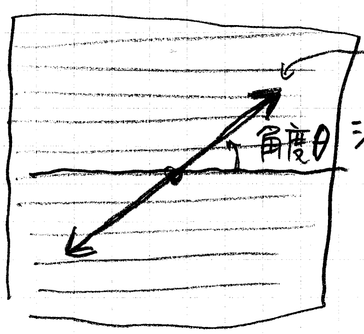
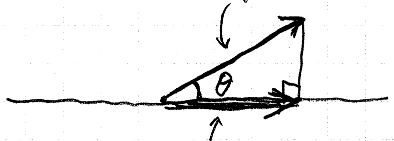
栄中日文化センター講座

谷村省吾『量子もつれとは何だろう？』第3回　2023年6月25日

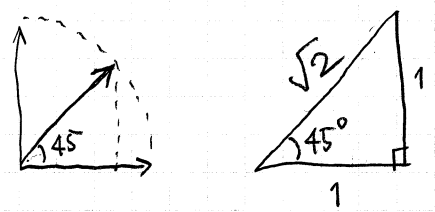
偏光が偏光フィルターを透過する確率 P





影の長さ（射影成分）$\alpha = \cos\theta$（アルファ）

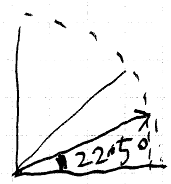
透過確率 $P(\theta) = |\alpha|^2 = \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$



$P(\theta=0°) = 1$

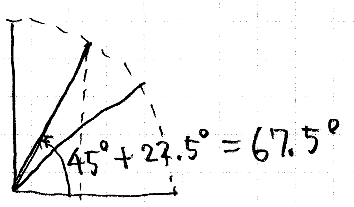
$P(\theta=45°) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$

$P(\theta=90°) = 0$



角度が 22.5° の場合，
透過（通過）確率は 約85％

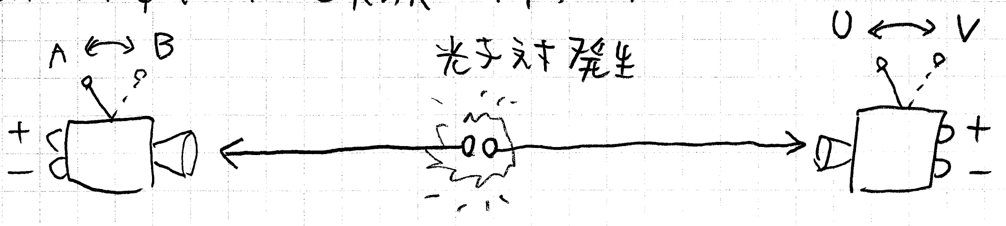
$$P(\theta=22.5°) = \frac{1}{2}(1+\cos 45°) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.8535\ldots$$



$\theta = 66.5°$ の場合，
透過確率は 約15％

$$P(\theta=67.5°) = \frac{1}{2}(1+\cos 135°) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.1465\ldots$$

ベル-CHSH不等式の検証実験の枠組み



AまたはBを測る.
A, Bどちらを測るかは測定者が決める
(AとBは同時には測れないのがミソ)
測定結果は $A=+1$ または $A=-1$.
Bを測ったなら $B=+1$ または $B=-1$

UまたはVを測る.
U, Vどちらを測るかは測定者が決める.
測定結果は $U=\pm1$
あるいは $V=\pm1$.

光子ペアについて, AとUを測ったなら, かけ算して AU を求める.
AとV 〃 〃 AV
BとU 〃 〃 BU
BとV 〃 〃 BV

レバーをA, B切り替えをくりかえし, レバーのU, Vの切り替えをくりかえし,
AUのデーターが蓄積されたら, A·Uの平均値 $\langle AU\rangle$ を求める.
同様に平均値 $\langle AV\rangle$, $\langle BU\rangle$, $\langle BV\rangle$ を求める.

$$\langle S\rangle = \langle AU\rangle + \langle AV\rangle + \langle BU\rangle - \langle BV\rangle$$ とおくと

CHSH
Clauser-Horne-Shimony-Holt の不等式 $-2 \leqq \langle S\rangle \leqq 2$
クラウザー・ホーン・シモニー・ホルト

が成り立つはず.

証明 $S = AU + AV + BU - BV$ とおくと,
$$= A(U+V) + B(U-V)$$

U	V	U+V	U−V
+1	+1	+2	0
+1	−1	0	+2
−1	+1	0	−2
−1	−1	−2	0

(U+V)と(U−V)の
どちらかは必ず0であり,
他方は±2.

A, Bの値は±1なので Sの値は±2しかない.

(Sの最小値) ≦ (Sの平均値) ≦ (Sの最大値) のはずなので,

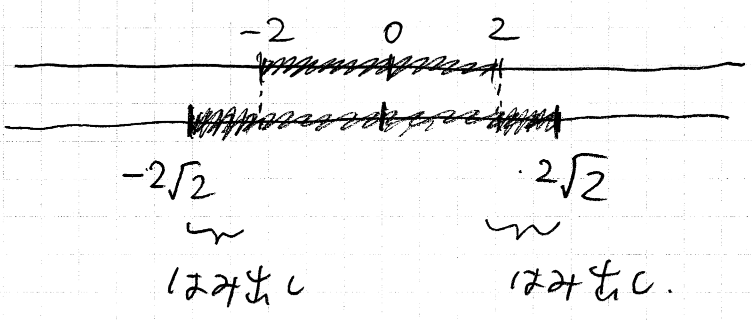
$$-2 \leqq \langle S\rangle \leqq 2.$$

しかし、量子力学では $-2\sqrt{2} \leq \langle S \rangle \leq 2\sqrt{2}$ と予測される。

$$-2.828\ldots \qquad\qquad +2.828\ldots$$

常識の範囲

量子力学の答え



すう
かず

普通の数の数学　AとBのかけ算 AB

$BA = AB$ 可換, commutative

量子力学の数学　$BA \neq AB$ 非可換 non-commutative,

かけ算からの推論　$ab=0$ ならば $a=0$ または $b=0$.

$(x-a)(x-b)=0$ ならば $x=a$ または $x=b$.

$(x-a)(x-b)(x-c)=0$ ならば $x=a$ または $x=b$ または $x=c$

$A^2=1$ から

$$A^2-1=0$$
$$A^2+A-A-1=0$$
$$A(A+1)-(A+1)=0$$
$$(A-1)(A+1)=0$$

$A-1=0$ または $A+1=0$

$A=1$ または $A=-1$

このように定められる「Aがとりうる値」をAのスペクトル値とか、Aの固有値という。「Aの測定値」と解釈される。

$B^2=1$ から $B=1$ または $B=-1$ が導かれる。

このとき、$A+B$ がとり得る値は？

直観的には $A+B=2$ または 0 または -2.

もしも $BA=-AB$ だったら（非可換な積）

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B)\\ &= A^2+AB+BA+B^2\\ &= 1+AB-AB+1\\ &= 2\end{aligned}$$

ゆえに $A+B=\pm\sqrt{2}$.　1+1が2にならずに $\sqrt{2}$ になる？

もしも $A^2=1$, $B^2=1$, $BA=AB$（可換）だったら,

$$
\begin{aligned}
(A+B)^2 &= (A+B)(A+B)\\
&= A^2+AB+BA+B^2\\
&= 1+AB+AB+1\\
&= 2+2AB\\
&= 2(1+AB)\\
(A+B)^3 &= 2(1+AB)(A+B)\\
&= 2\{A+B+AB(A+B)\}\\
&= 2\{A+B+A^2B+AB^2\}\\
&= 2\{A+B+B+A\}\\
&= 4(A+B)
\end{aligned}
$$

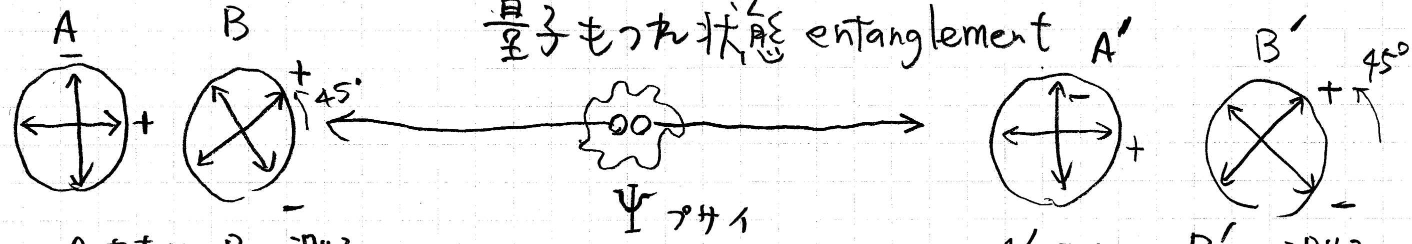
ゆえに $(A+B)^3-4(A+B)=0$

$$(A+B)\{(A+B)^2-4\}=0$$

$$(A+B)\{(A+B)-2\}\{(A+B)+2\}=0$$

ゆえに $A+B=0$ または 2 または -2.（直観どおりの結果）

量子もつれ状態 entanglement



A または B を測る　　　　A′ または B′ を測る.

A を測ると ± 1 がそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$

Ψ 状態における平均値 $\langle A \rangle_\psi = 0$

B を測っても確率 $\frac{1}{2}$ で $+1$ または -1

$$\langle B \rangle_\psi = 0$$

A′, B′ も同様

$$\langle A' \rangle_\psi = 0$$

$$\langle B' \rangle_\psi = 0$$

しかし A と A′ を測ると, つねに（$+1$ と $+1$）になるか（-1 と -1）になる.

かけ算の平均値　　　つねに同符号, 明確な相関がある.

$\langle AA' \rangle_\psi = 1$　　同様に $\langle BB' \rangle_\psi = 1$　　$\langle AB' \rangle_\psi = 0$

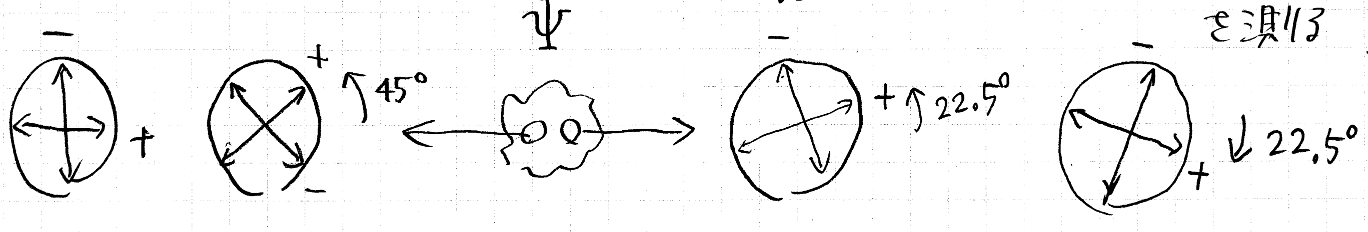
しかし A と B′ だと $A=+1$ のとき B′ は半々の確率で ± 1, $A=-1$ のときも $B'=\pm 1$

同様に、BとA′の組み合わせで測っても、

$(+1と+1)$, $(+1と-1)$, $(-1と+1)$, $(-1と-1)$ が均等な確率で現れる

$$\langle BA' \rangle_\psi = 0.$$

では、A または B を測る　　$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(A' + B')$ または $V = \frac{1}{\sqrt{2}}(A' - B')$ を測る



$$\langle AU \rangle_\psi = \left\langle A \times \frac{1}{\sqrt{2}}(A' + B') \right\rangle_\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ \langle AA' \rangle_\psi + \langle AB' \rangle_\psi \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\{ 1 + 0 \}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\langle AV \rangle_\psi = \left\langle A \times \frac{1}{\sqrt{2}}(A' - B') \right\rangle_\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ \langle AA' \rangle - \langle AB' \rangle \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\{ 1 - 0 \}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle BU \rangle_\psi = \left\langle B \times \frac{1}{\sqrt{2}}(A' + B') \right\rangle_\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ \langle BA' \rangle + \langle BB' \rangle \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\{ 0 + 1 \}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle BV \rangle_\psi = \left\langle B \times \frac{1}{\sqrt{2}}(A' - B') \right\rangle_\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ \langle BA' \rangle - \langle BB' \rangle \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\{ 0 - 1 \}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

そうすると　　　　　　　　　　　　CHSHの不等式の破れ

$$\langle S \rangle_\psi = \langle AU \rangle_\psi + \langle AV \rangle_\psi + \langle BU \rangle_\psi - \langle BV \rangle_\psi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,!$$

$\langle AU \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ の意味.

AとUが同符号になる確率を P_+ とし,.

AとUが異符号になる確率を P_- とする.

確率の総和は1でなくてはならないので $P_+ + P_- = 1$ …①

$\langle AU \rangle$ の平均は $(+1) \times P_+ + (-1) \times P_- = P_+ - P_- = \frac{1}{\sqrt{2}}$ …②

①+②より $2P_+ = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ゆえに $P_+ = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.8535\ldots$

①−②より $2P_- = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ゆえに $P_- = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.1465\ldots$

AとU, AとV, BとU は同符号になる確率が 85%

異符号 〃 が 15%

$\langle BV \rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ から, BとV は同符号になる確率が 15%

異符号 〃 85%

この数字が 実在論(見ていないもの,測っていないものも,見たときと変わらず存在しているはずだという信念)や

マーミンの野球原理(私が野球の試合のテレビ中継を見る・見ないにかかわらず,野球の試合運び,ピッチャーの投げる球,バッターのヒットなどなどは変わらないはずだ)

を揺るがす。

B	+	$\boxed{+}$	−	−	+	−	−	+	+	$\boxed{+}$	−	+	−	+	+	−	$\boxed{-}$	−	+	−	← +と−が50%
U	+	$\boxed{-}$	−	−	+	−	−	+	+	$\boxed{-}$	−	+	−	+	+	−	$\boxed{+}$	−	+	−	← +,− 50%

$\frac{3回}{20回} = \frac{15}{100} = 15\%$ が異符号

U	+	−	−	−	+	−	$\boxed{-}$	+	+	−	−	$\boxed{+}$	−	+	+	$\boxed{-}$	+	−	+	−
A	+	−	−	−	+	−	$\boxed{+}$	+	+	−	−	$\boxed{-}$	−	+	+	$\boxed{+}$	+	−	+	−

15%が異符号

A	+	−	−	$\boxed{-}$	+	−	+	+	+	−	−	−	−	$\boxed{+}$	+	+	+	−	$\boxed{+}$	−
V	+	−	−	$\boxed{+}$	+	−	+	+	+	−	−	−	−	$\boxed{-}$	+	+	+	−	$\boxed{-}$	−

15%が異

一番上のBと一番下の行のV はどうがんばっても 45% だけが異

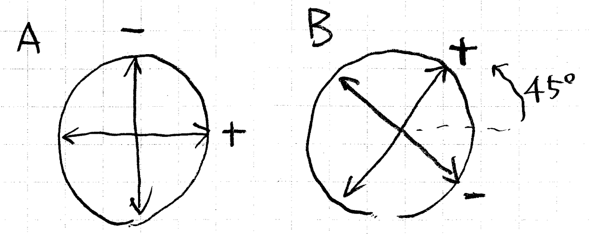
しかし,量子論によれば(CHSHの $\langle S \rangle = 2\sqrt{2}$ を達成するためには)

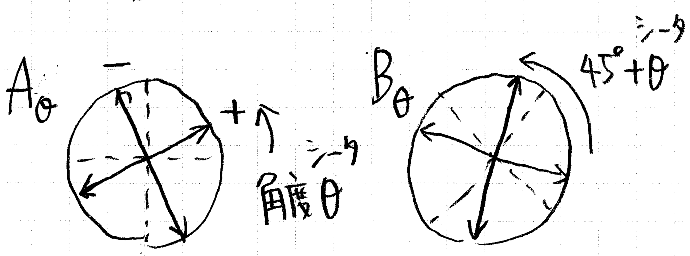
BとVのちがいは 85%

このことの意味をどう考えるか?

余力があれば これも考えてみよう

偏光分離





$$\begin{cases} A_\theta = A\cos 2\theta + B\sin 2\theta \\ B_\theta = -A\sin 2\theta + B\cos 2\theta \end{cases}$$

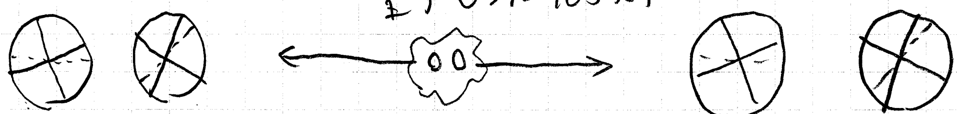
A, Bが ±1 の値をとるなら

A_θは $\pm\cos 2\theta \pm \sin 2\theta$ という4とおりの値をとりそうなものだが、

$$\begin{aligned}(A_\theta)^2 &= A^2\cos^2 2\theta + AB\cos 2\theta\sin 2\theta + BA\sin 2\theta\cos 2\theta + B^2\sin^2 2\theta \\ &= 1\cdot\cos^2 2\theta + AB\cos 2\theta\sin 2\theta - AB\cos 2\theta\sin 2\theta + 1\cdot\sin^2\theta \\ &= \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta \\ &= 1.\end{aligned}$$

なので A_θ も ±1の値をとる。同様に B_θ の値も ±1.

量子もつれ光子対



A_θ または B_θ を測る　　　　A'_θ または B'_θ を測る

$A'_\theta = A'\cos 2\theta + B'\sin 2\theta$, $B'_\theta = -A'\sin 2\theta + B'\cos 2\theta$

$$\left.\begin{aligned}\langle AA'\rangle &= 1 \\ \langle BB'\rangle &= 1 \\ \langle AB'\rangle &= 0 \\ \langle BA'\rangle &= 0\end{aligned}\right\} \text{から} \left.\begin{aligned}\langle A_\theta A'_\theta\rangle &= 1 \\ \langle B_\theta B'_\theta\rangle &= 1 \\ \langle A_\theta B'_\theta\rangle &= 0 \\ \langle B_\theta A'_\theta\rangle &= 0\end{aligned}\right\} \text{が導ける.}$$

例えば

$$\langle A_\theta A'_\theta\rangle = \langle (A\cos 2\theta + B\sin 2\theta)(A'\cos 2\theta + B'\sin 2\theta)\rangle$$

$\langle AA'\rangle = 1$, $\langle BB'\rangle = 1$, $\langle BA'\rangle = 0$, $\langle AB'\rangle = 0$

$$= \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta = 1.$$

もしこれが「量子もつれ光子対」ではなく「xx光子対とyy光子対の混ぜもの」だったら？

つまり、

$\frac{1}{2}$の確率で ← x偏光 x偏光 → のペアが発生	または、	$\frac{1}{2}$の確率で ← y偏光 y偏光 → のペアが発生

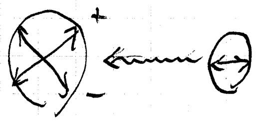
だとしたら、

左で $A=+1$ なら確実に右でも$A'=+1$

左で $A=-1$ なら右でも確実に $A'=-1$

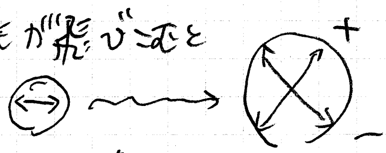
は言える。

しかし BとB'を測ったら、



左にx偏光が飛びこむと
半々の確率で$B=\pm 1$

右にx偏光が飛びこむと



半々の確率で$B'=\pm 1$.

BとB'の間に相関はない。

もしも A, B, U, Vの値が完全に客観的実在だったら、
もしもマーミンの野球原理が成立していたら、

B	+ + − … + − − − + … − + + −	25%の不一致
U	+ + − − − − + + + + −	

客観的実在なので同じ

U	+ + − − − − + + + + −	25%の不一致
A	+ − − − − + + + + − −	

客観的実在と仮定しているので同じ

A	+ − − − − + + + + − −	25%の不一致
V	− − − − + + + + + − +	

BとVは最大 $25+25+25=75\%$ の不一致

$$\langle BU\rangle=(+1)\times\frac{75}{100}+(-1)\times\frac{25}{100}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\langle UA\rangle=\text{同様に}=\frac{1}{2}$$

$$\langle AV\rangle=\text{同様}=\frac{1}{2}$$

$$\langle BV\rangle=(+1)\times\frac{25}{100}+(-1)\times\frac{75}{100}=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$$

CHSHの不等式は破れない。

この場合は $\langle S\rangle=\langle BU\rangle+\langle UA\rangle+\langle AV\rangle-\langle BV\rangle=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=2$