量子もつれとは何だろう？

量子力学の基礎から2022年のノーベル物理学賞まで

名古屋大学教授　谷村省吾

第1回（2023年4月23日）原子・電子と量子力学の数学的予備知識

1　基本要素と基本法則

物理学というのは，人為とは関係なくこの世界にあると思える物や出来事を分類し，それらを数学的に記述し，物の性質を説明したり出来事を予測したりする営みである.「物理的世界には基本構成要素と基本法則があるはずだと考え，それらを明らかにしようとし，基本要素と基本法則がわかればそれらを組み合わせることによって複雑なものごとも理解できるようになるだろう」というアプローチを，**要素還元主義**あるいはたんに**還元主義** (reductionism) という．平たく言えば,「世界は何からできていて，それらはどういうルールに従って動いているのか」を探究し,「基本ルールからすべてのものごとを理解したい」という態度である.

（人為的なものごとの例を挙げると,「1週間は7日である」や「人という字はヒトと読む」などがそうで，なぜそうなっているのかということは物理学では説明できない．ただ，どこまでが物理法則で決まっていることなのか？物理法則に支配されない意思や行為というものがあるのか？といった疑問もあることはある.）

物理学の研究は多様であり，還元主義一辺倒ではない．それでも，すべての物質に共通の，単純な構成要素を探り，それら基本構成要素を支配している基本法則を考案して，さまざまなアイデアを実験検証するという研究は大きな成功を収めている．また，基本要素と基本法則がわかると，物理的対象に適切に働きかけて人類にとって有用であるように物理的対象を操作したり改変したりすることが可能になる．それが**テクノロジー** (technology) だと言ってもよさそうである.

物質は分子・原子・原子核・素粒子の順に分解され，電子や光子は素粒子の一種とされる，と現代物理学では理解されている．これらの基本要素たちはすべて，**量子力学** (quantum mechanics)，より正確に言うなら**相対論的場の量子論** (relativistic quantum field theory) と呼ばれる理論で記述される物理法則に従っている.

これらミクロの世界のものどもには，我々が日ごろ目にするものについて当然成り立っているように思える法則が通用しない．そのことをはっきりと実証する実験を行った人たちに2022年のノーベル物理学賞は贈られた．このノーベル賞の対象となった実験の意義を理解しようというのが，この一連の講座の目的である.

原子や電子の振る舞いは我々の直観からかけ離れており，残念ながらと言うべきか，量子力学は我々の日常言語とは異質な数学の言葉で語られる．そのため，ミクロの世界の物理法則すなわち量子力学を修得するためには，やや抽象的な数学の知識が不可欠になる．そこで今回は，量子力学で使う数学的諸概念について解説する.

2 複素数

量子力学で頻繁に用いられる数学的概念は複素数，絶対値，確率，確率振幅，ベクトル，行列などである．今回は主に複素数について解説しよう．

2.1 虚数の導入

実数 (real number) 全体の集合を $\mathbb{R}$ と書く．実数は加減乗除（和差積商）の四則演算ができる（0 で割ることだけはできない）．**実数は二乗すれば必ず正または 0 になる**：

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0 \tag{1.1}$$

ゆえに，**二乗して負になる実数はない．**方程式

$$x^2 = 2 \tag{1.2}$$

には

$$x = \pm\sqrt{2} = \pm 1.41421356\cdots \tag{1.3}$$

という実数根(こん)が存在するが，

$$x^2 = -1 \tag{1.4}$$

という方程式を満たす実数 x はない．それでも形式的に

$$i := \sqrt{-1} \tag{1.5}$$

（相等子「=」と定義子「:=」を区別して書いたが，わからなかったらどれも等号「=」と思ってよい）という記号を定めて，$x^2 = -1$ の根を $x = \pm i$ と書くことにする．i は**虚数単位** (imaginary unit) と呼ばれる．ともかく i は $\boldsymbol{i^2 = -1}$ を満たす記号である．虚数を使えば，例えば

$$x^2 = -4 \tag{1.6}$$

の根は

$$x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i \tag{1.7}$$

と書ける．

2.2 複素数の定義

2 つの実数 x, y に対して

$$z = x + iy \tag{1.8}$$

と書かれる記号 z を**複素数** (complex number) という．複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と書く．また，複素数 $z = x + iy$ に対し

$$x = \mathrm{Re}\, z, \qquad y = \mathrm{Im}\, z \tag{1.9}$$

と書き，x を z の**実部** (real part), y を z の**虚部** (imaginary part) という．

2つの複素数 z_1, z_2 が等しいということを以下のように定める．実数 x_1, y_1, x_2, y_2 により

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \tag{1.10}$$

と表して，

$$z_1 = z_2 \;:\Leftrightarrow\; (\, x_1 = x_2 \text{ かつ } y_1 = y_2 \,) \tag{1.11}$$

が $z_1 = z_2$ の定義である．

2.3 複素数の演算

実数 a, b, c, d に対して

$$z = a + ib, \quad w = c + id \tag{1.12}$$

という2つの複素数 z, w を定めると，これらの和差積商は

$$z + w := (a + c) + i(b + d), \tag{1.13}$$

$$z - w := (a - c) + i(b - d), \tag{1.14}$$

$$zw := ac - bd + i(ad + bc), \tag{1.15}$$

$$\frac{z}{w} := \frac{ac + bd + i(-ad + bc)}{c^2 + d^2} \tag{1.16}$$

で定められる．$z = a + ib$ の虚部の符号を変えた複素数を

$$\bar{z} = z^* := a - ib \tag{1.17}$$

と書き，z の**共役複素数** (conjugate) という．習慣の問題にすぎないが，z の共役複素数は数学の本では $\bar{z}$，物理学の本では z^* と書かれることが多い．また，

$$|z| = |a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.18}$$

を z の**絶対値** (absolute value) という．$|z|$ は必ず非負（正または0）の実数である．量子力学では絶対値そのものよりも**絶対値の2乗**のほうが頻繁に用いられる．もちろん，

$$|z|^2 = |a + ib|^2 = a^2 + b^2 \tag{1.19}$$

である．例えば，

$$|4 + 3i|^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25, \tag{1.20}$$

$$|4 + 3i| = \sqrt{25} = 5, \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} (4 + 3i)^2 &= (4 + 3i)(4 + 3i) \\ &= 4^2 + 2 \times 4 \times 3i + (3i)^2 \\ &= 16 + 24i - 9 \\ &= 7 + 24i \end{aligned} \tag{1.22}$$

が成り立つ．絶対値2乗は $|z|^2 = z^* z = z z^*$ に等しい．

2.4 複素平面

実数 x を横軸の数直線で表し，実数 y を縦軸の数直線で表せば，複素数 $z = x + iy$ は xy 平面上の点で表される．このような平面を**複素平面** (complex plane) といい，x 軸を**実軸** (real axis), y 軸を**虚軸** (imaginary axis) という．

複素平面において複素数 $z = x + iy$ を表す点と原点 0 との距離は，絶対値

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.23}$$

に等しい．また，原点 0 から点 z を通る半直線と x 軸のプラス側半直線とがなす角を z の**偏角** (argument) あるいは**位相** (phase) という．ラジアン単位（ラジアンが何であるかわからなくても気にしなくてよい）で測った偏角を

$$\arg\ z \tag{1.24}$$

と書く．$\arg\ z = \theta$ とおけば

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.25}$$

が成り立つ．これを複素数の**極表示**ともいう．

問 1-1. 以下のそれぞれの複素数 z, w について $z + w$ を求めよ．z, w, $z + w$ を複素平面に図示せよ．$|z|^2$, $|w|^2$, $|z|^2 + |w|^2$, $|z + w|^2$ を求めよ．$|z|^2 + |w|^2$ と $|z + w|^2$ の大小関係を調べよ．

$$\text{(i)} \quad z = 3 + i, \qquad w = 1 + 3i \tag{1.26}$$

$$\text{(ii)} \quad z = 3 + i, \qquad w = -1 + 3i \tag{1.27}$$

$$\text{(iii)} \quad z = 4, \qquad w = -1 + 2i \tag{1.28}$$

問 1-2. 以下の (i), (ii), (iii) は複素数 z と w が複素平面上でどのような位置関係にあるときに成立するか，それぞれ述べよ．

$$\text{(i)} \quad |z|^2 + |w|^2 < |z + w|^2 \quad \text{（強め合いの干渉）} \tag{1.29}$$

$$\text{(ii)} \quad |z|^2 + |w|^2 = |z + w|^2 \quad \text{（干渉なし）} \tag{1.30}$$

$$\text{(iii)} \quad |z|^2 + |w|^2 > |z + w|^2 \quad \text{（弱め合いの干渉）} \tag{1.31}$$

問 1-3. 一般の複素数 z, w について z, w, $-w$, $z + w$, $z - w$, zw, z^*, zz^* は複素平面においてどのような位置関係にあるか図を描いて説明せよ．

問 1-4. 任意の複素数 z, w について

$$|z| + |w| \geq |z + w| \tag{1.32}$$

が成り立つ．なぜか？

問 1-5. (i) $z = 4 + 3i$ と $w = 2 + i$ の絶対値 $|z|$ と $|w|$ をそれぞれ求めよ．
(ii) $|z|$ と $|w|$ を掛けて $|z| \cdot |w|$ を求めよ．
(iii) z と w を掛けて zw を求めよ．
(iv) zw の絶対値 $|zw|$ を求めよ．
(v) $|z| \cdot |w|$ と $|zw|$ は等しいか？

3 確率振幅

量子力学の根幹的概念である**確率振幅** (probability amplitude) について説明する．注目している系（システム）がある状態 A からスタートして，ある状態 X に至るという出来事が起こるかどうか知りたいとする．A を**始状態** (initial state), X を**終状態** (final state) という．例えば A は電子が発射装置から飛び出した瞬間の状態で，X は電子がスクリーン上の特定の場所に当たった状態である．**始状態は A であることがわかっているときに，終状態 X に至る確率を求めよ**というのが，尋ねられる問題である．

量子力学では，このような始状態と終状態の組に対して確率振幅という複素数 ϕ（ギリシャ文字，ファイと読む）を対応させ,

$$\phi \ = \ \langle X|A \rangle \tag{1.33}$$

と書く．$\langle X|A \rangle$ で一つの複素数を表す．三角括弧 $\langle \cdots \rangle$ をブラケット (bracket) と呼び，左側の $\langle \cdot |$ をブラ (bra), 右側の $| \cdot \rangle$ をケット (ket) と呼ぶ．右の A が始状態で，左の X が終状態なので，$\langle X|A \rangle$ は**右から左に読む**ほうがよい．

確率振幅に関する規則 1：確率振幅の絶対値を 2 乗すると確率になる． 上の例の場合,

$$\mathrm{Prob}(X \leftarrow A) \ = \ |\phi|^2 \ = \ \Big| \langle X|A \rangle \Big|^2 \tag{1.34}$$

は，発射装置 A から飛び出した電子がスクリーンの特定の場所 X に当たる確率に等しい．確率振幅そのものは複素数であり，負の数かもしれないし，虚数かもしれないが，確率振幅の絶対値を 2 乗した確率は必ず非負の実数値になる．確率振幅は「確率のもと」のような数である．

確率振幅に関する規則 2：重ね合わせの原理． 始状態 A から終状態 X に到達する経路が 2 通りある場合を考える．経路 1 だけを通って A から X に達する確率振幅を $\phi_1 = \langle X|A \rangle_1$ とする．経路 2 だけを通って A から X に達する確率振幅を $\phi_2 = \langle X|A \rangle_2$ とする．始状態と終状態を見る限りどちらの経路を通ったかわからない場合は,

$$\phi \ = \ \phi_1 + \phi_2 \tag{1.35}$$

のごとく各経路に対する確率振幅を足して合計の確率振幅を求め，その絶対値 2 乗

$$\mathrm{Prob}(X \leftarrow A) \ = \ |\phi|^2 \ = \ \Big| \phi_1 + \phi_2 \Big|^2 \tag{1.36}$$

が A から X に達する確率に等しい．こうして求められる確率は

$$|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 \quad \neq \quad \left|\phi_1 + \phi_2\right|^2 \tag{1.37}$$

つまり，

（経路 1 だけを開けたときの到達確率）+（経路 2 だけを開けたときの到達確率）
≠（両方の経路が開いているときの到達確率） (1.38)

となり，単純な確率の足し算は成り立たない．これが**干渉効果** (interference effect) である．

確率振幅に関する規則 3：見分けのつく終状態の場合． 状態 X と Y は物理的な方法で識別できるとする．始状態 A から終状態 X または終状態 Y のどちらかに到達する確率は，

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}((X \text{ または } Y) \leftarrow A) &= \mathrm{Prob}(X \leftarrow A) + \mathrm{Prob}(Y \leftarrow A) \\ &= \left|\langle X|A\rangle\right|^2 + \left|\langle Y|A\rangle\right|^2 \end{aligned} \tag{1.39}$$

のごとく各終状態に対する確率を足して合計の確率振幅を求められる．この場合は干渉は起きない．

参考文献

[1] 谷村省吾『量子力学 10 講』（名古屋大学出版会，2021 年）．数式も書いてある量子力学の教科書の中ではもっとも易しい本だと思います．

[2] ファインマン，レイトン，サンズ（砂川重信 訳）『ファインマン物理学 5：量子力学』（岩波書店，1986 年）．大学生向けの教科書です．物理学的な直観を重視した解説になっています．

[3] 竹内外史『線形代数と量子力学』（裳華房，1981 年）．数学者が書いた量子力学の本です．

[4] ファインマン（江沢洋 訳）『物理法則はいかにして発見されたか』（岩波書店，2001）．教科書ではなく講演集です．この本を読むと，物理学におけるものの見方・考え方がわかってくると思います．第 6 章で量子力学について論じています．

[5] ファインマン（釜江常好，大貫昌子 訳）『光と物質のふしぎな理論』（岩波書店，2007）．光子と電子の振る舞いを記述・予測する量子電磁力学という理論をファインマンは作り，その業績によりノーベル物理学賞を受賞しました．この本ではファンマンは確率振幅を矢印で表して量子電磁力学をまったく数式を使わずに絵で説明しています．