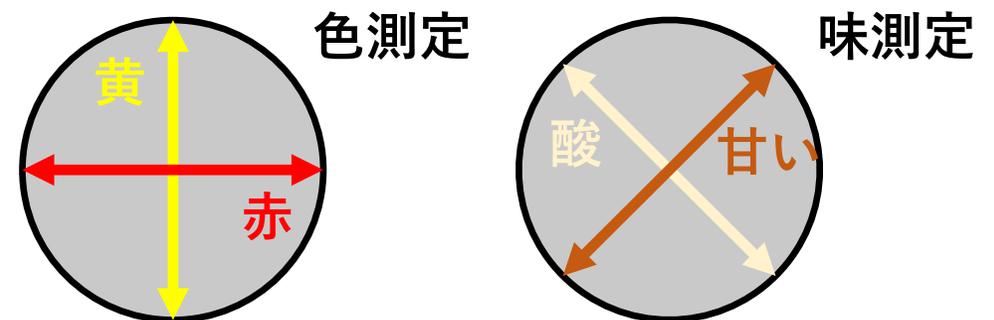
$$-2 \leq \langle AU \rangle + \langle AV \rangle + \langle BU \rangle - \langle BV \rangle \leq 2$$

という不等式を満たすはずだ。

- だが、量子論では **$-2.8 \leq \langle S \rangle \leq 2.8$**

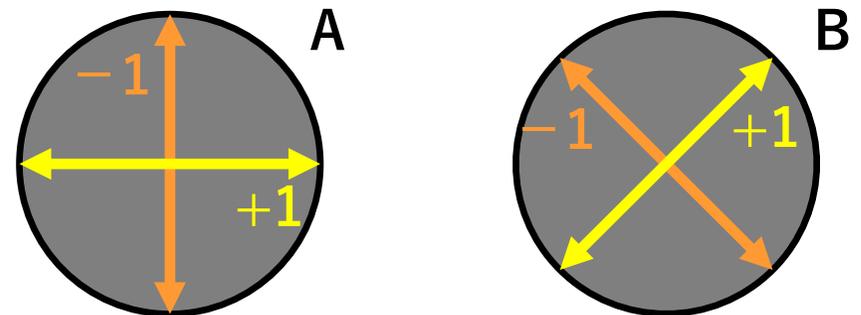
どうしてこれがアインシュタインのクレームに対する
答えになっているのか？ 1/3

- ある装置は対象物の**色**を測ることができる。「赤」か「黄」。
- 装置のスイッチを切り替えると**味**を測ることができる。「甘い」か「酸っぱい」。
- **色と味を同時に測ることはできない作りになっている。**
- しかし、「赤くて甘い（イチゴ）」や「黄色くて甘い（バナナ）」や「黄色くて酸っぱい（レモン）」ものがあると思うのは合理的であるような気がする。



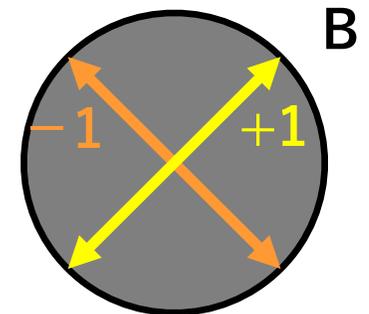
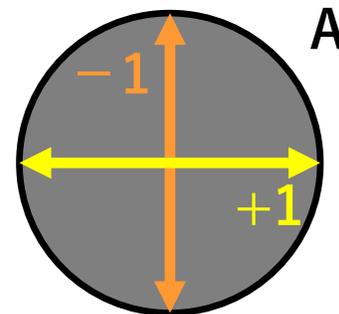
どうしてこれがアインシュタインのクレームに対する
答えになっているのか？ 2/3

- 光子に対して角度**A**で偏光を測る。「+1」か「-1」。
- 装置のスイッチを切り替えると角度**B**で偏光を測る。「+1」か「-1」。
- **AとBを同時に測ることはできない作りになっている。**
- **しかし、AとBの値が共存すると思って「 $A+B=+2$ または 0 または -2 」という計算をやってCHSHの不等式を導いた。**



どうしてこれがアインシュタインのクレームに対する
答えになっているのか？ 3/3

- 実験をやってみると、CHSHの不等式は間違っていることがわかった。
- ということは・・・ **Aを測っているときは仮にもBは ± 1 の値を持っていると思っ**てはいけません！
- Uを測っているときは、Vの値は実在しない！
- **$S = AU + AV + BU - BV$**
の4つの項の値は
同時には実在しない。



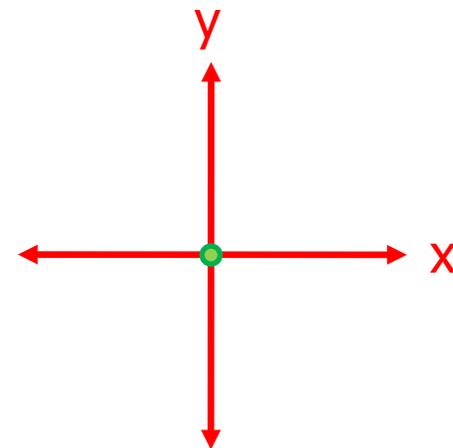
次回予告

- 量子論では $-2\sqrt{2} \leq \langle S \rangle \leq 2\sqrt{2}$ になることを数学的に証明する。
- このことの物理的意味を説明する。
- ノーベル賞を受賞したクラウザー、アスペ、ツァイリッガーはそれぞれどんな実験をやったのか詳しく解説する。

一光子の重ね合わせ状態

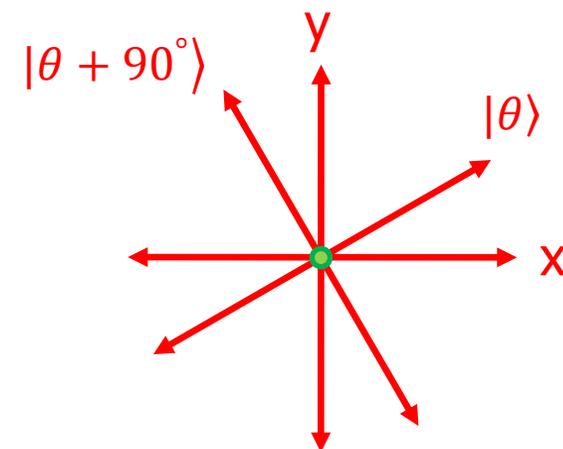
一光子の直線偏光状態（基底ベクトル）：

$$|x\rangle, |y\rangle$$



重ね合わせ状態：

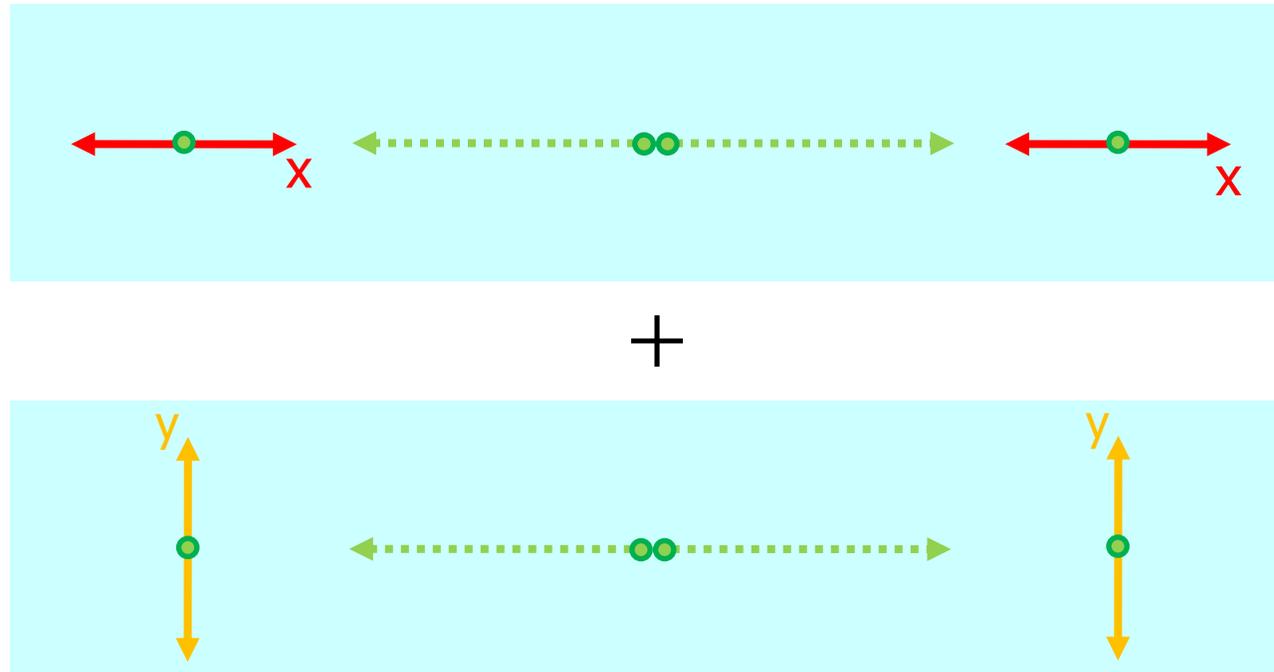
$$\begin{cases} |\theta\rangle = \cos \theta |x\rangle + \sin \theta |y\rangle \\ |\theta + 90^\circ\rangle = -\sin \theta |x\rangle + \cos \theta |y\rangle \end{cases}$$



二光子の量子もつれ状態

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle \otimes |x\rangle + |y\rangle \otimes |y\rangle)$$

「左に**x**偏光 and 右に**x**偏光のペア状態」と
「左に**y**偏光 and 右に**y**偏光のペア状態」の**重ね合わせ状態**。



量子もつれ状態は完全な相関状態

二光子の量子もつれ状態 (\otimes はテンソル積)

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle \otimes |x\rangle + |y\rangle \otimes |y\rangle)$$

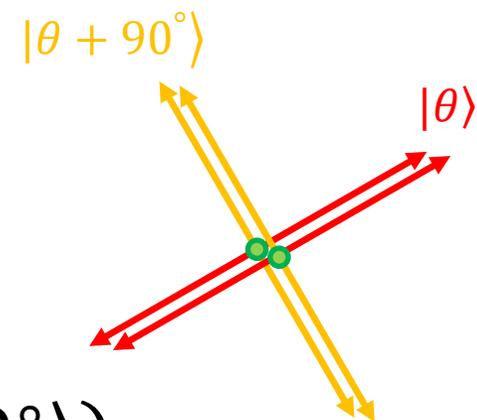
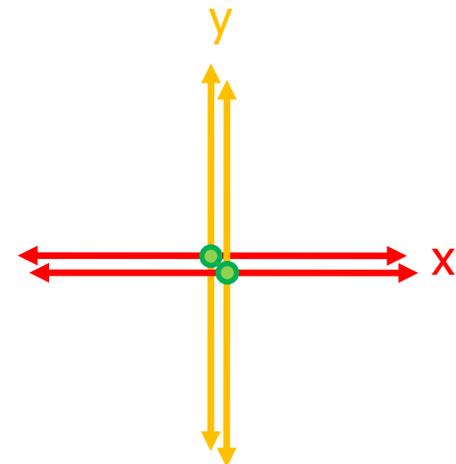
別の観測基底

$$|\theta\rangle = \cos \theta |x\rangle + \sin \theta |y\rangle,$$

$$|\theta + 90^\circ\rangle = -\sin \theta |x\rangle + \cos \theta |y\rangle$$

で見ても、

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\theta\rangle \otimes |\theta\rangle + |\theta + 90^\circ\rangle \otimes |\theta + 90^\circ\rangle)$$

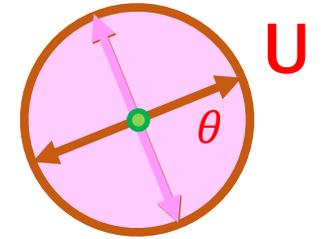
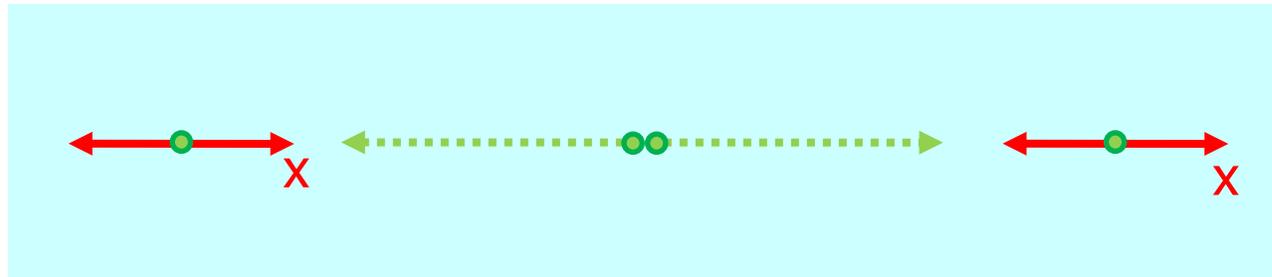
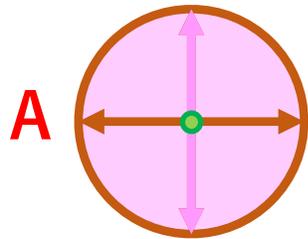


AとUが同符号になる確率

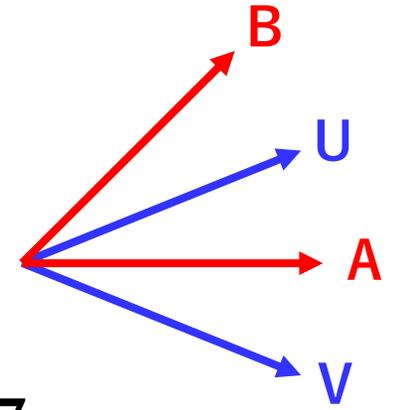
- 左の光子がx偏光であることが確定したとき、
右の光子もx偏光なのだから
右の光子が角度 θ の偏光フィルターを通る確率は

$$P(\theta) = \cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

- とくに、 $P(22.5^\circ) = 0.85 \dots$



平均値 $\langle AU \rangle$ の計算



- AとUのなす角度が 22.5° の場合、

$$\langle AU \rangle = (+1) \times 0.85 + (-1) \times 0.15 = 0.7$$

- 同様に、 $\langle AV \rangle = \langle BU \rangle = 0.7$

- BとVだけ $45^\circ + 22.5^\circ = 67.5^\circ$, $P(67.5^\circ) = 0.15 \dots$

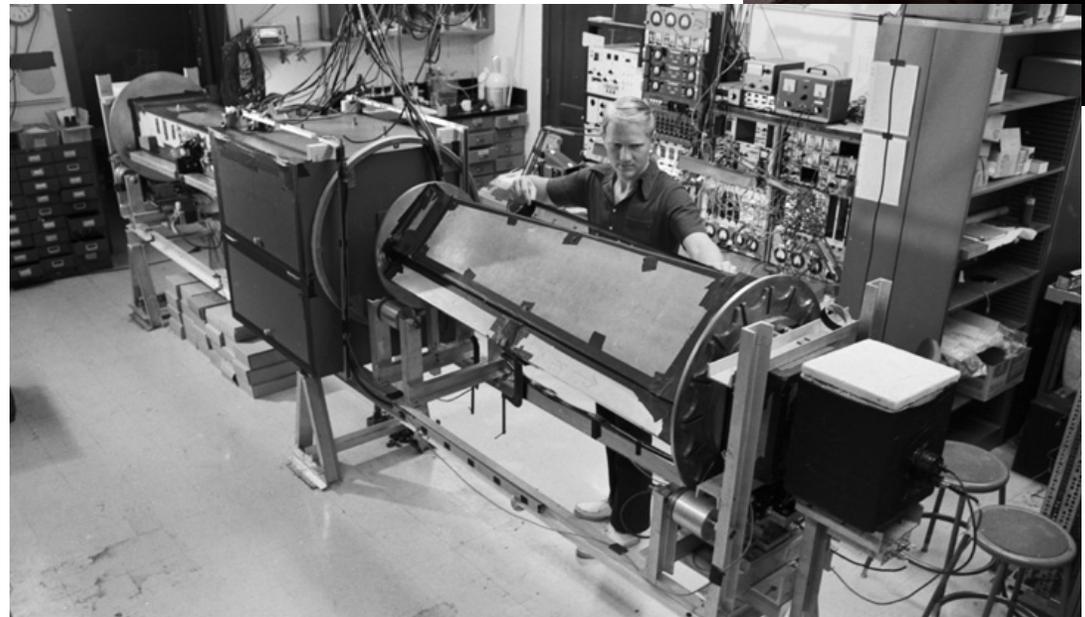
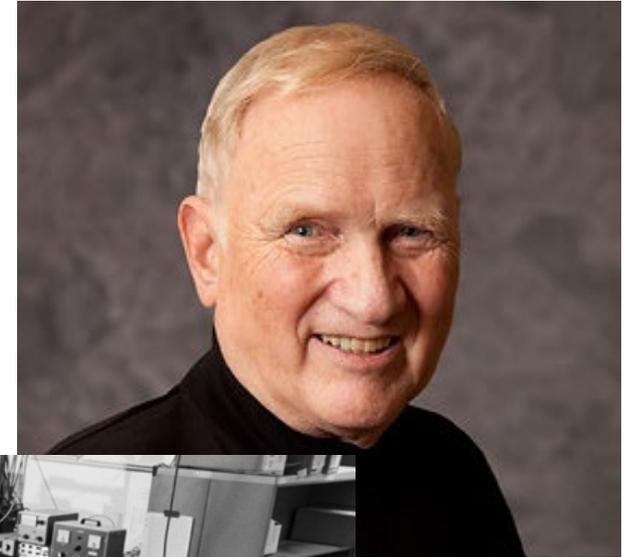
$$\langle BV \rangle = (+1) \times 0.15 + (-1) \times 0.85 = -0.7$$

- 集計すると、

$$\langle S \rangle = \langle AU \rangle + \langle AV \rangle + \langle BU \rangle - \langle BV \rangle = 2.8$$

ジョン・クラウザーの実験（1972年）

大学院では宇宙背景放射の研究をしていたが、ベルの論文を知ってシモニーらと共同研究を行った。博士号を取って、量子もつれ光子ペアを作る実験を行っていたタウンズの研究室の研究員となり、大学院生のフリードマンと共同で最初の検証実験を行った。CHSHの不等式の破れを示した。



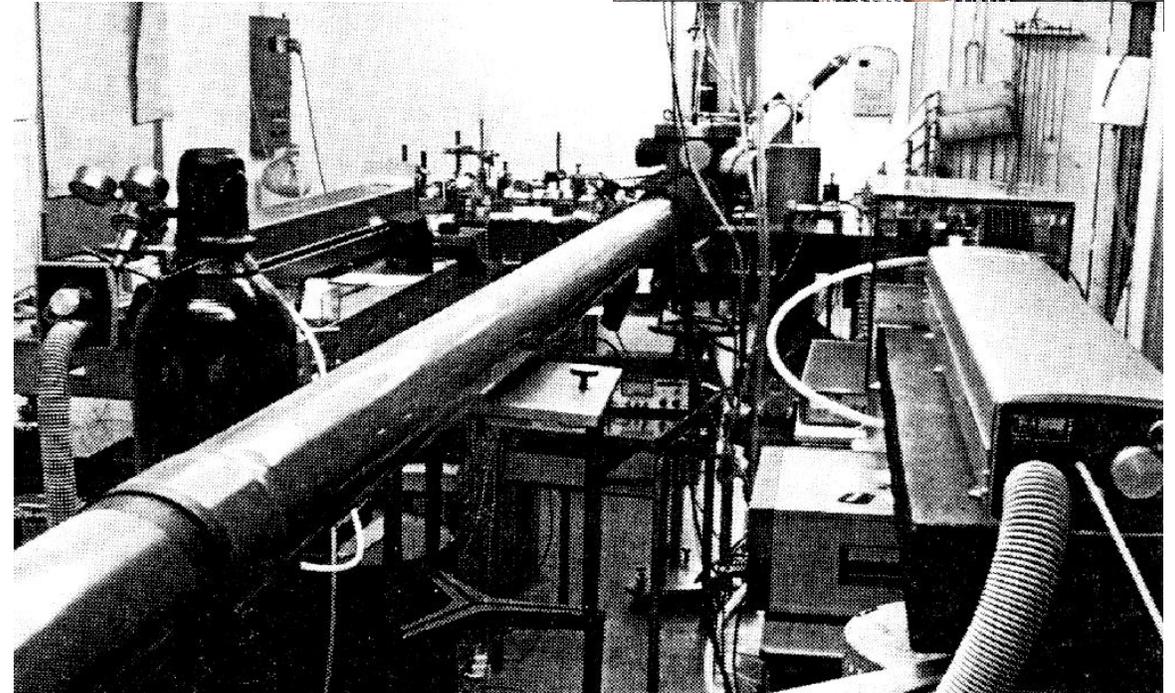
<https://www.johnclausser.com/>

<https://www.universityofcalifornia.edu/news/physics-nobel-recognizes-uc-berkeley-experiment-spooky-action-distance>

アラン・アスぺの実験（1982年）

「左右の測定器が互いに連絡しあう時間があると、量子もつれがなくても相関を生じうる」というクレームに応えるため、左右の測定器を光速で40ナノ秒かかる距離に離して、測定器を10ナノ秒周期で切り替える実験を行い、 $\langle S \rangle = 2.4$ を得た。

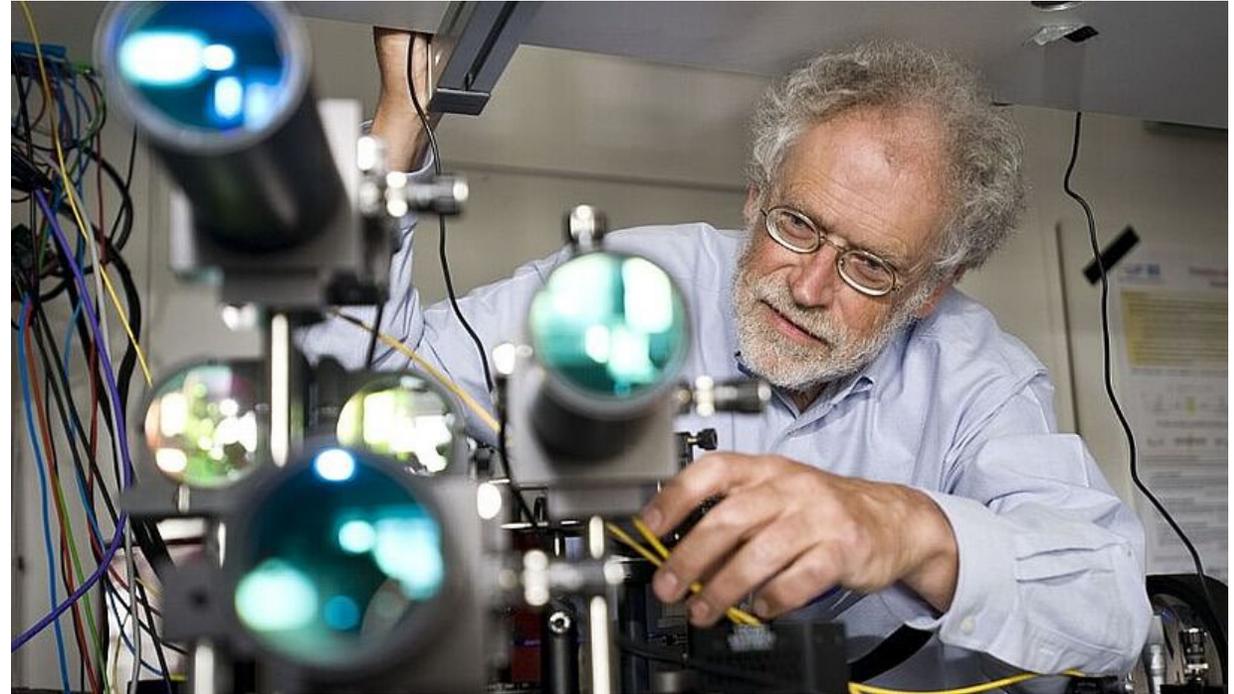
この研究でアスぺは博士学位を取った。



アントン・ツァイリンガーの実験（1998年）

左右の測定器が互いに相手の状態を知らないようにするため、また、あらかじめ光子が測定器の状態を知るチャンスがないようにするため、左右の測定器のそばに乱数発生器を置いて、光子が発生して測定器に飛び込むまでの間に乱数を振って、それに応じて測定器を切り替える実験を行った。

$\langle S \rangle = 2.73$ を得た。



質疑応答の時間