

ベルの定理60周年記念研究会
芝浦工業大学 豊洲キャンパス 2024年9月3日

ベルの不等式とその前後の歴史

谷村 省吾

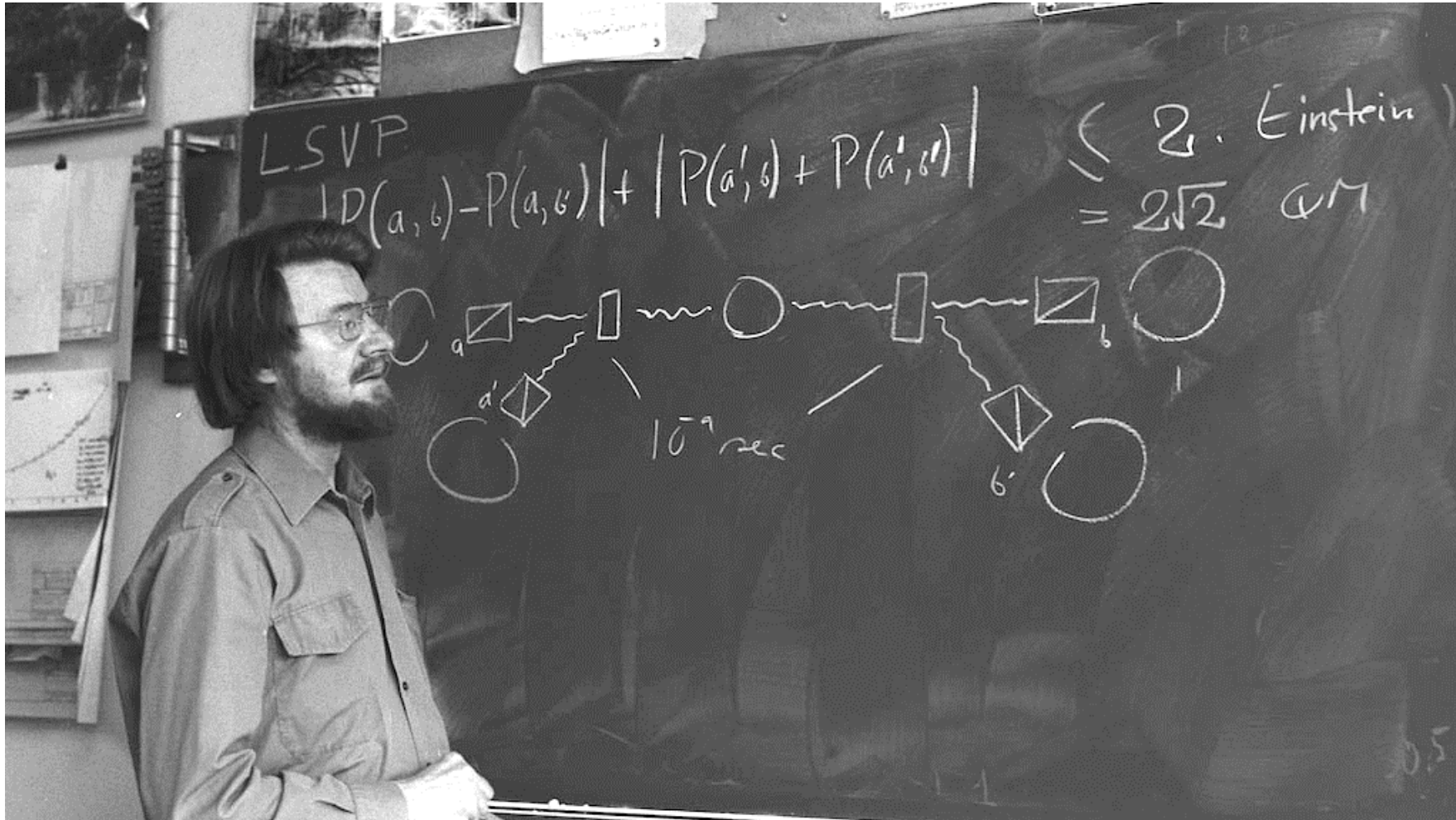
TANIMURA Shogo

名古屋大学 情報学研究科



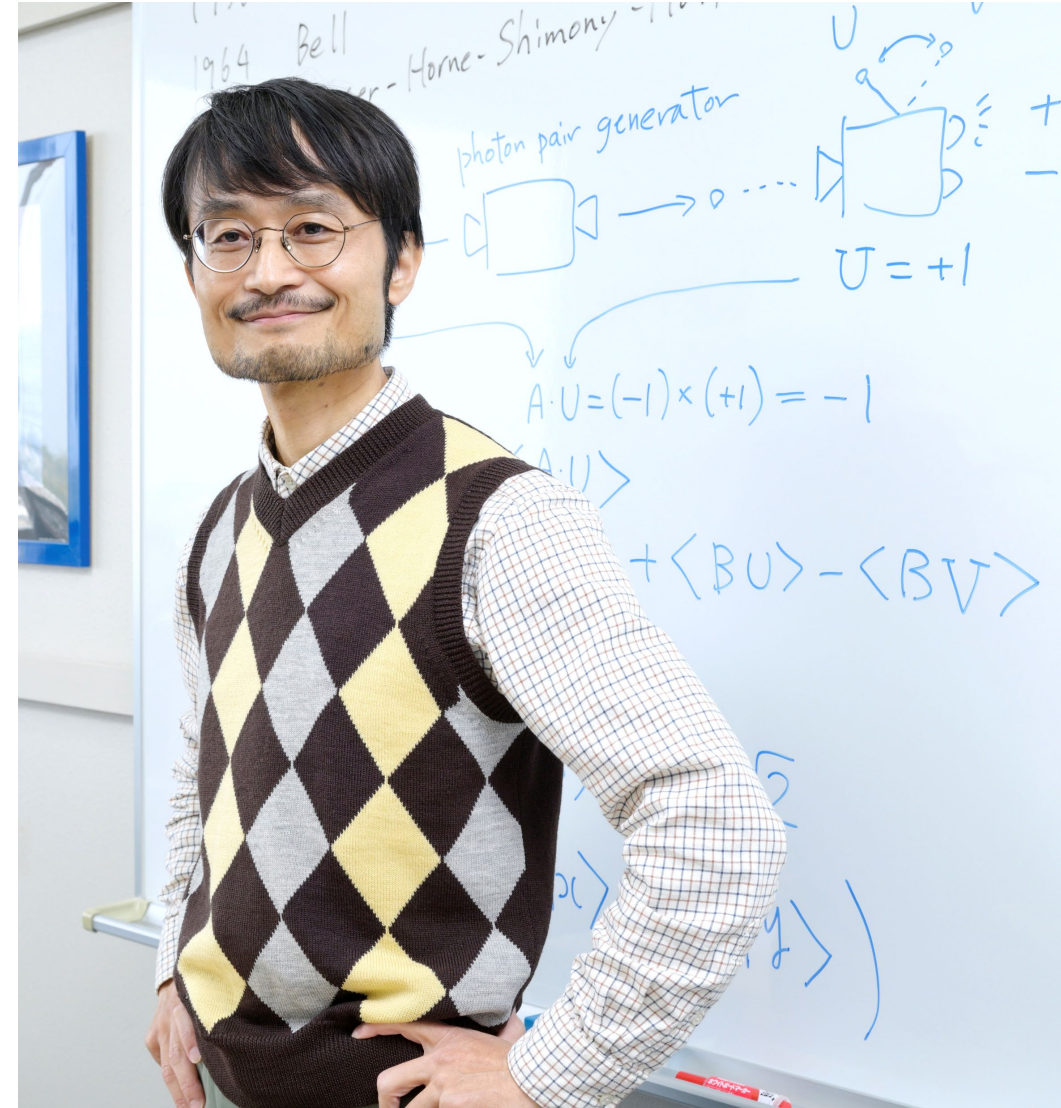
ベルの定理60周年おめでとうございます

John Stewart Bell, On the Einstein Podolsky Rosen paradox, 1964



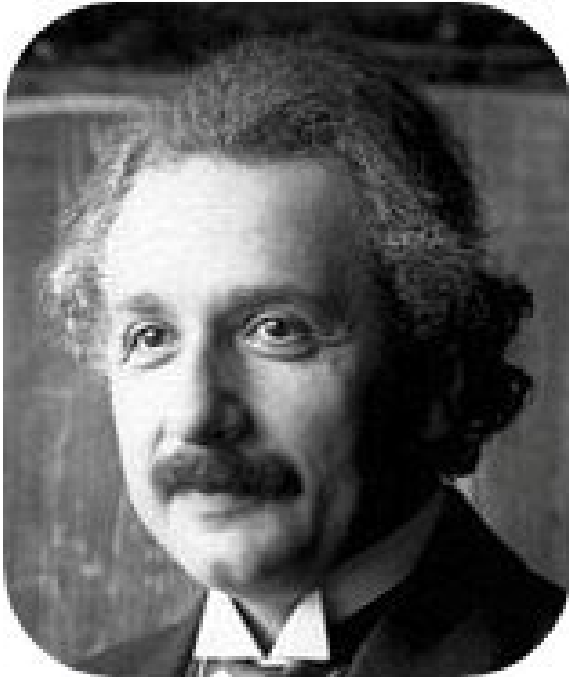
自己紹介

- 谷村省吾（たにむら・しょうご）
- 名古屋大学工学部応用物理学科を卒業，大学院理学研究科物理学専攻で博士取得．その後，東京大学学振PD，京都大学，大阪市立大学などの職歴を経て，2011年に名古屋大学情報学研究科に着任．
- 量子力学の数学的基礎，量子情報，圏論・微分幾何の物理への応用などを研究． AI の研究も．



ことのおこり：EPRパラドクス

Einstein, Podolsky, Rosen, Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? 1935



A. Einstein



B. Podolsky



N. Rosen

EPRパラドクス

- **実在の要素（element of reality）の十分条件**：系を乱すことなく，ある物理量を測定するときの結果を100パーセント確実に予測できるなら，測定する物理量に対応する「実在の要素」があると言ってよい。（主観者が手を加えて作った結果じゃないのだから客観的実在だろう）
- **物理理論の完全性（complete）の必要条件**：完全な物理理論は，すべての実在の要素をもれなく記述していなくてはならない。
- ある思考実験で実在の要素と認められるものを，量子力学は記述できていないことを指摘し，だから量子力学は不完全だ，と論じた。

EPRの思考実験と論法

- 2つの粒子の位置と運動量： X_1, P_1, X_2, P_2
- エンタングル状態（相対座標の固有状態かつ全運動量の固有状態）

$$|\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle \otimes |x+a\rangle dx = \int_{-\infty}^{\infty} |p\rangle \otimes |-p\rangle dp$$

- X_1 の測定値が x_1 ならば、 X_2 の測定値は確実に $x_2 = x_1 + a$
- P_1 の測定値が p_1 ならば、 P_2 の測定値は確実に $p_2 = -p_1$
- 2番の粒子に触れることなく1番の粒子の測定値から確実に X_2 と P_2 の測定結果を予測できるので、 X_2 と P_2 は実在！
- しかし量子力学では X_2 と P_2 は不確定性関係にある。
- だから量子力学は不完全だ！

ボーアの反論

Bohr, Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? 1935



ボーアの反論の骨子

EPRは

$X_1 = x_1$ ならば, 確かに $X_2 = x_1 + a$

$P_1 = p_1$ ならば, 確かに $P_2 = -p_1$

と言っているが, $x_2 - x_1 = a$ という関係を保ちながら X_1 を測るという状況設定が $p_1 + p_2 = 0$ という関係を保つことを不可能にしている. この意味で, 粒子 1 に対する測定条件が粒子 2 を乱している!

現代風に言うと, $\{X_2 - X_1, X_1, X_2\}$ は同時実在可能な文脈を構成している. $\{P_1 + P_2, P_1, P_2\}$ も $\{X_2 - X_1, P_1 + P_2\}$ も同時実在可能だが, $\{X_2 - X_1, X_1, X_2, P_1 + P_2, P_1, P_2\}$ は同時実在不可能 (文脈依存した実在) .

フォンノイマンのNo-Go theorem

von Neumann 「量子力学の数学的基礎」 （ドイツ語版 1932）

IV.2節 定理「量子力学の結果を隠れたパラメータで再現することはできない」



フォンノイマンの論の骨子

隠れた変数 (hidden variables) $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$

隠れた変数理論：物理量は隠れた変数の関数である： $A(\lambda)$.

隠れた変数の値さえ確定すればすべての物理量の値も確定.

隠れた変数が確率分布 $\rho(\lambda)$ を持つ， とする考え方.

フォンノイマンは，物理量演算子に対する期待値汎関数は密度行列で書かれることを示し，一様（純粋）状態は凸分解不可能な密度行列であると定義し，凸分解不可能な密度行列はランク 1 であることを示し，ランク 1 の密度行列は必ずしも任意の物理量演算子の固有ベクトル射影演算子にはなっていないので，物理量の値が確定していない．よって，任意の量子状態を物理値確定状態の確率混合で表すことはできない．

グレーテ・ヘルマンによる批判

Grete Hermann (1935) ゲッティンゲン大学で数学とカント哲学を研究。ネーターの学生だった。フォンノイマンの定理を批判。



ベルによる批判

Bell, On the problem of hidden variables in quantum mechanics,
1966

非可換な物理量に対して期待値の加法性は成り立つ

$$\langle A + B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$$

が，固有値の加法性は成り立たない：

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ の固有値は ± 1 だが， $c_x \sigma_x + c_y \sigma_y + c_z \sigma_z$ の固有値

は $(\pm c_x \pm c_y \pm c_z)$ ではなく， $\pm \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$

量子力学の物理量を純粋状態上の関数で表すという仮定は強すぎる， というか， それでは量子力学にならない。

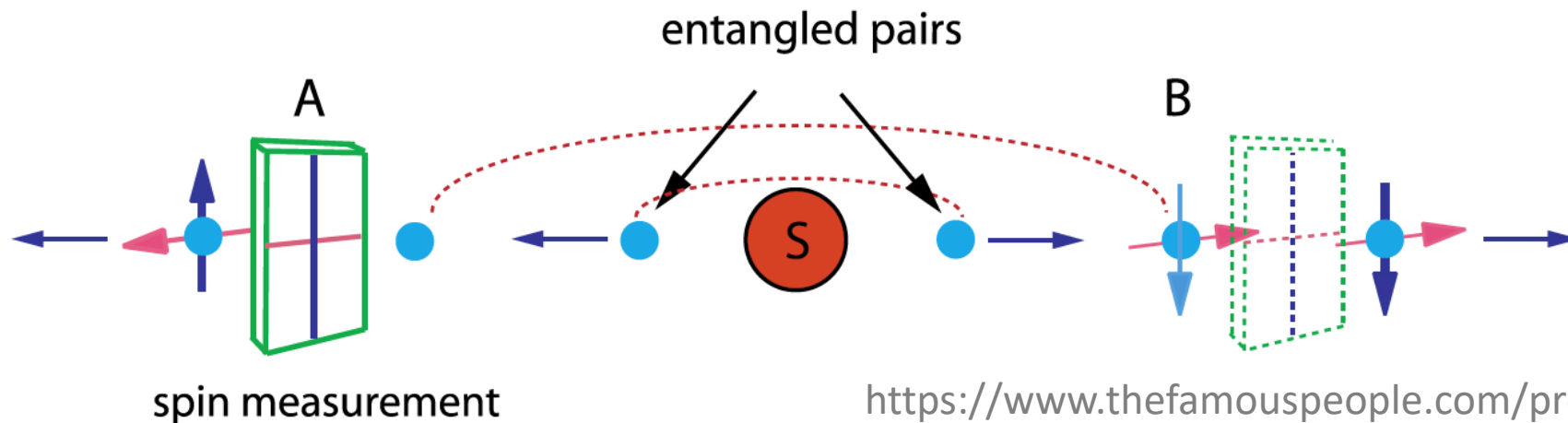
ボームのアイデア

D. Bohm, Quantum Theory, 1951

位置と運動量ではなくスピンの
EPRの問題を再考.

スピン・シングレット状態 (規格化可能)

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle)$$



<https://www.thefamouspeople.com/profiles/david-bohm-6313.php>

<https://www.nobelprize.org/uploads/2023/10/advanced-physicsprize2022-4.pdf>

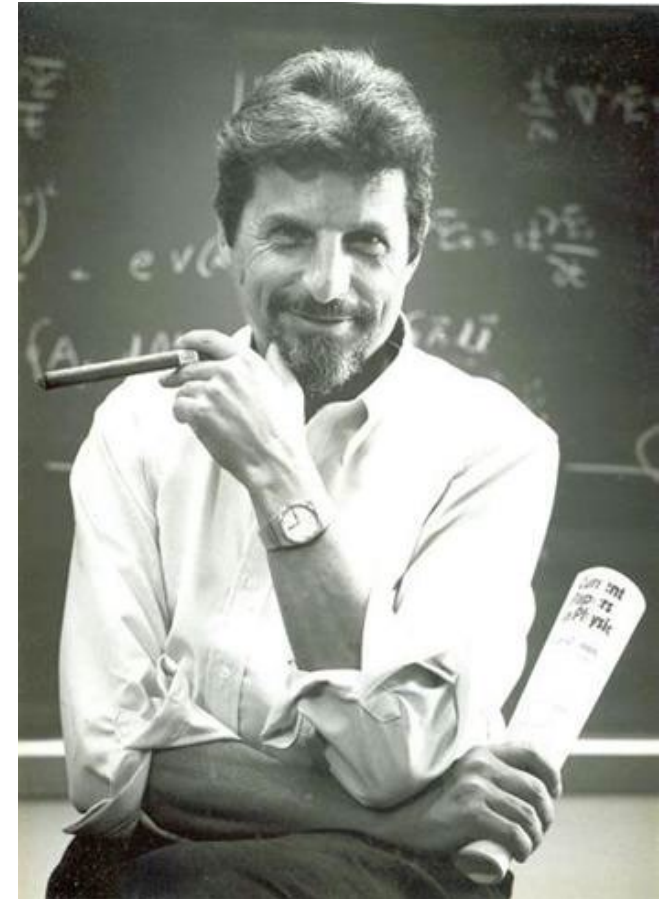
ボームとアハラノフ

D. Bohm and Y. Aharonov; Discussion of experimental proof for the paradox of **Einstein, Rosen, and Podolsky**, 1957

(なぜか EPR が ERP に)

スピンの相関量の不等式を書いている。

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle)$$



ベルの不等式，登場！

Bell, On the Einstein Podolsky Rosen paradox, 1964

$$|\langle A_1 B_2 \rangle - \langle A_1 C_2 \rangle| \leq 1 + \langle B_1 C_2 \rangle$$

添字 1 が付いているのは粒子 1 の物理量，添字 2 が付いているのは粒子 2 の物理量． A, B, C の区別は単位ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の方向のスピン成分：

$$A = \vec{a} \cdot \vec{\sigma}, \quad B = \vec{b} \cdot \vec{\sigma}, \quad C = \vec{c} \cdot \vec{\sigma}$$

局所实在論と完全逆相関を仮定して証明される．

本当はフォンノイマン定理を批判した論文の方を先に投稿して，その後で不等式の論文を投稿したのだが，掲載順序が逆転してしまった．

ベルの不等式の証明

スピンの測定値はどれも ± 1 .

粒子 1 と粒子 2 の同じ向きのスピン成分は完全逆相関：

$$A_2 = -A_1, \quad B_2 = -B_1, \quad C_2 = -C_1$$

そうすると,

$$\begin{aligned} A_1 B_2 - A_1 C_2 &= -A_1 B_1 + A_1 C_1 \quad (\because \text{逆相関}) \\ &= -A_1 B_1 + A_1 B_1 B_1 C_1 \quad (\because BB = 1) \\ &= -A_1 B_1 (1 - B_1 C_1) \\ &= -A_1 B_1 (1 + B_1 C_2) \quad (\because \text{逆相関}) \end{aligned}$$

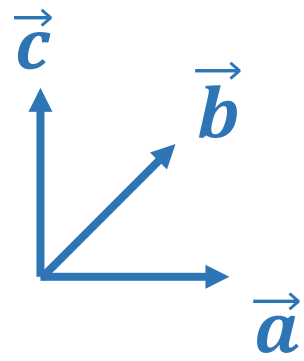
$$|\langle A_1 B_2 \rangle - \langle A_1 C_2 \rangle| = |\langle A_1 B_1 (1 + B_1 C_2) \rangle| \leq 1 + \langle B_1 C_2 \rangle$$

量子力学ではベルの不等式は破れる

スピン・シングレット状態では,

$$\langle A_1 B_2 \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b} = -\cos \theta_{ab}$$

測定軸をこう選ぶと,


$$\langle A_1 B_2 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle A_1 C_2 \rangle = 0, \quad \langle B_1 C_2 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\langle A_1 B_2 \rangle - \langle A_1 C_2 \rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7$$

$$1 + \langle B_1 C_2 \rangle = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.3$$

ベルの不等式 ($|\langle A_1 B_2 \rangle - \langle A_1 C_2 \rangle| \leq 1 + \langle B_1 C_2 \rangle$) は不成立.

ベルの議論の長所と短所

長所：EPRの元の議論にかなり忠実。エンタグル状態を使って、粒子1に対する測定だけで、粒子2の状態を乱すことなく粒子2のスピン測定値を確実に予測できる（完全逆相関）という状況になっている。測定していない物理量にも ± 1 の値が実在しているという仮定から導かれる。

短所：スピン・シングレット状態が大前提。任意の状態では不等式成立の保証がない。実験で不等式の破れが観測されたとしても「シングレット状態の生成に失敗しただけだろ」と言われたらおしまい。

CHSH, 登場

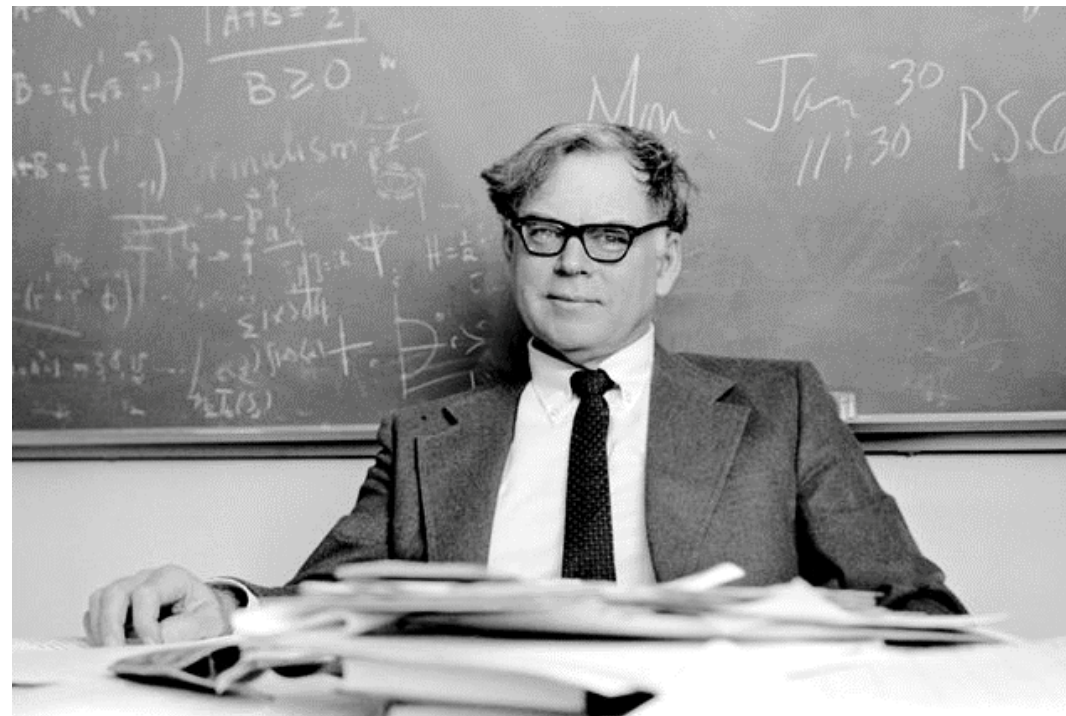
John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony, Richard Holt

シモニーはカルナップのもとで哲学の博士学位を取ったあと、ワイトマン、ウィグナーのもとで物理学の学位を取ろうとしていた。1969年論文発表時、シモニーは就職、他3人は大学院生



John Clauser

https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/clauser/photo-gallery/?gallery_style=page



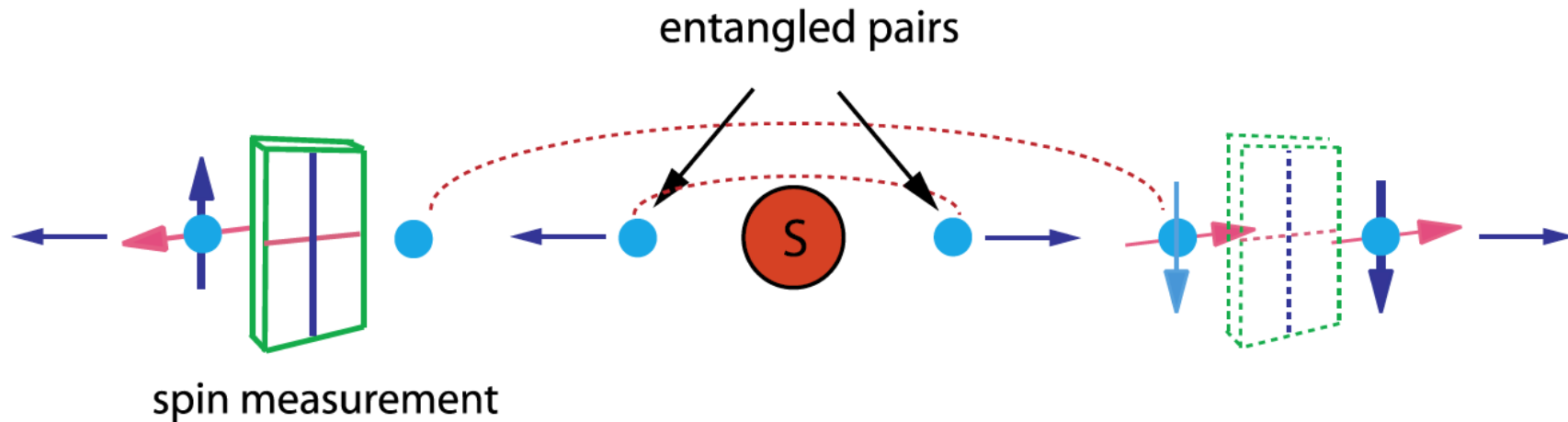
Abner Shimony

<https://www.bu.edu/cphs/about/abner-shimony/>

CHSHの不等式

Clauser, Horne, Shimony, Holt; Proposed experiment to test local hidden-variable theories, 1969

$$-2 \leq \langle AU \rangle + \langle AV \rangle + \langle BU \rangle - \langle BV \rangle \leq 2$$



A または B を測る

$$A = \vec{a} \cdot \vec{\sigma}, \quad B = \vec{b} \cdot \vec{\sigma}$$

U または V を測る

$$U = \vec{u} \cdot \vec{\sigma}, \quad V = \vec{v} \cdot \vec{\sigma}$$

CHSH不等式の証明

$$S := AU + AV + BU - BV = A(U + V) + B(U - V)$$

A, B, U, V の値はどれも ± 1 .

$$U + V = +2, \quad 0, \quad 0, \quad -2$$

$$U - V = \quad 0, \quad +2, -2, \quad 0$$

どの場合でも S の値は ± 2 のいずれか.

ゆえに S の期待値は $-2 \leq \langle S \rangle \leq +2$ (証明終了)

証明の仮定： A, B, U, V の ± 1 の値の出現に関する非負結合確率が存在することを仮定した.

量子力学の場合

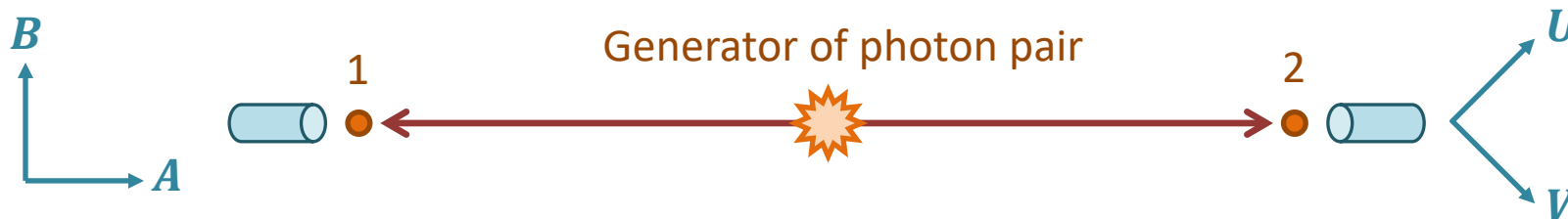
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle)$$

$$A = \sigma_x \otimes 1, \quad B = \sigma_y \otimes 1,$$

$$U = 1 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_y), \quad V = 1 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x - \sigma_y)$$

のとき, maximal violation:

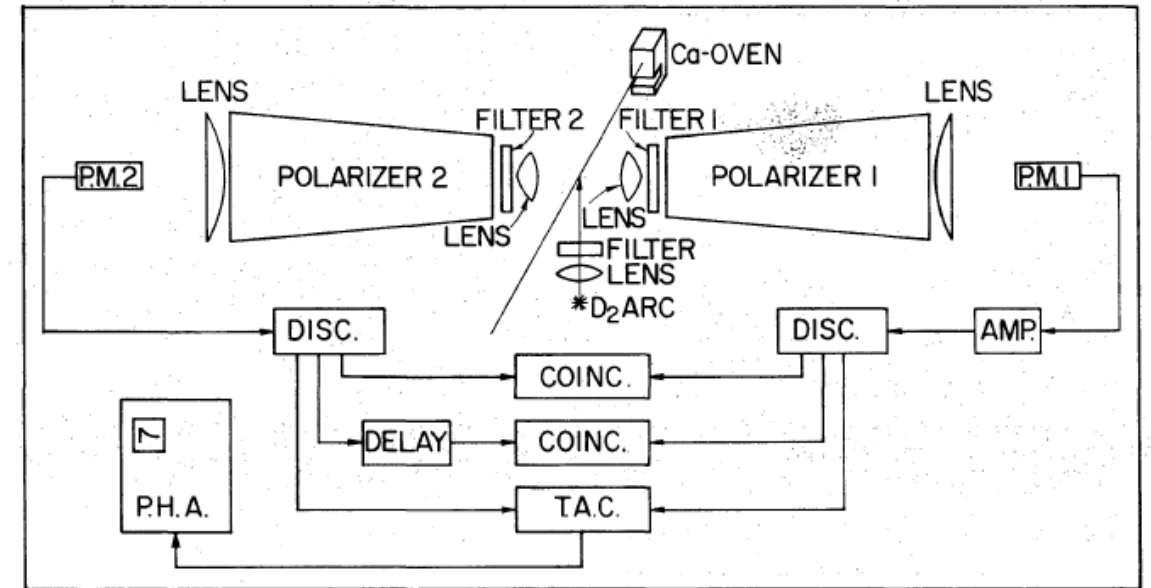
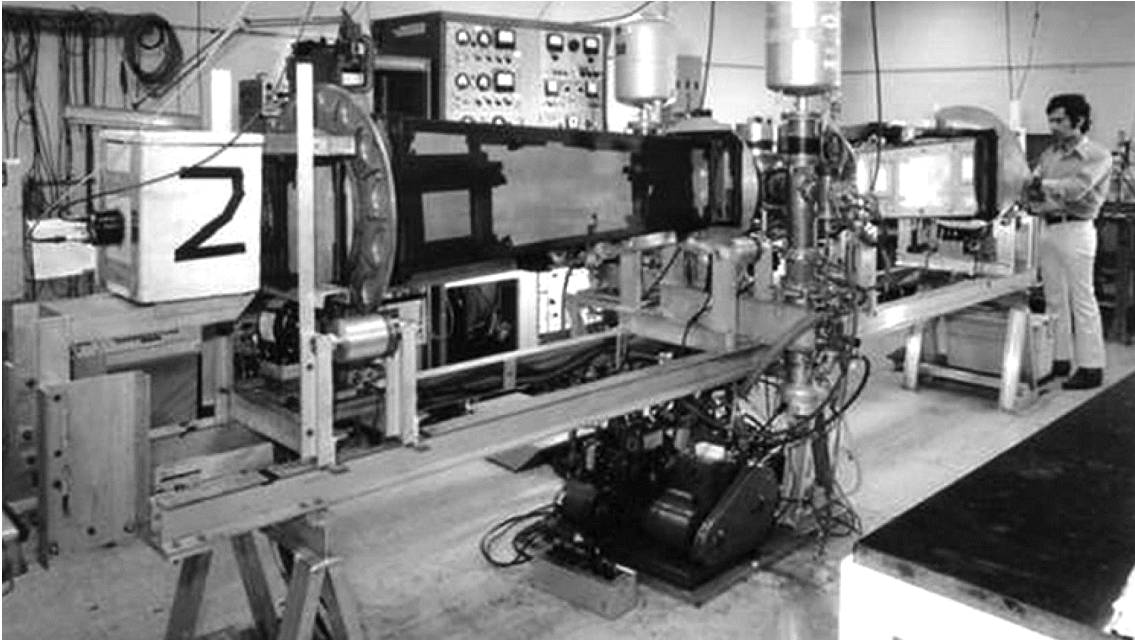
$$\langle S \rangle = -2\sqrt{2}$$



フリードマンとクラウザーの実験

Freedman (大学院生) and Clauser (ポスドク) ; Experimental test of local hidden-variable theories, 1972

Stuart Freedman



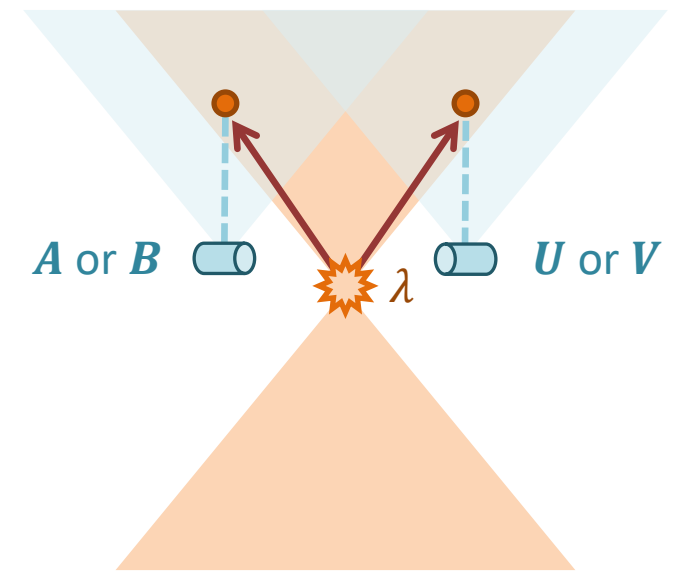
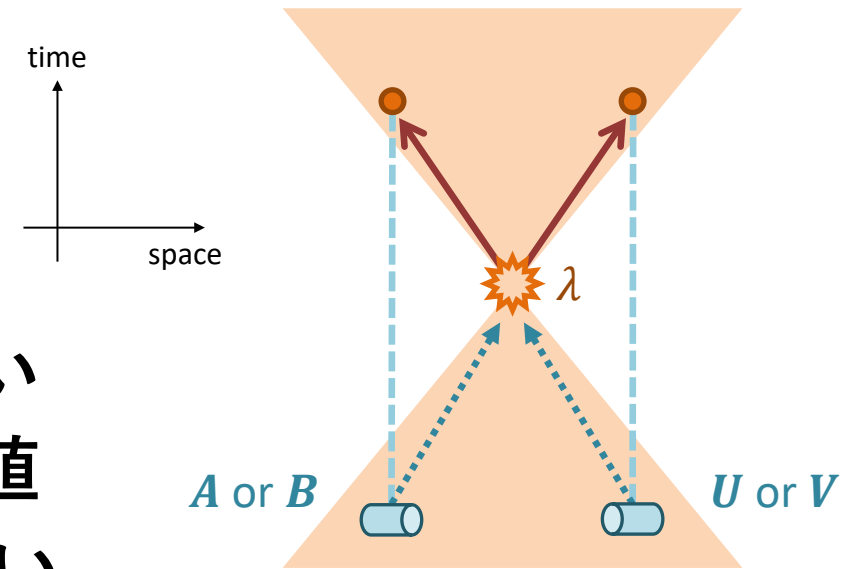
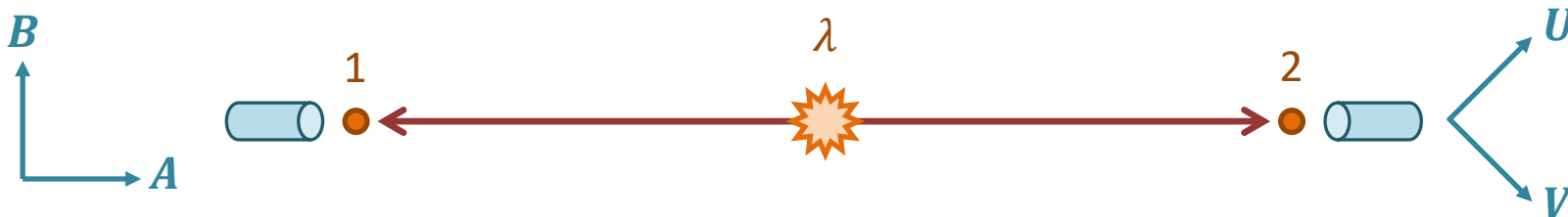
CHSH不等式を少しmodifyした不等式の破れを確認。
しかし、「局所性の抜け穴」があった。

抜け穴 1

- 局所性の抜け穴：Locality loophole
(communication loophole)

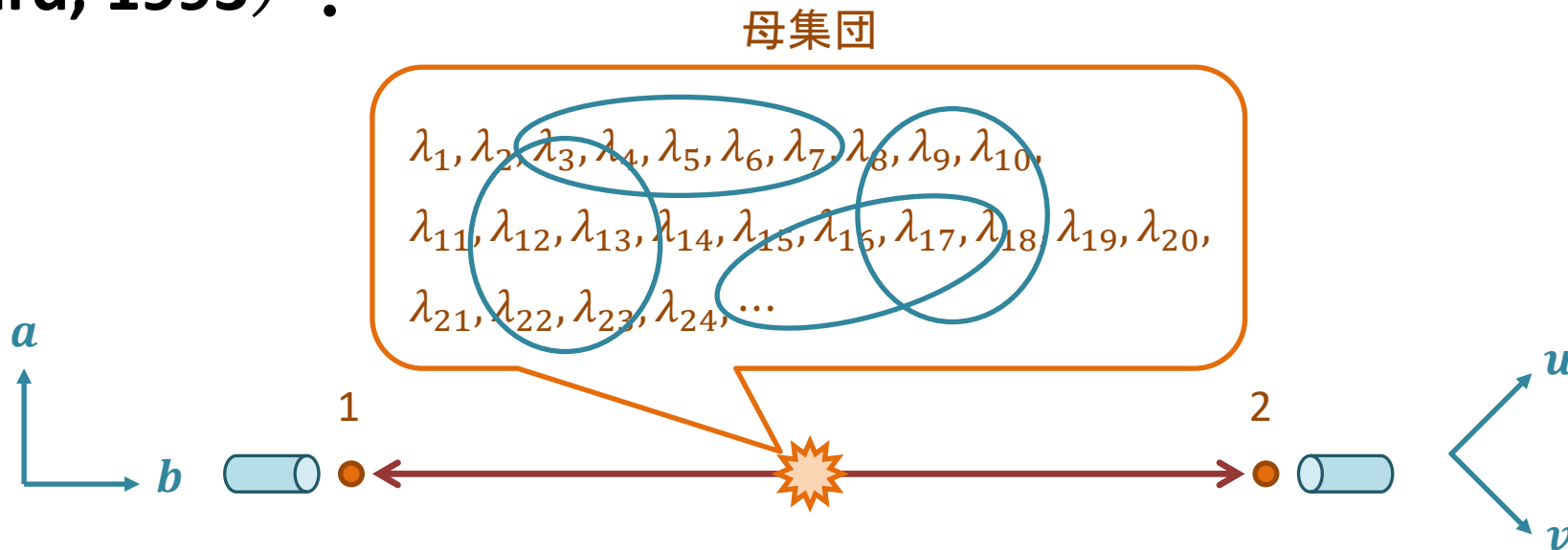
光子対が発生する前に測定器の設定されていたなら，それに応じて光子の隠れた変数の値が変動し，CHSH不等式が破れたかもしれない。

この抜け穴をふさぐためには，光子対の発生点の因果的光錐の外で測定器の設定を決めなくてはならない．測定点同士もspace-likeに離さなくてはならない．



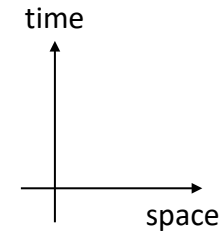
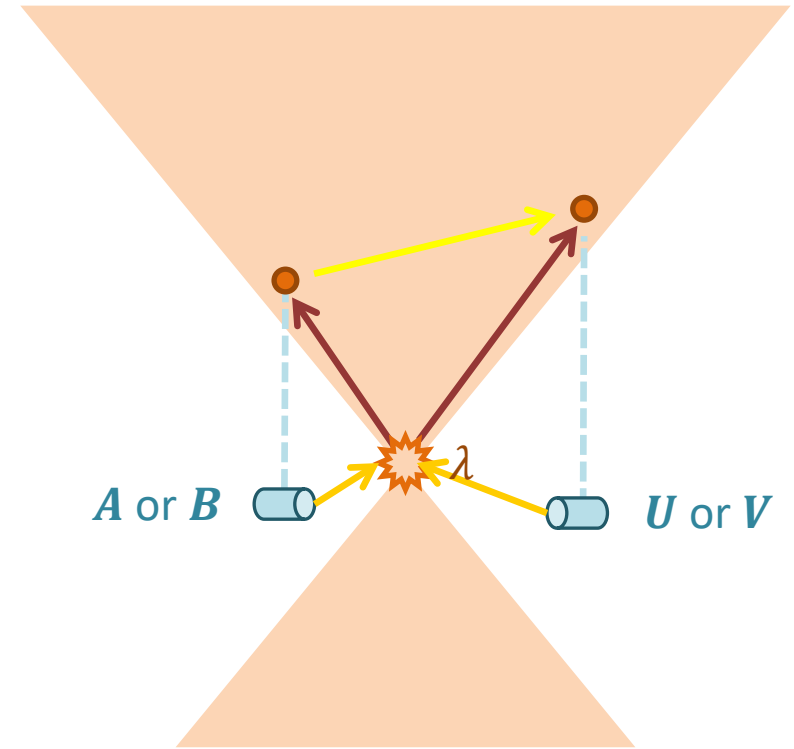
抜け穴 2

- 検出の偏りの抜け穴： **Detector loophole (fair-sampling loophole)**
現実の測定器はすべての光子を検出できるわけではない。母集団ではCHSH不等式が成り立っているのに、偏った標本を見ているせいでCHSH不等式が破れているように見えたのかもしれない。
- CHSH不等式の忠実な検証のためには 82.8%以上の検出確率が必要 (Eberhard, 1993) 。



抜け穴 3

- 超光速の抜け穴： **superluminous loophole**
測定器同士，あるいは測定器と光子対発生装置の間で「超光速の連絡通路」があって，光子の隠れた変数の値が変動し，CHSH不等式が破れたかもしれない。
- 「超光速の後出しじゃんけん」をやっているなら，何でもあり．超光速の連絡はないと信じる．



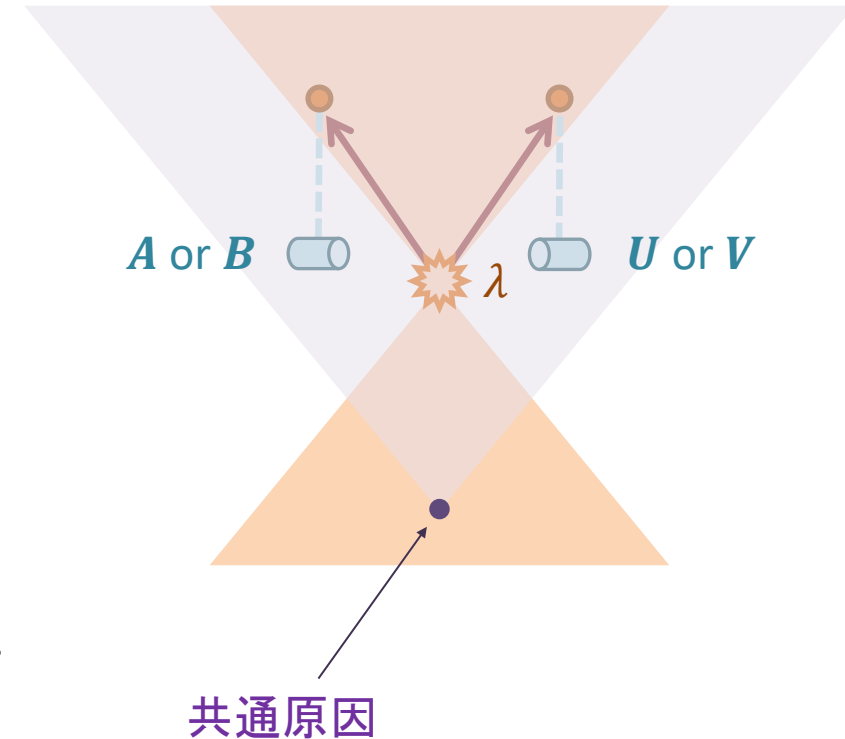
抜け穴 4

- 自由意思の抜け穴：Freedom-of-choice loophole

二つの測定器の設定の選択と隠れた変数状態の生成が相関を持っているかもしれない。

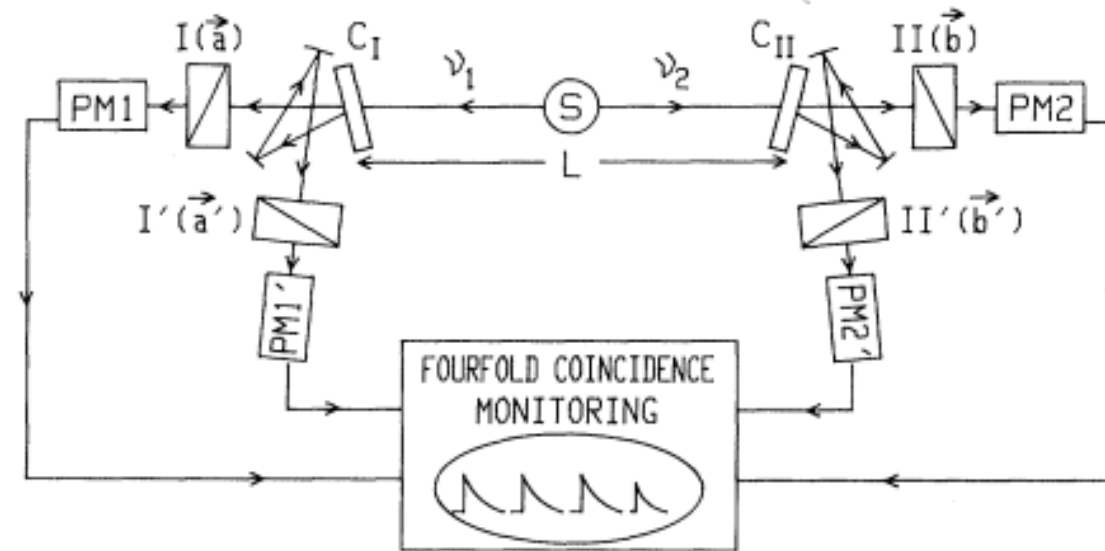
（全宇宙規模の陰謀説！）

- この抜け穴（というよりも、いちゃもん）をふさぐことは原理的に不可能（悪魔の証明）。できるだけ二つの測定器の連絡を絶って、光子対と測定器の状態準備に関わる共通原因とおぼしき事象をなくし、二つの測定器を独立に制御する方法を用意する。



アスペたちの実験

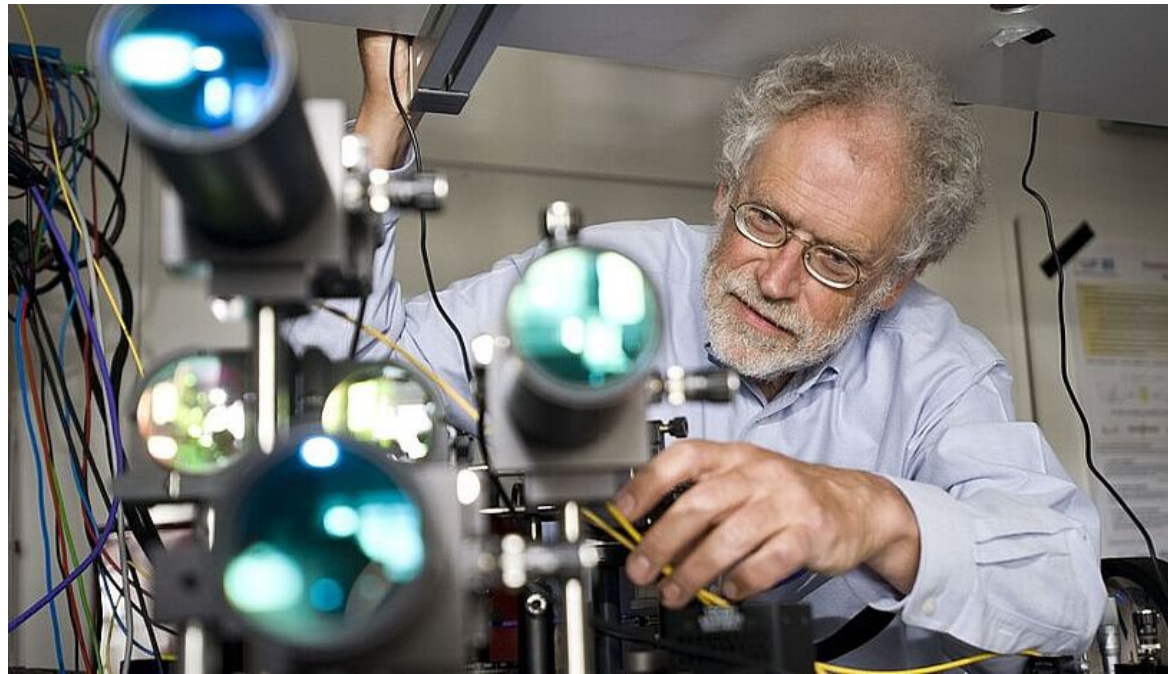
A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger; Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers, 1982



2つの測定器間の距離は40ナノ光秒。測定軸の切り替えは10ナノ秒。
 $\langle S \rangle = 2.4$ で、CHSH不等式の破れを確認。
しかし、切り替えは「周期的」だった。

ツァイリンガーたちの実験

G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter and A. Zeilinger;
Violation of Bell's inequality under strict Einstein locality
conditions, 1988



2つの測定器のそばに乱数発生器を置いて、光子が飛んでいる間に測定軸の切り替えを行った。 $\langle S \rangle = 2.73$

その後の「ダメ押し」実験

- オランダ・デルフト大学 R. Hansonら：

Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres

Nature, Received 19 August; accepted 28 September 2015; Published online 21 October 2015

- ウィーン・ホーフブルク宮殿 A. Zeilingerら：

Significant-Loophole-Free Test of Bell's Theorem with Entangled Photons

Phys Rev Lett, Received 10 November 2015; published 16 December 2015

- アメリカ国立標準技術研究所 K. Shalmら：

Strong Loophole-Free Test of Local Realism

Phys Rev Lett, Received 10 November 2015; published 16 December 2015

2022年のノーベル物理学賞

量子もつれ光子を用いたベルの不等式の破れの検証実験と量子情報科学の先駆的実験

For experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science

アラン・アスペ（仏），ジョン・クラウザー（米），アントン・ツァイリンガー（オーストリア）



<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/summary/>

CHSH不等式の破れの解釈

量子力学から言えること：

A と B ， U と V は非可換。 同時固有状態が存在しない。

$$S = AU + AV + BU - BV$$

A と U を測っているときは B, V の値が実在していると思っ
てはいけない。 また， A と U を測って得られた A の値と， もし仮
に A と V を測ったとしたら得られたであろう A の値とが等しい
ことを量子力学は保証しない。 にもかかわらず， A, B, U, V
全部が ± 1 の値を持っていると仮定して $S = \pm 2$ と推論したこ
とが誤り。 ただし， A と U, A と V, B と U, B と V は可換であるこ
とは相対論的因果律を尊重している。

アインシュタインの信念

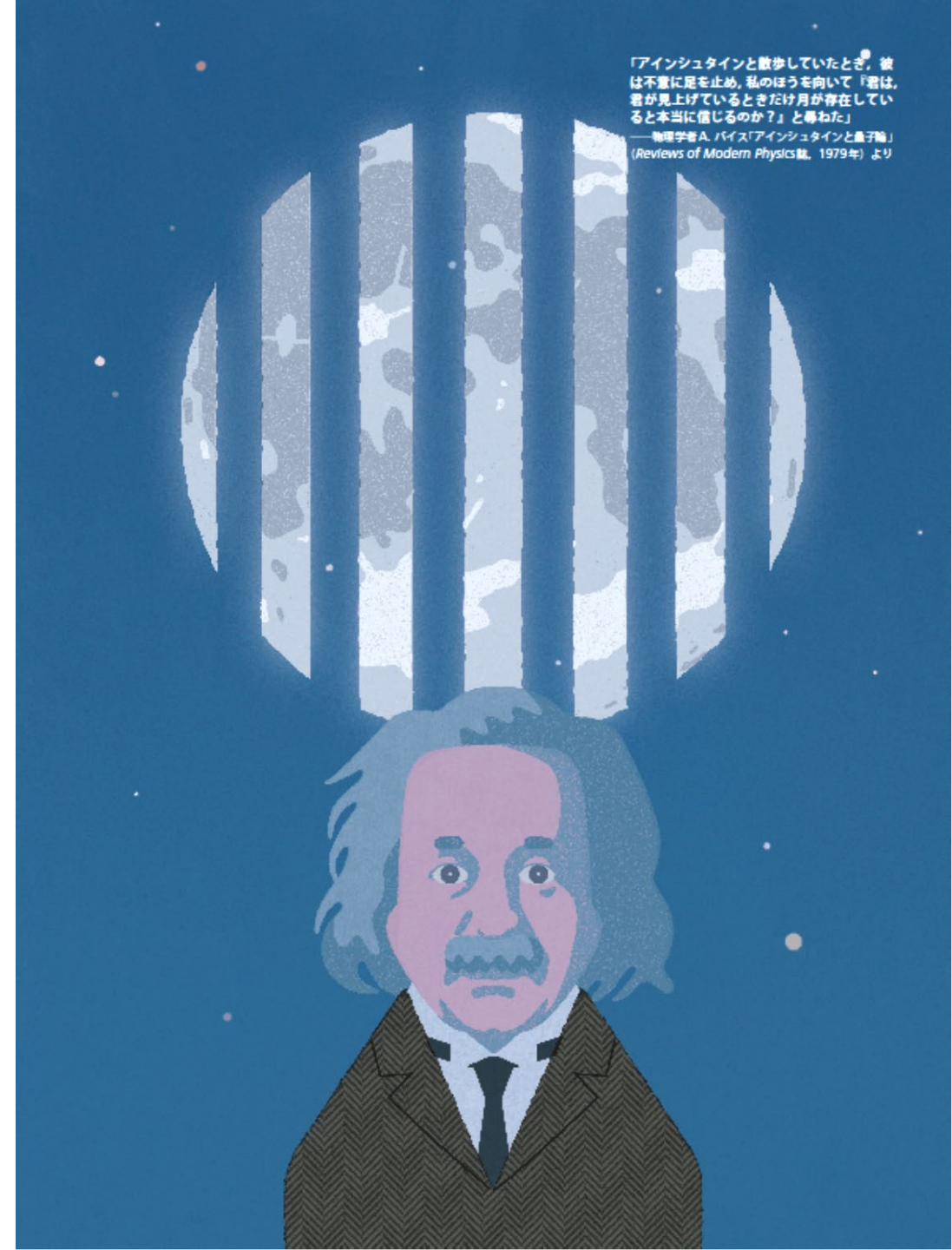
「空を見上げたときにだけ月
はあると君は信ずるのか？」

Do you really believe that the
moon exists only when you look
at it ?

(アインシュタインがパイスと散歩し
ているときに言った言葉)

量子もつれ実証アインシュタインの夢 ついえるー
測っていない値は実在しない. 日経サイエンス2019年2月号

「アインシュタインと散歩していたとき、彼は不意に足を止め、私のほうを向いて『君は、君が見上げているときだけ月が存在していると本当に信じるのか？』と尋ねた」
——物理学者A. パイス「アインシュタインと量子論」
(Reviews of Modern Physics誌, 1979年) より



まとめ

- アインシュタイン：客観的実在＝観測していないときも観測したときと同じように（物理量の値は）実在しているという信念.
- ベル（CHSH）の不等式：超光速の影響は存在しないと仮定し，測定していない物理量の値も（正の確率で）実在していると仮定すると，成立すべき不等式.
- 量子力学はベルの不等式の破れを预言する．破れぐあいも预言するし，破れる理由も説明する．
- 実験ではベルの不等式の破れが確認され，量子力学の予測と一致することが確認された．

ちなみに

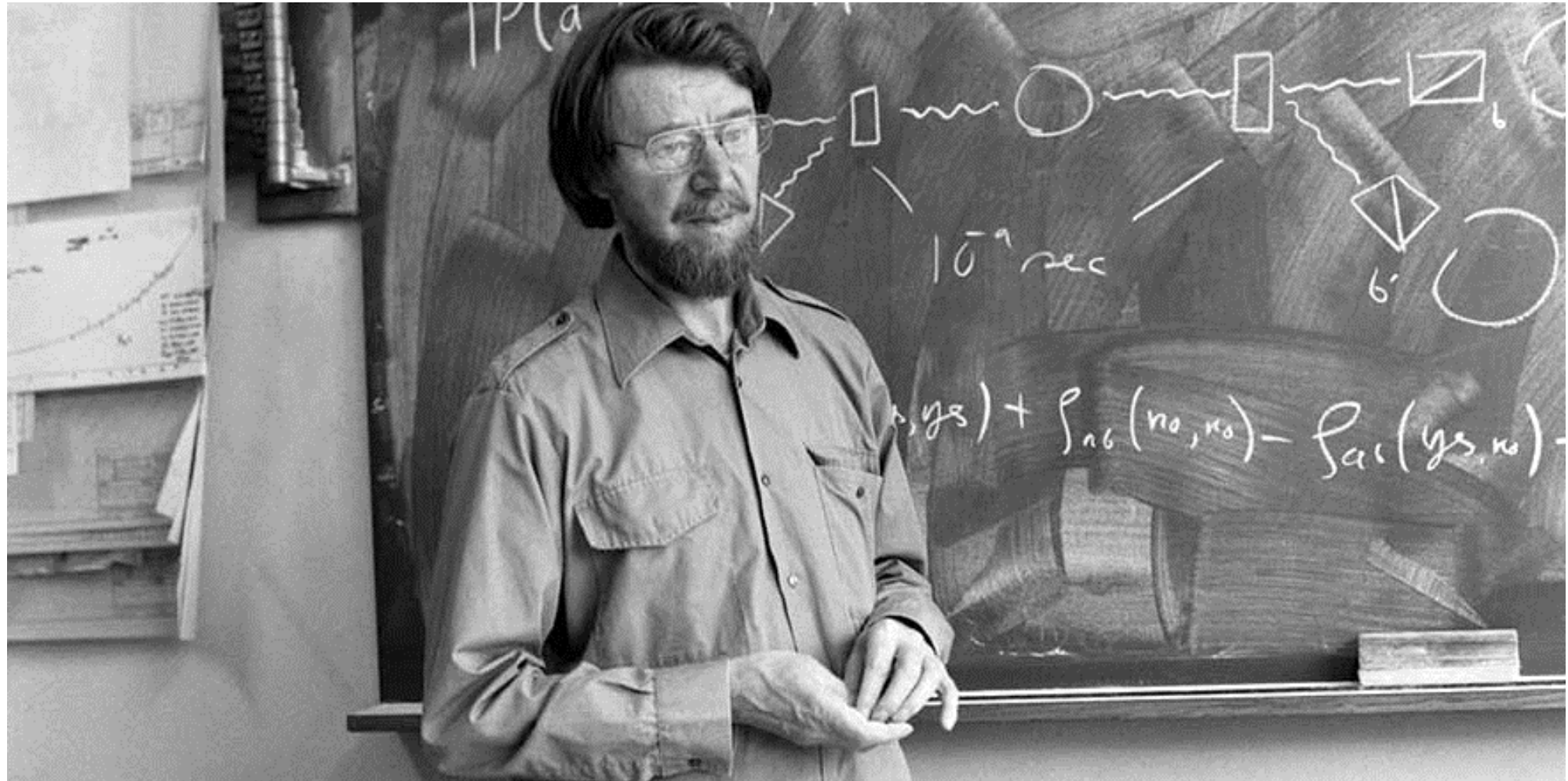
- ベル自身は、CHSH不等式の破れは、実在性の破れではなく、局所性の破れに起因していると考えていたらしい。
- つまり、ベルはアインシュタインに対してシンパシー。

今回、触れなかった話題

- Kochen-Speckerの定理
- Conway-Kochenの自由意思定理
- Merminの魔法陣
- Merminの装置
- GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger) 状態
- Leggett-Garg不等式
- Fineの定理
- 弱値解釈

ジョン・スチュアート・ベル (1928-1990)

CERNにて、加速器設計の仕事のかたわら、量子力学・場の量子論も研究



ベルの経歴

- 北アイルランドのベルファストで労働者階級の家にもまれた。4人兄弟の中で高校に行ったのはジョンだけ。高校を卒業してクィーンズ大学ベルファスト校の物理学科の実験助手になり、才能が認められ、大学に入学・卒業した。
- イギリスの原子力研究所に就職。在職中パイエルスのもとで博士号取得。CPT定理を証明したが、パウリとリューダースが一足先に証明していた。
- CERNの加速器設計部門に転職。サバティカル休暇中に、いわゆるベルの不等式を発見。
- ジャッキーフとの共同研究で場の量子論のカイラル・アノマリーを発見。
- ランダウ・リフシッツの本を英訳（力学、量子力学、物質中の電磁場、量子電磁力学の巻）。
- J.J.サクライのModern Quantum Mechanicsの遺稿収集に協力。ベルの不等式についての解説の部分をベルが補足。1964年のオリジナルのベルの不等式をちょっと書き換えたものが書かれている。
- CERN在職中に亡くなった。

ベルの2つの論文

- ベルはCERNの所員としてサバティカル休暇でSLACに滞在しているときに2つ論文を書いた。
- 1つ目はフォンノイマンの「隠れた変数理論はダメ」定理を批判的に分析した論文。Reviews of Modern Physics に投稿。
- 2つ目がオリジナルのベルの不等式の論文。Physics-Physique-Fizika誌に投稿。物理学の総合誌とすることを目指してアンダーソンとマティアスが1964年に創刊した学術誌。
- 結果的には、投稿順とは逆順に掲載された。
- SLACに客員として訪問滞在中だったベルは無料で投稿できるから Physics-Physique-Fizikaに投稿したらしい（じつは著者に掲載料が支払われる）。
- Physics-Physique-Fizika誌は 1968年に予告なしに廃刊になった。
- 今ではAPSが電子化して公開しているが、長年、図書館蔵の紙冊子でしか読めなかった。

参考文献

- [2022年ノーベル物理学賞解説（Scientific Background）](#)
- [アダム・ベッカー「実在とは何か：量子力学に残された究極の問い」筑摩書房](#)
- [谷村「量子の地平線：揺らぐ境界－非実在が動かす実在」日経サイエンス2013年7月号（ウェブ付録あり）](#)
- [谷村「アインシュタインの夢 ついえる：測っていない値は実在しない」日経サイエンス2019年2月号（ウェブ付録あり）](#)
- [T. Isobe and S. Tanimura; A method for systematic construction of Bell-like inequalities and a proposal of a new type of test, Progress of Theoretical Physics, 2010](#)
- 野神亮介, 李宰河「量子論と局所実在論の Fourier空間における境界の擬確率分布に基づく解析」日本物理学会 2024年9月18日 18aN304-10

あらためて、
ベルの定理 60 周年
おめでとうございます

さらに物理学の研究と理解を
掘り下げ、展開できることを
祈っています