

量子性とは何だろう

ベル・CHSHの不等式の破れから考える

谷村 省吾

名古屋大学大学院 情報学研究科

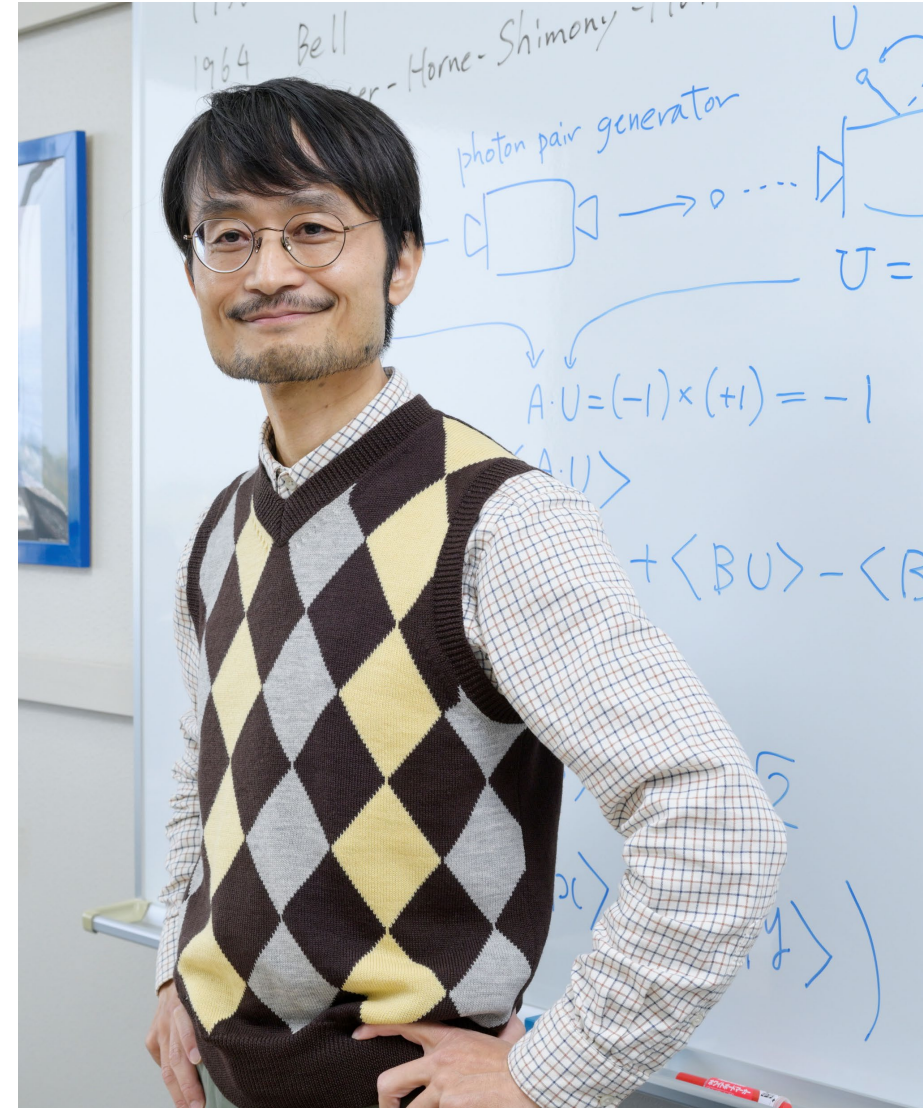
twitter @tani6s

資料を私の[ウェブサイト](#)で公開しています。「谷村省吾」で検索 または QRコード→



自己紹介：谷村省吾（たにむら・しょうご）

- 名古屋生まれ、名古屋育ち。
- 1990年 名古屋大学工学部応用物理学科卒業
- 1995年 名古屋大学大学院理学研究科物理学専攻修了、博士（理学）取得。
- 大学院はE研（素粒子論研究室）。大貫義郎氏が定年退官されるとき私はM2でした。私の修論「トムとベリー」が有名？
- 職歴：東京大学・京都大学・大阪市立大学・京都大学、2011年から名古屋大学。
- 専門：量子基礎論・量子情報理論・圏論や微分幾何の応用・AI の研究



2022年のノーベル物理学賞授賞対象

量子もつれ光子を用いた、ベルの不等式の破れの検証実験と量子情報科学の先駆的実験

for experiments with entangled photons, establishing the violation of Bell inequalities and pioneering quantum information science (<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2022/summary/>)

ジョン・クラウザー（アメリカ）

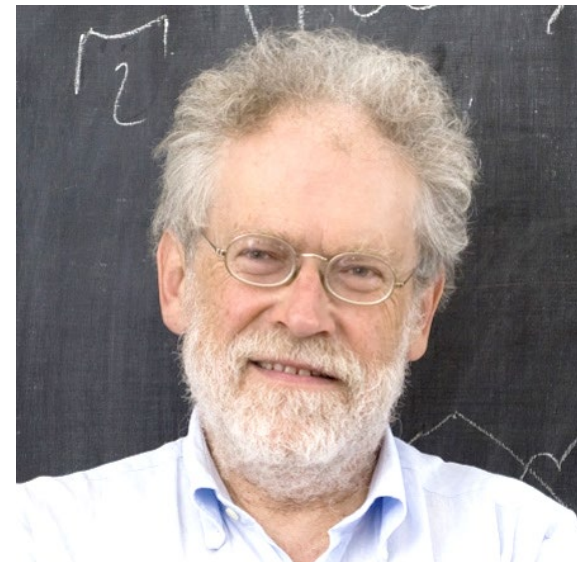
<https://www.johnclausner.com/>

アラン・アスペ（フランス）

https://en.wikipedia.org/wiki/Alain_Aspect

アントン・ツァイリンガー（オーストリア）

<https://wolffund.org.il/2018/12/11/anton-zeilinger/>





ホーム

話題を検索

通知

メッセージ

ブックマーク

リスト

プロフィール

もっと見る

ツイートする



TANIMURA Shogo
@tani6s

ツイート



名古屋大学 研究フロントライン
@Frontline758

谷村先生、ただいまアツ〜く解説していただいています



午後7:33 · 2022年10月4日 · Twitter Web App

30 件のリツイート 3 件の引用ツイート 102 件のいいね



スレッド



名古屋大学 研究フロントライン
@Frontline758

昨日のノーベル賞発表は、記者さんたちが集まるホールに杉山総長も駆けつけました。

受賞研究についてレクチャーしてくださった谷村省吾教授@tani6sと総長との豪華解説に、会場は釘付けとなりました。



午後2:18 · 2022年10月5日 · Twitter Web App

20 件のリツイート 2 件の引用ツイート 52 件のいいね

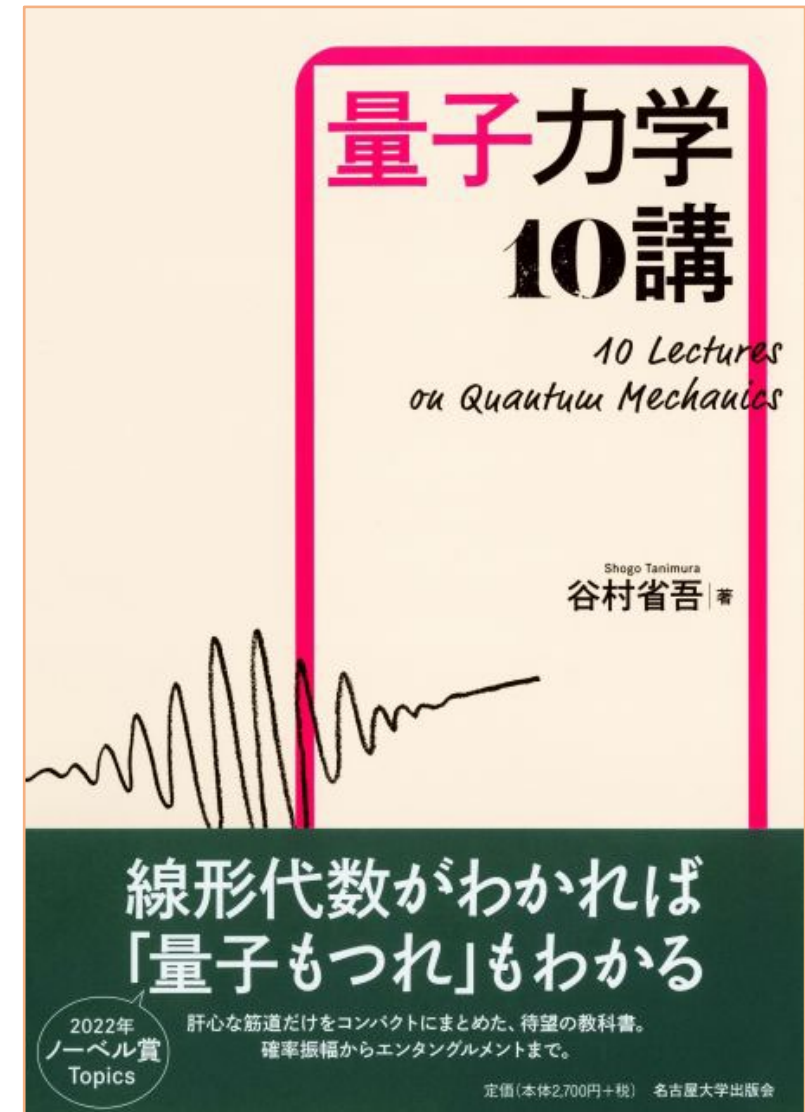
2022年10月4日、自分がノーベル賞をもらったわけでもないのに名大の記者会見会場でノーベル賞の解説をした

今日、議論したいこと

- 2022年のノーベル物理学賞の対象となった、ベル・CHSHの不等式の破れは「古典物理学的世界観が間違いであり、量子論が正しいことを実証した」と解釈されるが、どういう意味において、そうなのか。
- 量子化・量子的・量子性（quantumness）を何で特徴づけるか。

参考文献

1. 筒井泉『量子力学の反常識と素粒子の自由意志』岩波書店、2022.
2. アダム・ベッカー（吉田三知世 訳）『実在とは何か』筑摩書房、2021.
3. 谷村省吾 [『量子力学10講』](#) 名古屋大学出版会、2021.
4. 谷村省吾「アインシュタインの夢 といえる一測っていない値は実在しない」
[日経サイエンス2019年2月](#) [（電子記事を購入可能）](#) [（ウェブ補足あり）](#)

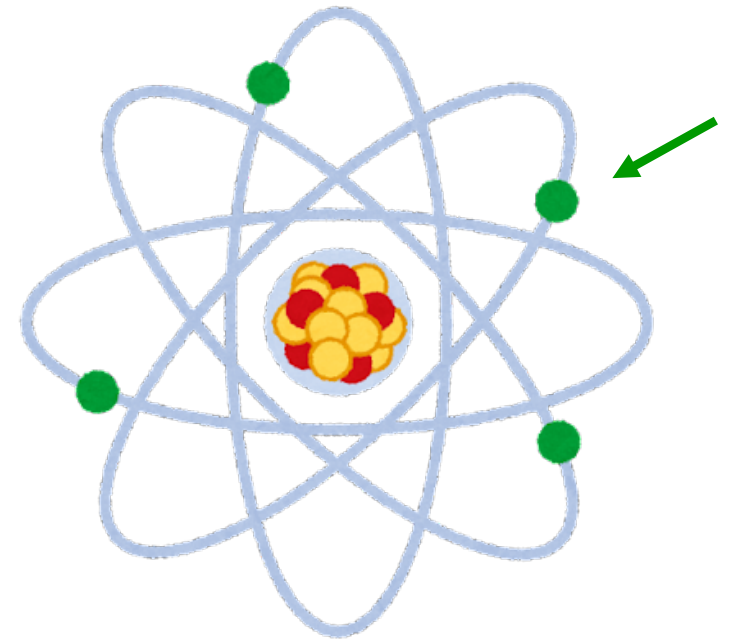


量子論のはじまり

- ボールや車などマクロ物体の運動をつかさどる物理法則は知られていた：ニュートン力学
- 原子や電子のふるまいを調べると、**原子は「たんにボールを小さくしたもの」ではない**ことがわかってきた。
- **根本的に新しい物理理論が必要だということになり、1900～1926年頃に量子論が作られた。**
- アインシュタインも量子論の初期の立役者

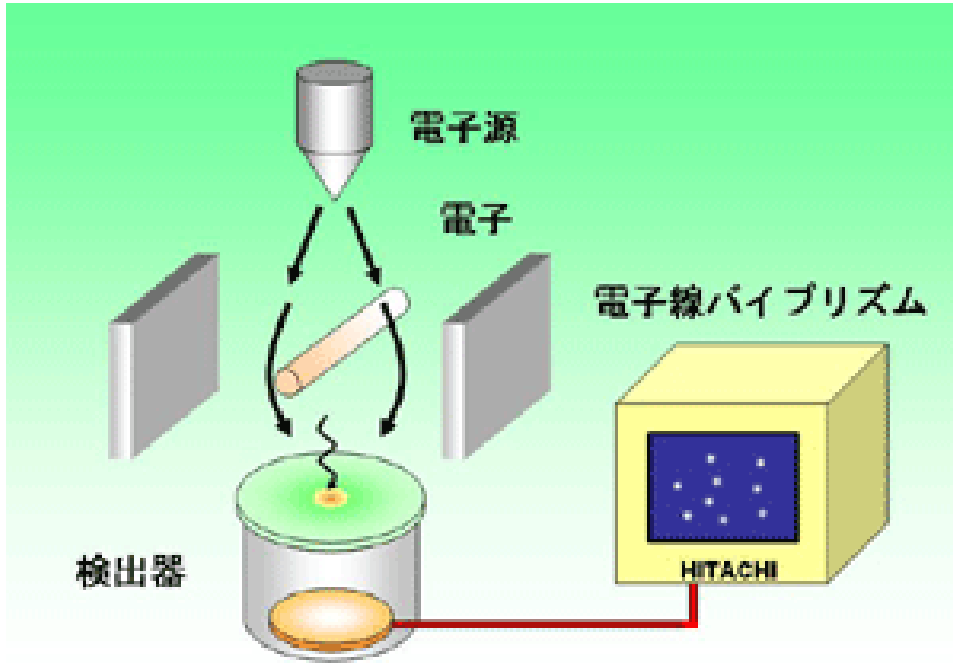
量子論らしさ

- 電子は粒子か？
- 電子は決まった質量と電荷を持っている
- 電子は1つ2つと数えられる
- 電子は割れない



電子のダブルスリット実験

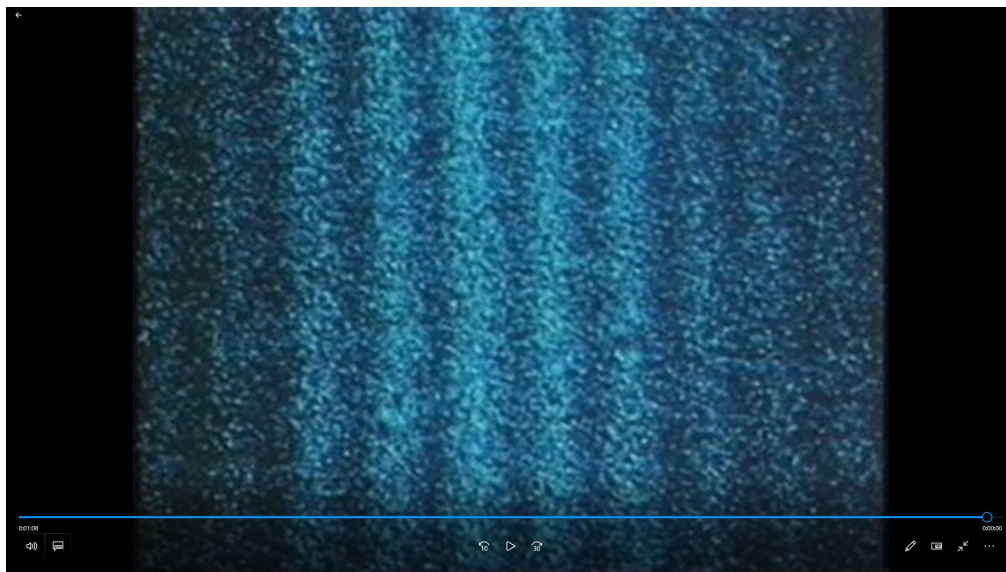
日立の電子線ホログラフィー（外村彰）



<https://www.hitachi.co.jp/rd/research/materials/quantum/doubleslit/index.html>

この実験のどこが不思議か？

- 電子はぽつりぽつりと、ほとんどランダムに当たる
- 1個2個と数えられる粒子のように見える
- しかし、累積すると、波のような濃淡のパターンが浮かび上がる



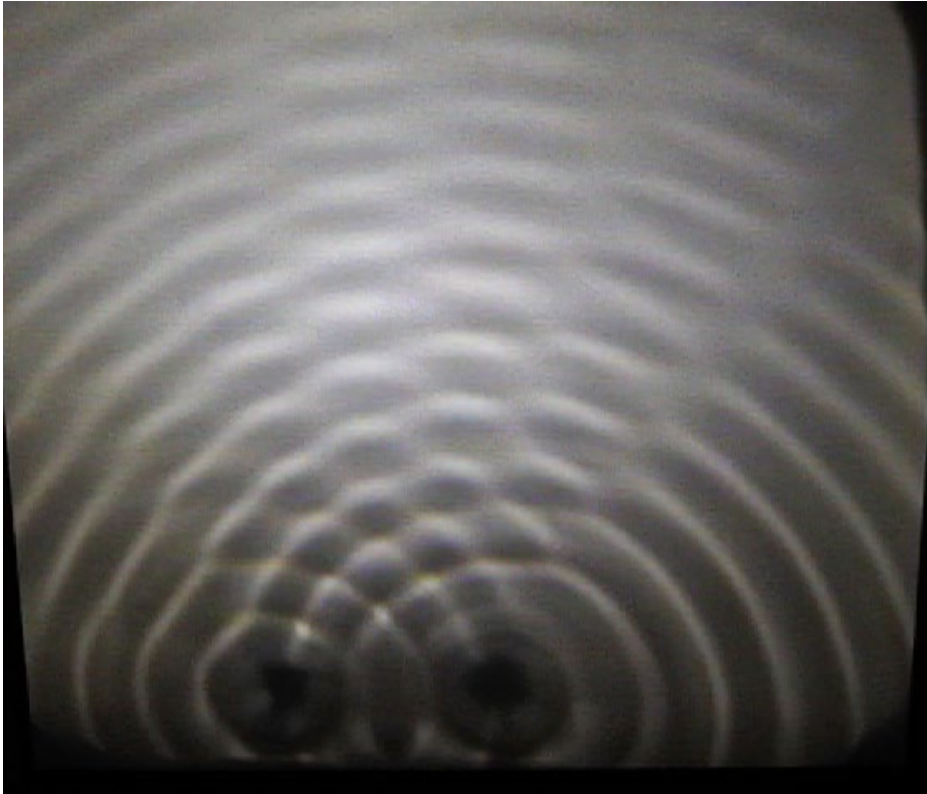
水面波の実験

<https://www.youtube.com/watch?v=luv6hY6zsd0&t=260s>

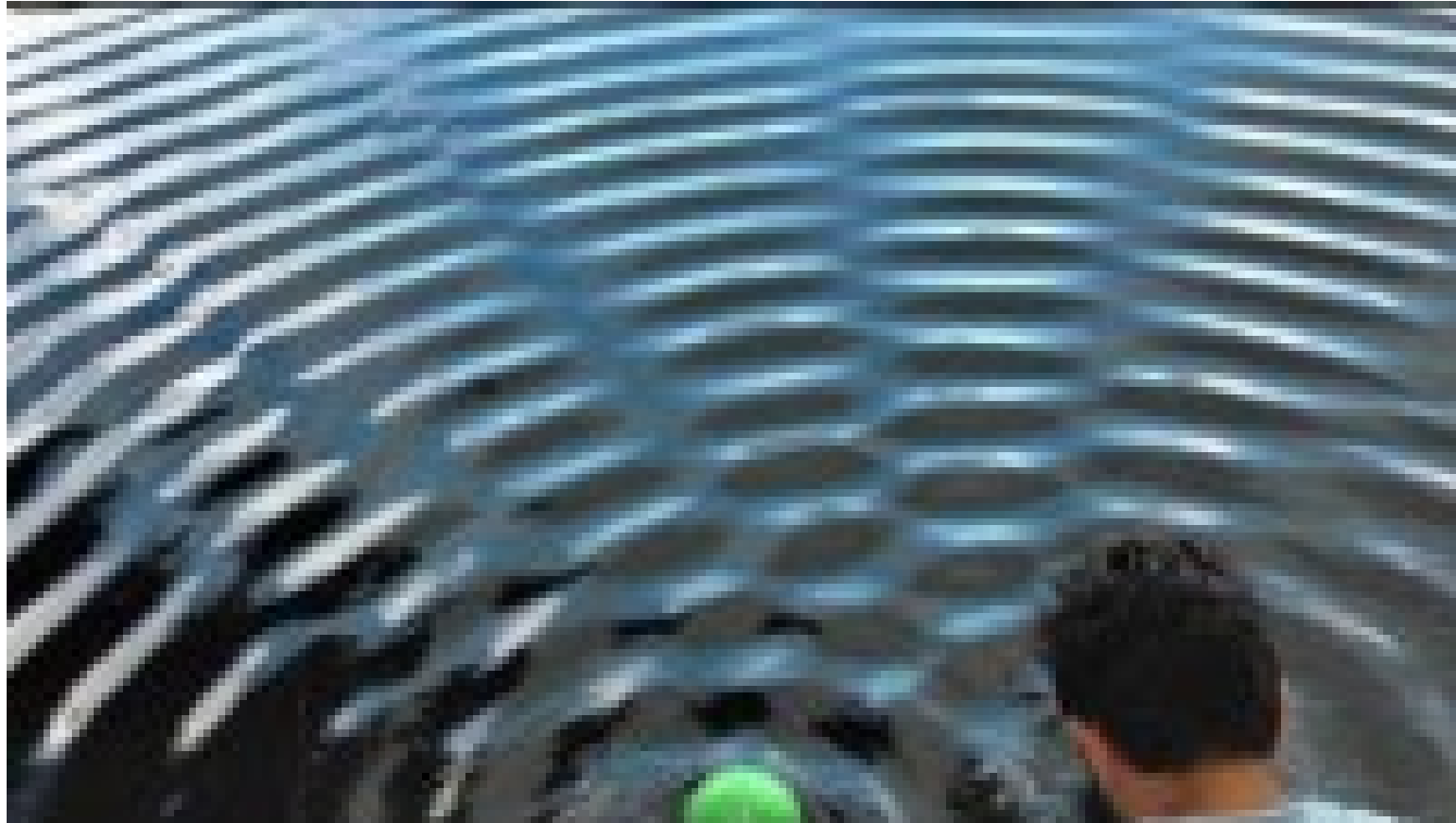


波動の干渉効果

2箇所から発生した水面波



<https://lab.mints.ne.jp/assist/4/kanshou2.htm>

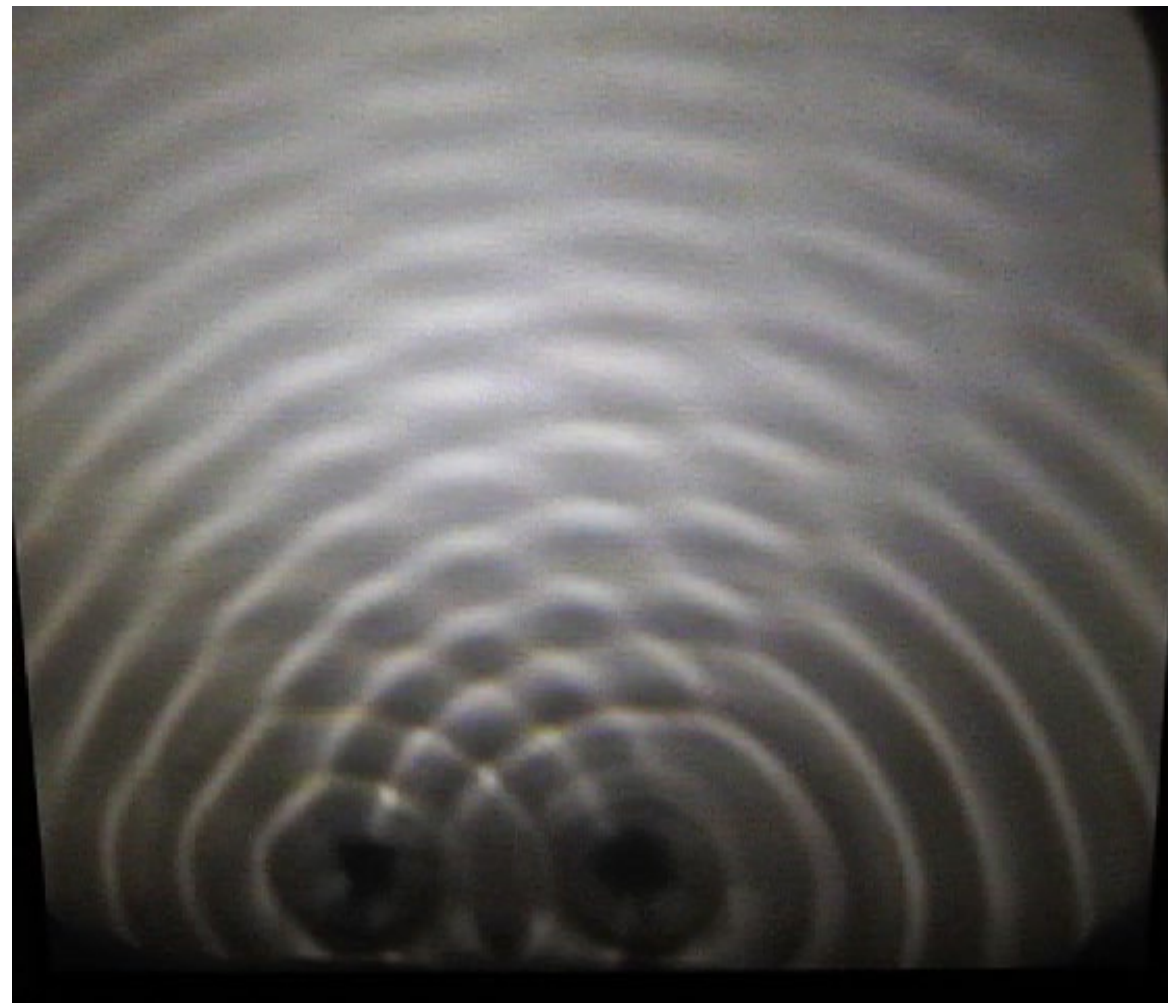


<https://www.youtube.com/watch?v=luv6hY6zsd0&t=260s>

4:25 あたりから観る

波動の干渉

- 山と谷が交互に生じて伝わって行くのが波。
- 波は空間的に広がる。
- 波同士が重なり合うと、強め合ったり、打ち消し合ったりする。



電子の波動性と粒子性

- 飛んでいる電子は一箇所に局在せず、**波動**のように広がって進んでいる、ように見える。
- 電子の波は重なり合って、強め合ったり、弱め合ったりする。
- 強め合った場所に電子は大きな確率で現れる。
- 現れるときは**粒子**のように現れる。電子の「半分のかけら」は決して見つからない。

量子論の不思議 1：偶然まかせ

- 量子論は事象が起こる**確率**しか予測できない
- 「次の電子がスクリーンのどこに現れるか」を量子論は予測できない。と言うか、それは誰にもわからない。
- **アインシュタイン「神はサイコロを振らない (God does not play dice)」**：電子などの究極的な要素が偶然まかせで動いているとは信じられない。

量子論の不思議 2： 見ると見ないで違う

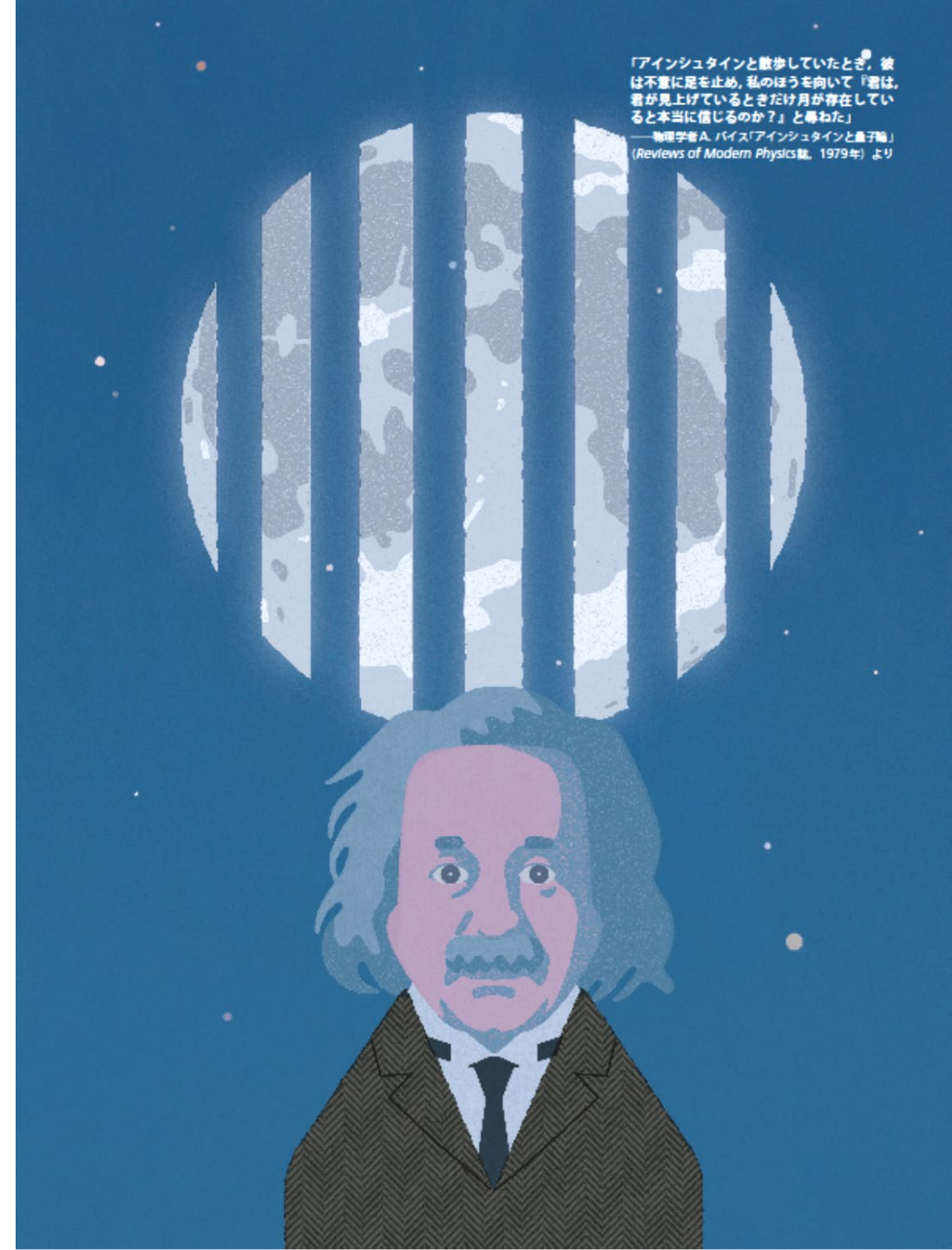
- 電子を探せば必ず「ひとつぶ」の粒子として見つかる。
- 電子を探していないときは、電子は波動のように広がり、同時に2箇所窓を通過して、重なり合って強め合ったり弱め合ったりしているかのように振る舞う。
- 見たときだけ粒子なのか？

アインシュタインのクレーム

- 電子は見ているときと見ていないときで別物なのか？
- 「空を見上げたときにだけ月はあると君は信ずるのか？

Do you really believe that the moon exists only when you look at it ? 」

(アインシュタインがパイプと散歩中に言った)



EPR論文（1935年） 1/3

- アインシュタイン、ポドルスキー、ローゼンの共著論文。
- 「客観的实在性」の十分条件
- 「物理理論の完全性」の必要条件
- この基準に照らすと量子力学は不完全だ、と論じた。

EPR論文（1935年） 2/3

- 「客観的实在性」の十分条件：系を乱すことなく、ある物理量の値を確実に予測できるならば、その物理量に対応する「实在の要素（element of reality）」があると言ってよい。
- 物理理論の完全性の必要条件：物理理論が完全であると言えるためには、理論は实在の要素に対応する概念を漏れなく記述しているべし。

EPR論文（1935年） 3/3

- 量子もつれ状態（ $\hat{q}_1 - \hat{q}_2$ と $\hat{p}_1 + \hat{p}_2$ の同時固有状態）では、1番の粒子を観測しただけで、2番の粒子の位置と運動量の値を確実に予測できる。だから**位置と運動量に対応する実在の要素があるはず**。
- しかし、量子論は位置と運動量の確定値を同時に書き表すことができない。
- だから**量子論は不完全だ**、と論じた。

局所実在論 (Local realism)

- EPRに込められている信念を後人が定式化。
- 局所性：ある場所で起きた出来事が他の場所のものに影響を及ぼすためには、間を光速以下の何かが伝わらなければならない。
- 実在論：系に影響を及ぼすことなく確実に予測できる性質や数量があるならば、観測していないときもその性質・数量は客観的に存在している。

局所性を言う必要があったか？

- EPR論文には“局所性”に関わる議論は直接的には書かれていないが・・・
- 「部分系に擾乱を与えることなく部分系について何かを知ることができる」という推論をするために「局所性」を使っていた。
- 実際、アインシュタインは「超光速の波束の収縮は相対論に反する」とクレームしていた（1927年のソルヴェイ会議）。

EPRに対するボーアの反論

- 一方の粒子だけ観測して他方の粒子には手を触れていないと言っても、一方の粒子にどういう観測を行うかという選択が系全体を乱すことになる。
- 量子もつれ状態は $\hat{Q} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$ と $\hat{P} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2$ とが可換なので同時固有状態になっているが、 $\hat{x}_1$ 自体は $\hat{p}_1 + \hat{p}_2$ と非可換。 **$\hat{x}_1$ を測る装置は必然的に $\hat{p}_1 + \hat{p}_2$ を乱す。**
- $\hat{p}_1$ は $\hat{x}_1 - \hat{x}_2$ と非可換。

EPRに対する反響

- EPR論文発表と同年の1935年にボーアが反論。
- 以後、この手の論争は下火に。
- **フォン-ノイマンは「量子論には隠れた変数（実在的変数）は存在しない」こと（No-Go theorem）を証明したと主張（1932年）。**
- **グレーテ・ヘルマン（数学者、ネーターの学生、ネオ・カント主義）はフォン-ノイマンの誤りを指摘した（1933-1935年）が、注目されなかった。**

実在論をテストする

- 「原子や電子は、人に見られていないときも、見られたときと同じ性質を持っているか？」という疑問を検証したくても、「**見ていないときの性質**」を実験で確かめる方法はなさそう。
- アインシュタインは1955年に没。
- **1964年にベルが、見ていないときの性質を検証するための数式を発表した。**
- **1969年にクラウザーたちがベルの不等式を実験検証しやすい形に作り替え、偏光を使う実験を考案した。**

偏光 Polarization

光にはいろいろな性質がある：

- 色（＝波長、光子の運動量）
- 明るさ（＝光子のエネルギー × 個数）
- 偏り

偏光フィルター



2枚の偏光フィルターを重ねる

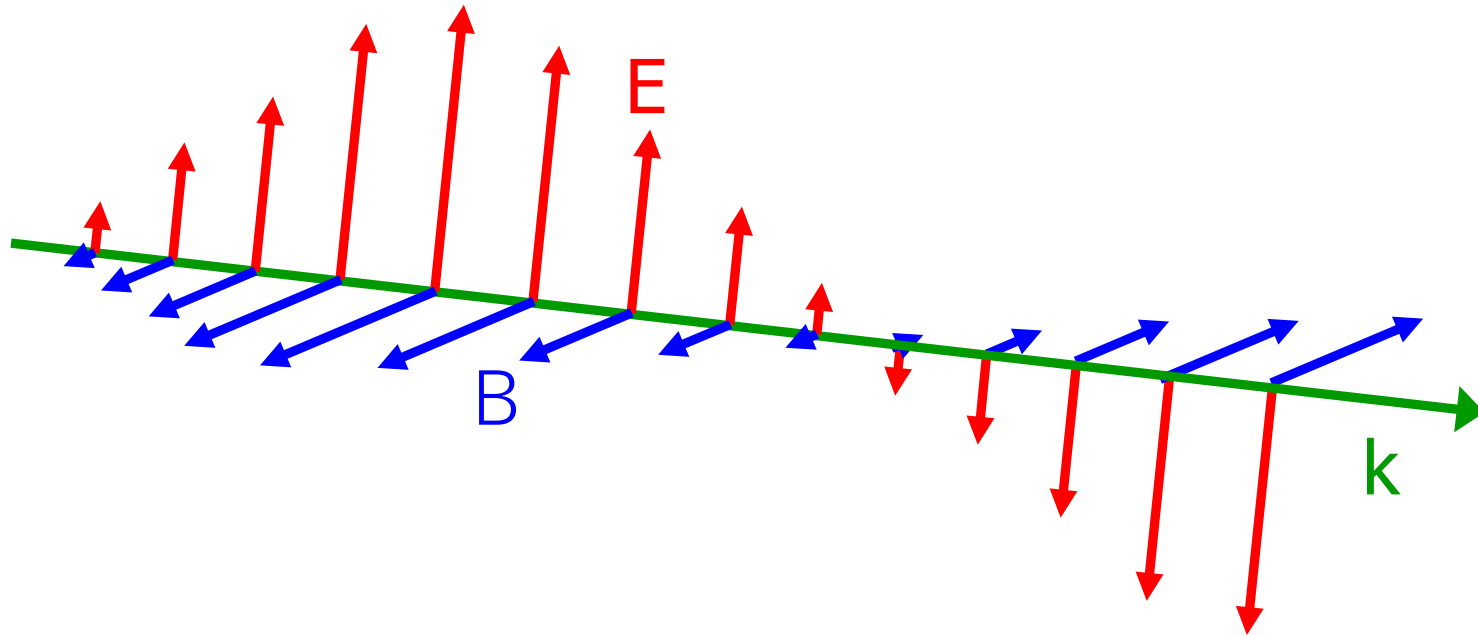


90°回して重ねるとほとんど光を通さない

(科学館 理工館 4 階に偏光の実験コーナーがあります)

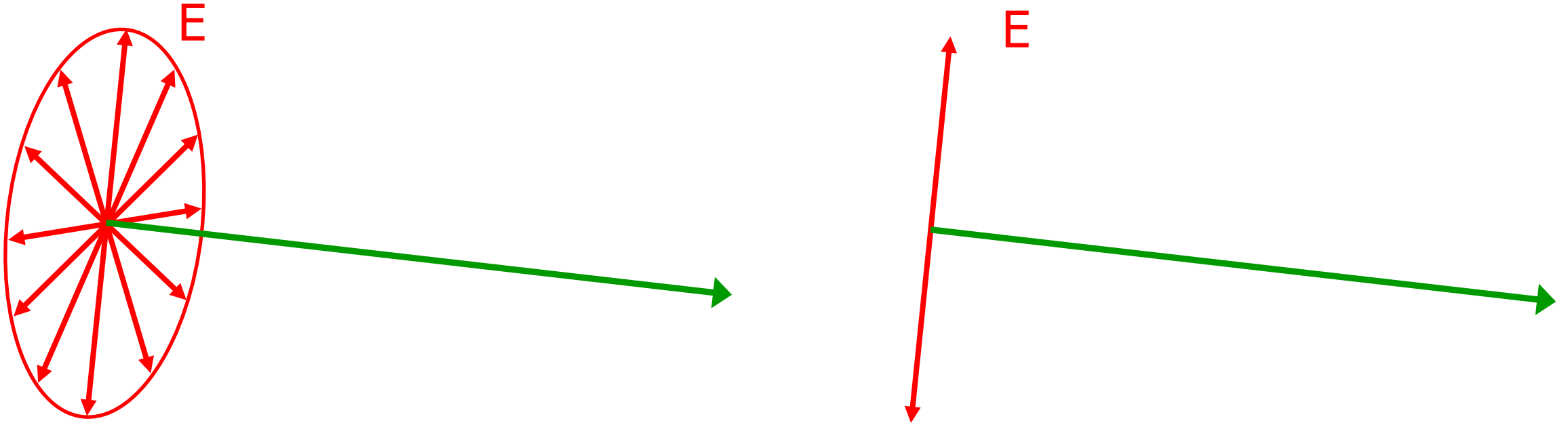
これをどう解釈するか？ 1/4

- 光は横波（電磁波）
- 進行方向 $\mathbf{k}$ に対して垂直に電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ が振動している。



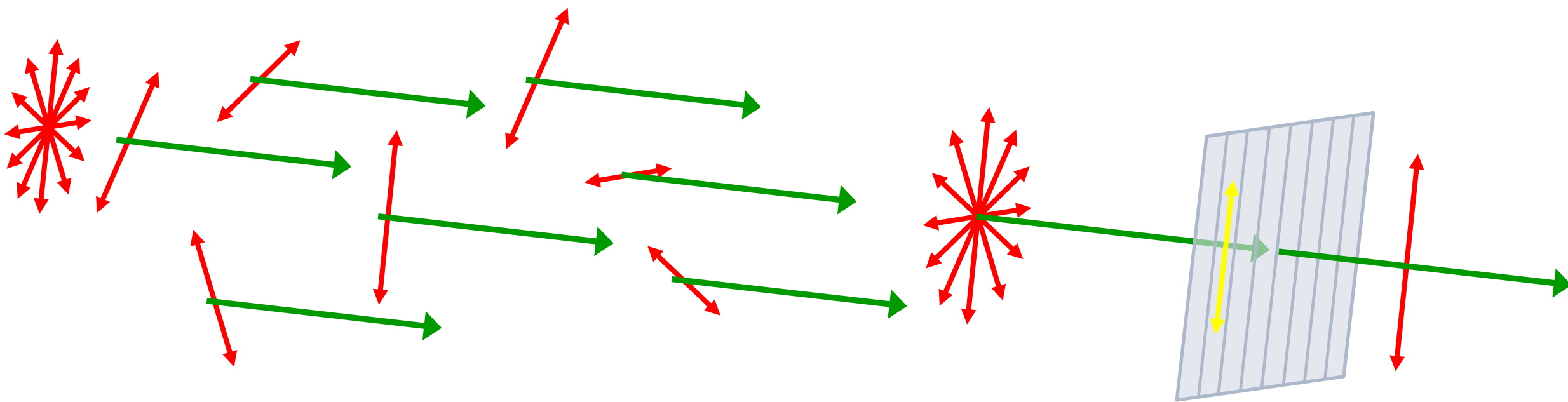
これをどう解釈するか？ 2/4

- 横波の振動方向には多様性がある。
- 特定の方法だけに振動している波が偏光。



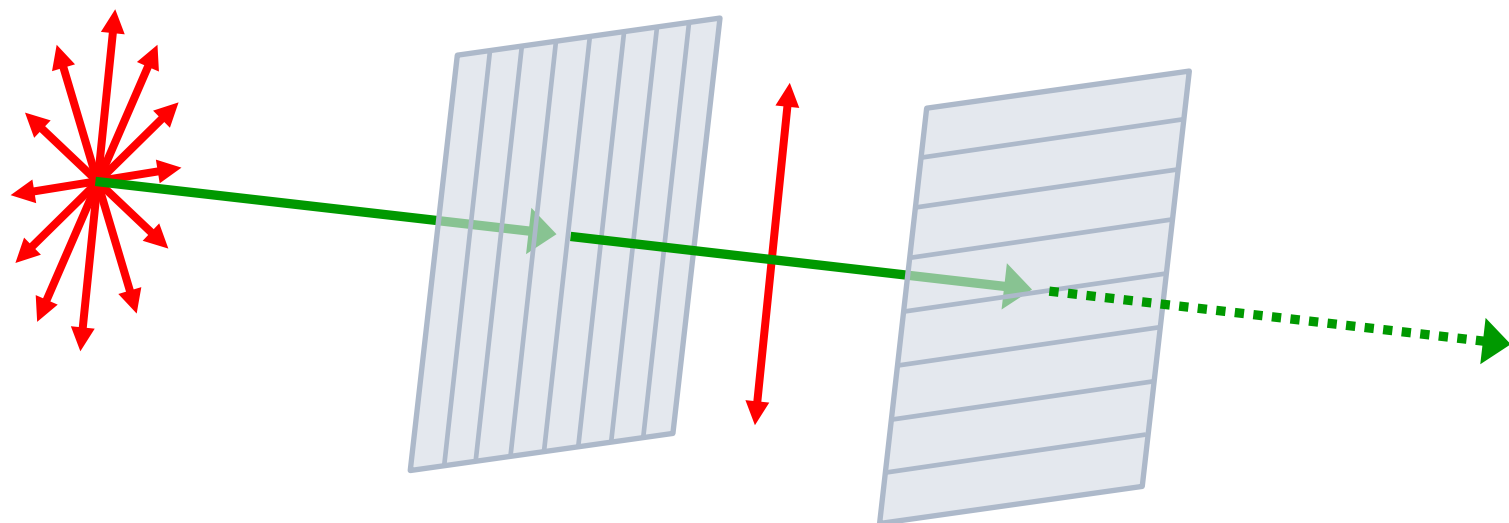
これをどう解釈するか？ 3/4

- 太陽や電球の光にはいろいろな方向の偏光が混じっている。
- 偏光フィルターは特定の方向の偏光だけを通す。



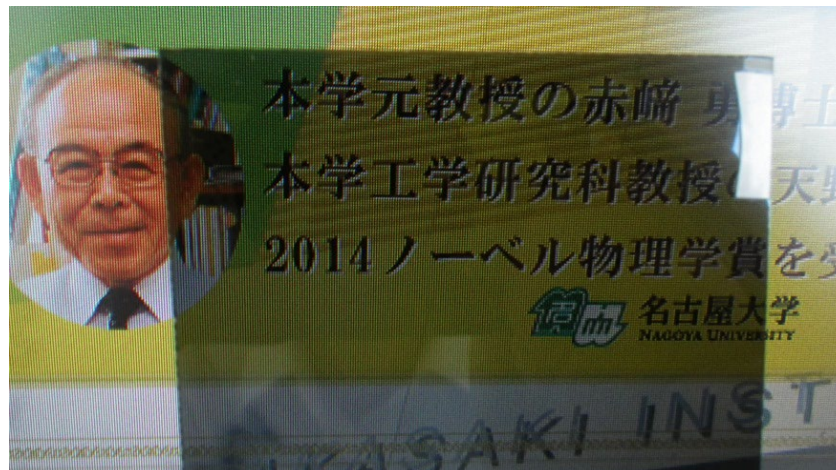
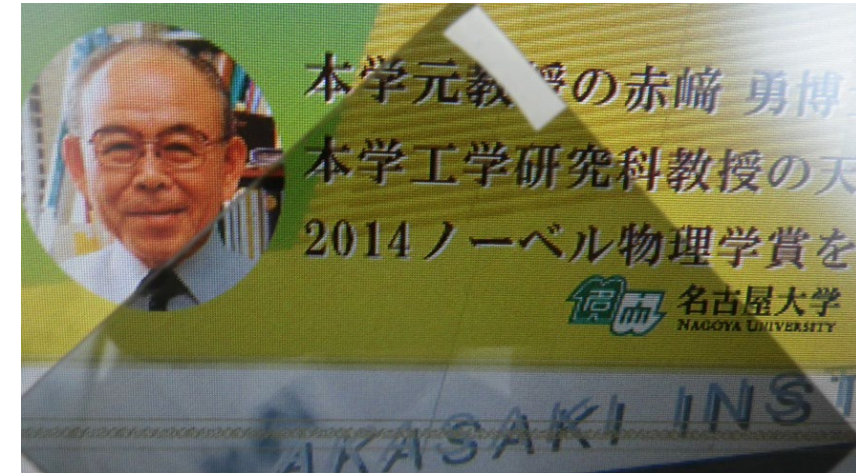
これをどう解釈するか？ 4/4

- 透過軸が互いに垂直になるように偏光フィルターを重ねると光は完全にさえぎられる。



身近なところで利用されている偏光

- スマホやテレビの液晶ディスプレイ（電氣的に偏光フィルターをオンオフすることによって画像を作っている）
- 偏光サングラス



3枚の偏光フィルターを重ねる (動画)

28 29 30							16 17 18 19 20 21 22 24 25 26 27 28 29
日	月	火	水	木	金	土	
28	29	30	1 仏滅	2 大安	3 赤口	4 先勝	
5 友引	6 先負	7 仏滅	8 大安 (薄)	9 赤口	10 先勝	11 友引	
12 先負	13 仏滅 体育の日	14 大安	15 赤口	16 先勝	17 友引	18 先負	
19 仏滅	20 大安	21 赤口	22 先勝	23 友引 (薄)	24 先負	25 仏滅	

フィルター2枚の間にもう1枚挿入



3枚重なっているところが光が通る！
2枚重ねよりも3枚重ねのほうが通りやすい
(光が通る確率が高い)



色付きセロハンを3枚重ねる

赤・青・黄



青・黄・赤



黄・赤・青



どの順番で重ねても暗い

(波長 = 運動量のスペクトル分解射影演算子は可換。角運動量は非可換)

フィルター 3 枚重ねの方が光を通す、不思議



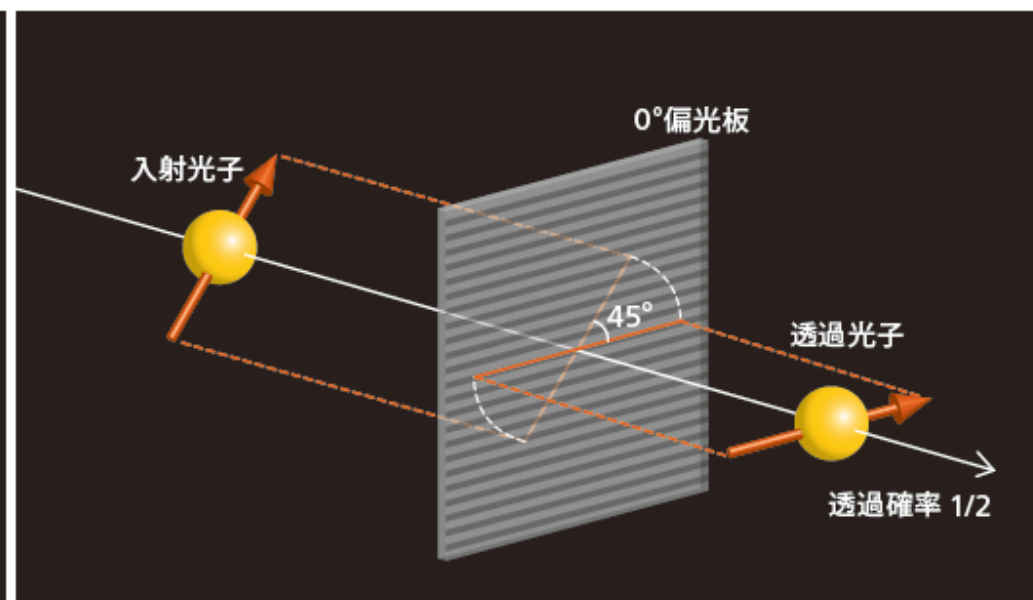
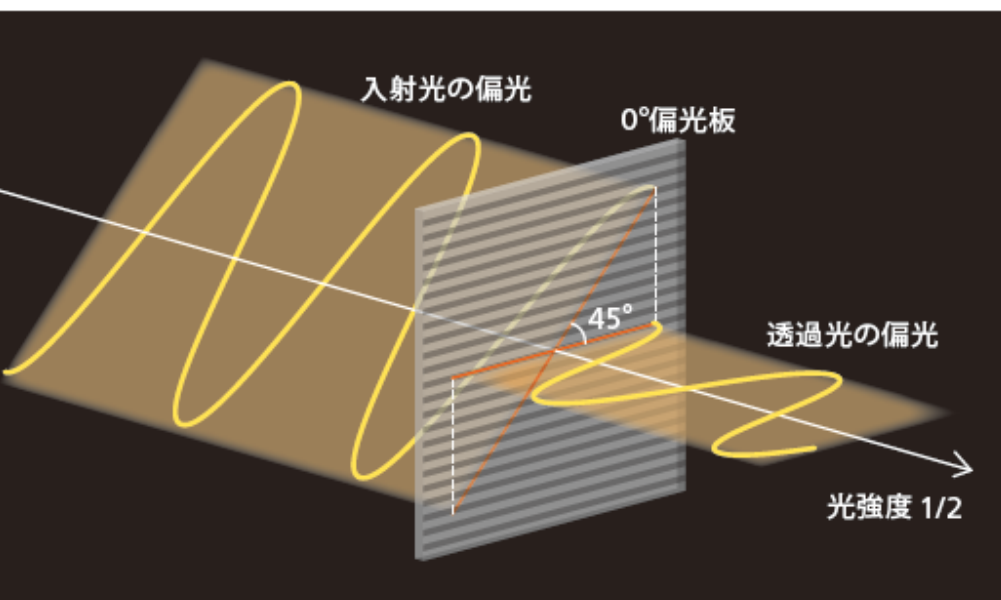
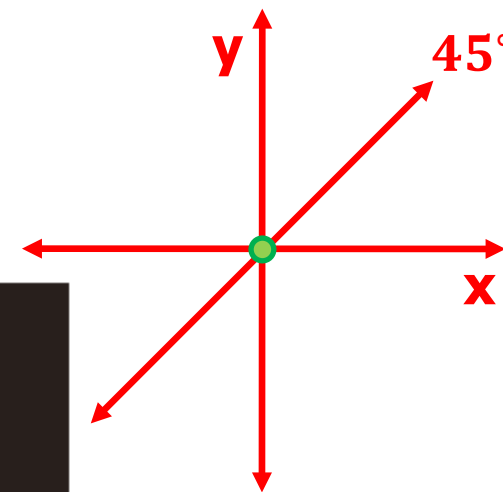
3 枚重なっているところのほうで光が通る！
2 枚重ねよりも 3 枚重ねのほうが通りやすい
(光が通る確率が高い)



これを量子力学はどう説明するか？

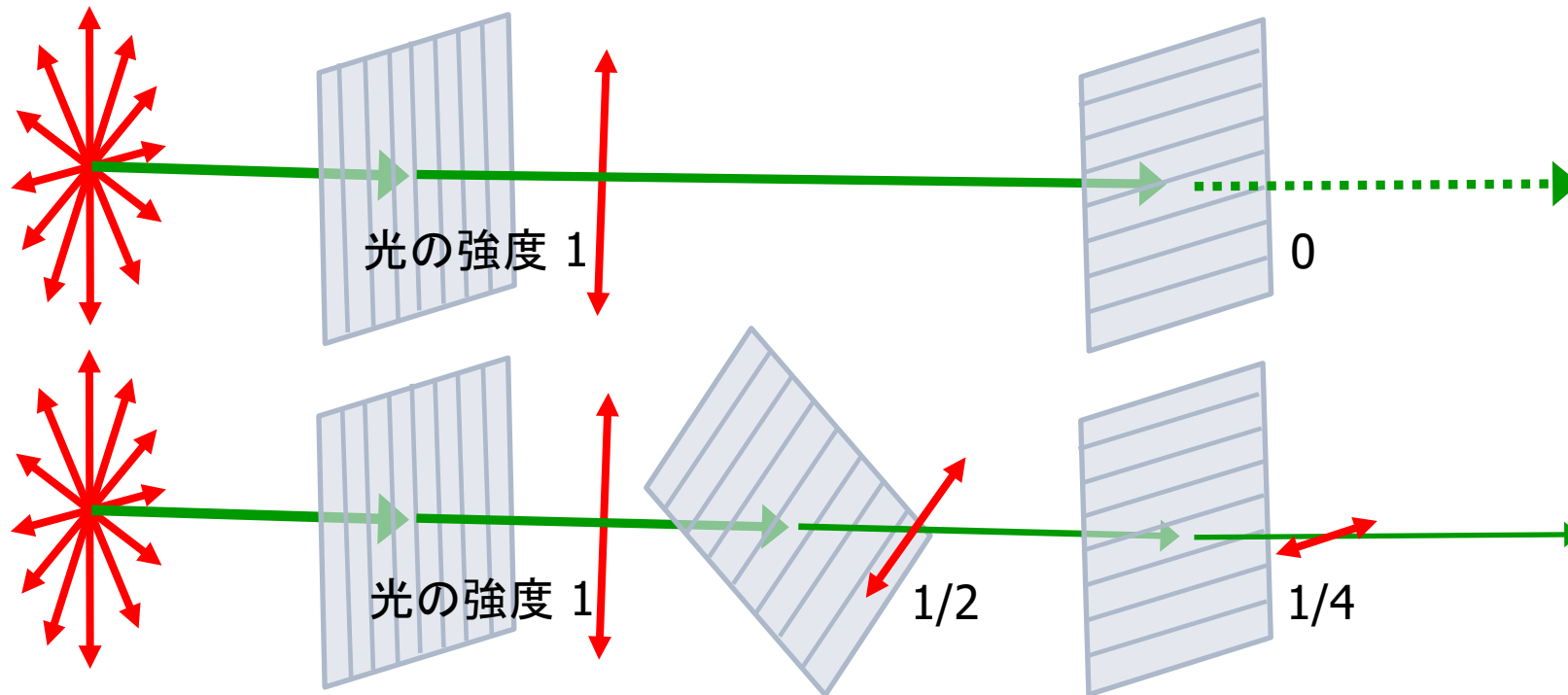
- y偏光が x偏光に変わる確率は 0
- **45°偏光は x偏光とy偏光の重ね合わせ状態 $|45^\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + |y\rangle)$**
- 45°偏光から x偏光に移る確率は 1/2
- 45°偏光から y偏光に移る確率も 1/2

日経サイエンス『光子の逆説』 谷村省吾



これを量子力学はどう説明するか？

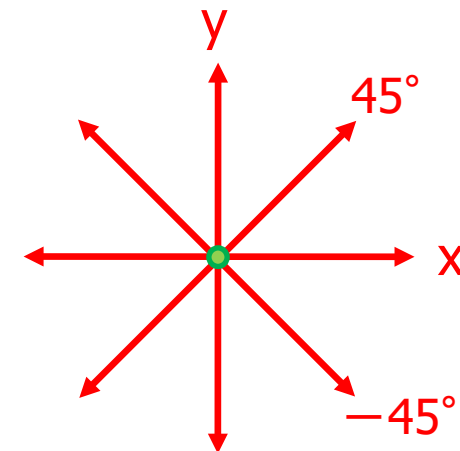
- y偏光からx偏光に移る確率は 0
- y偏光が 45° フィルターを通ると 45° 偏光になりきって（以前は y偏光だったことを忘れて） x偏光フィルターを通る。



重ね合わせ状態

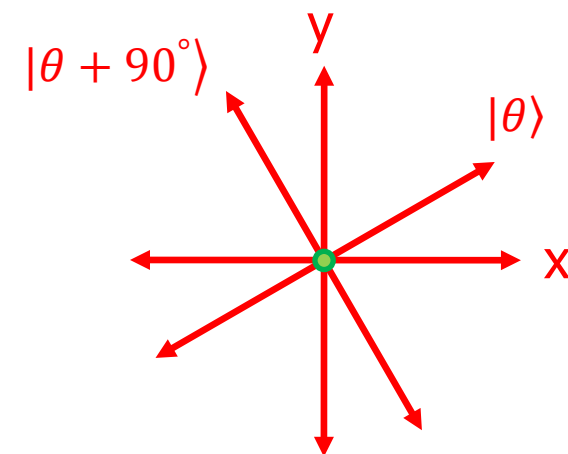
斜め偏光状態：

$$|45^\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + |y\rangle), \quad |-45^\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - |y\rangle)$$



重ね合わせ状態としての直線偏光：

$$\begin{cases} |\theta\rangle = \cos \theta |x\rangle + \sin \theta |y\rangle \\ |\theta + 90^\circ\rangle = -\sin \theta |x\rangle + \cos \theta |y\rangle \end{cases}$$



一般の場合の遷移確率

- 角度 θ 傾いた偏光を x 軸に**射影した成分**

$$\alpha = \cos \theta$$

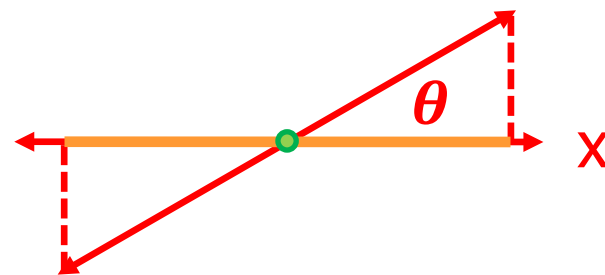
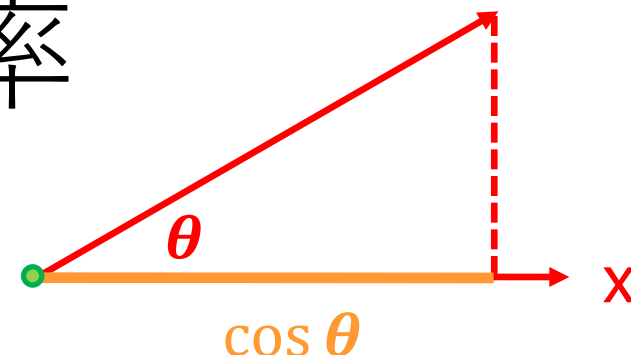
- 角度 θ 傾いた偏光が x 偏光フィルターを通る確率は**振幅の絶対値 2 乗**

$$P(\theta) = |\alpha|^2 = \cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

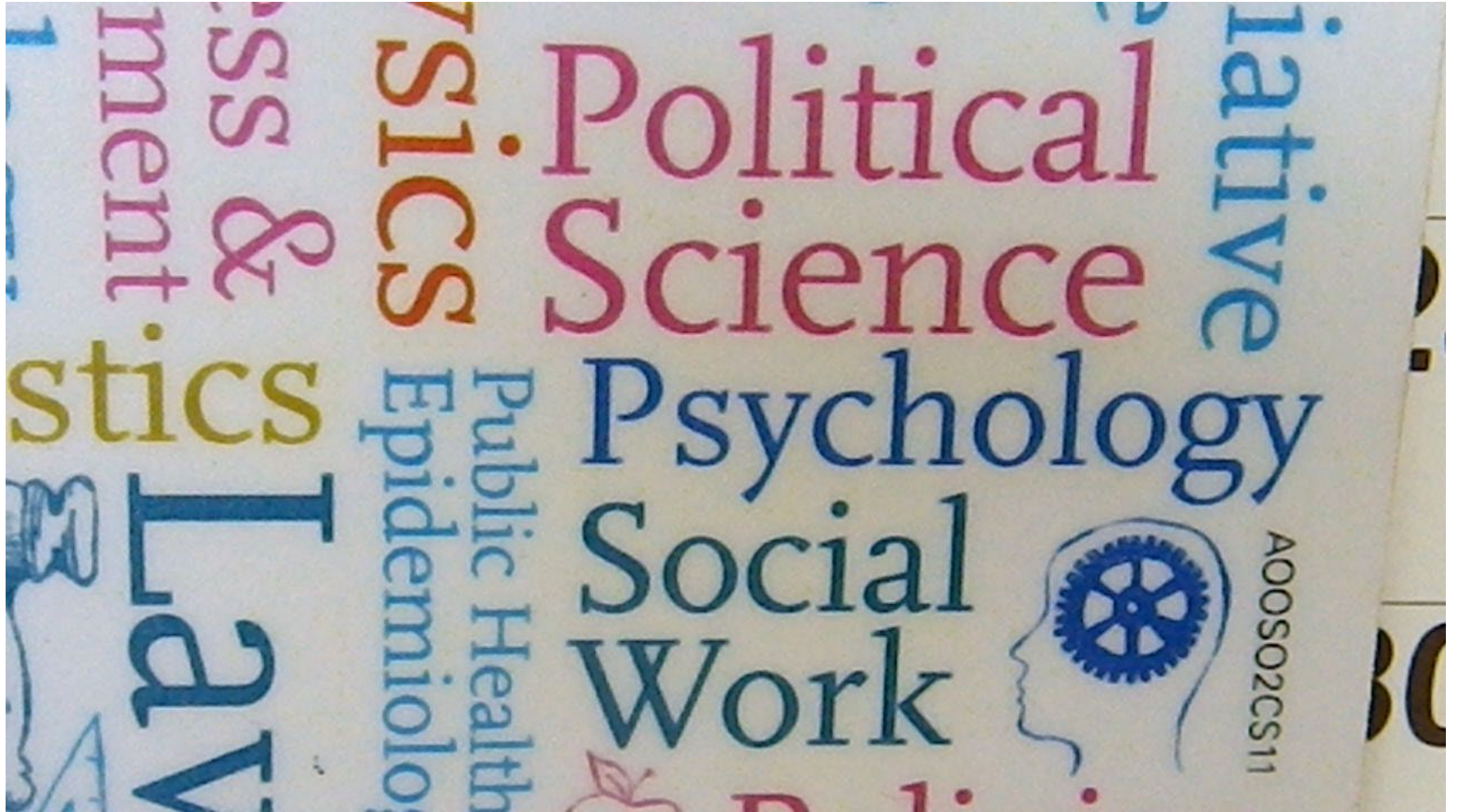
$$P(90^\circ) = 0$$

$$P(45^\circ) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(22.5^\circ) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0.8535 \dots$$

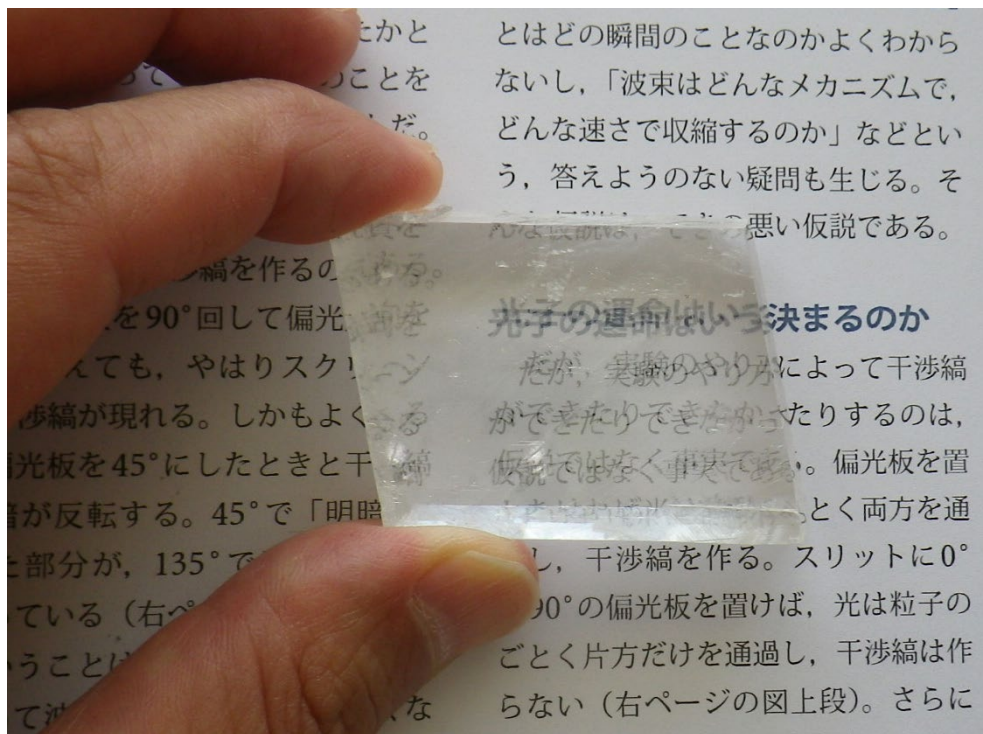


方解石（炭酸カルシウムの結晶）（動画）

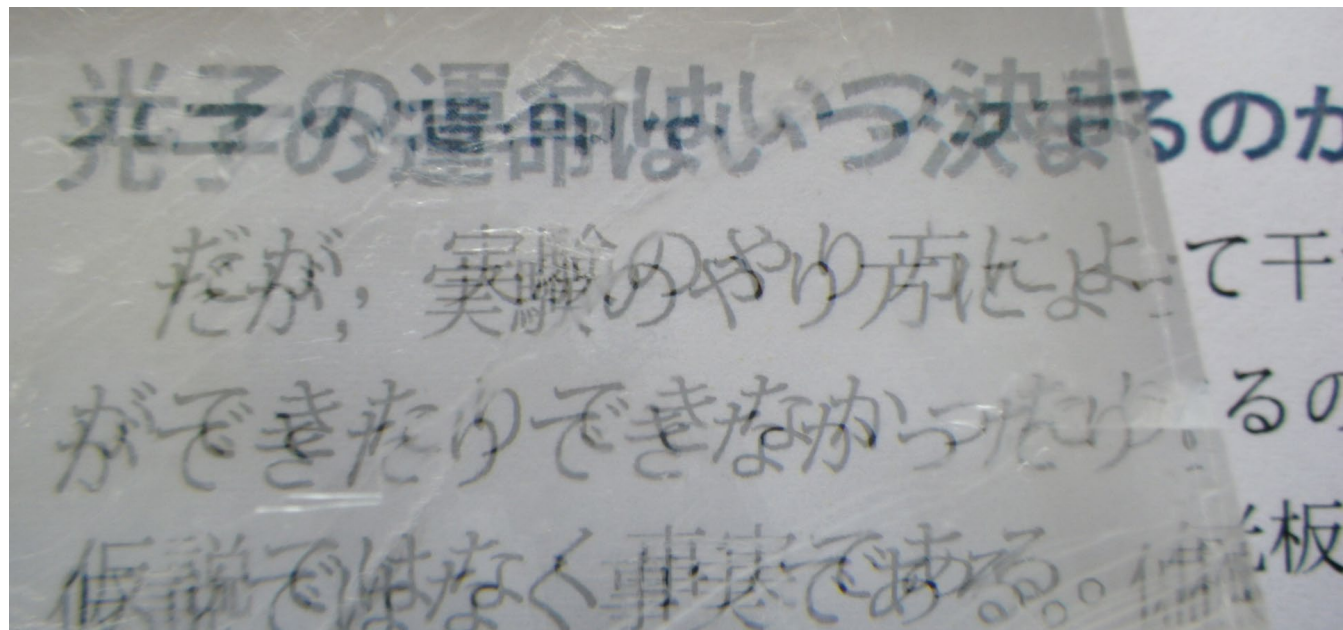


複屈折

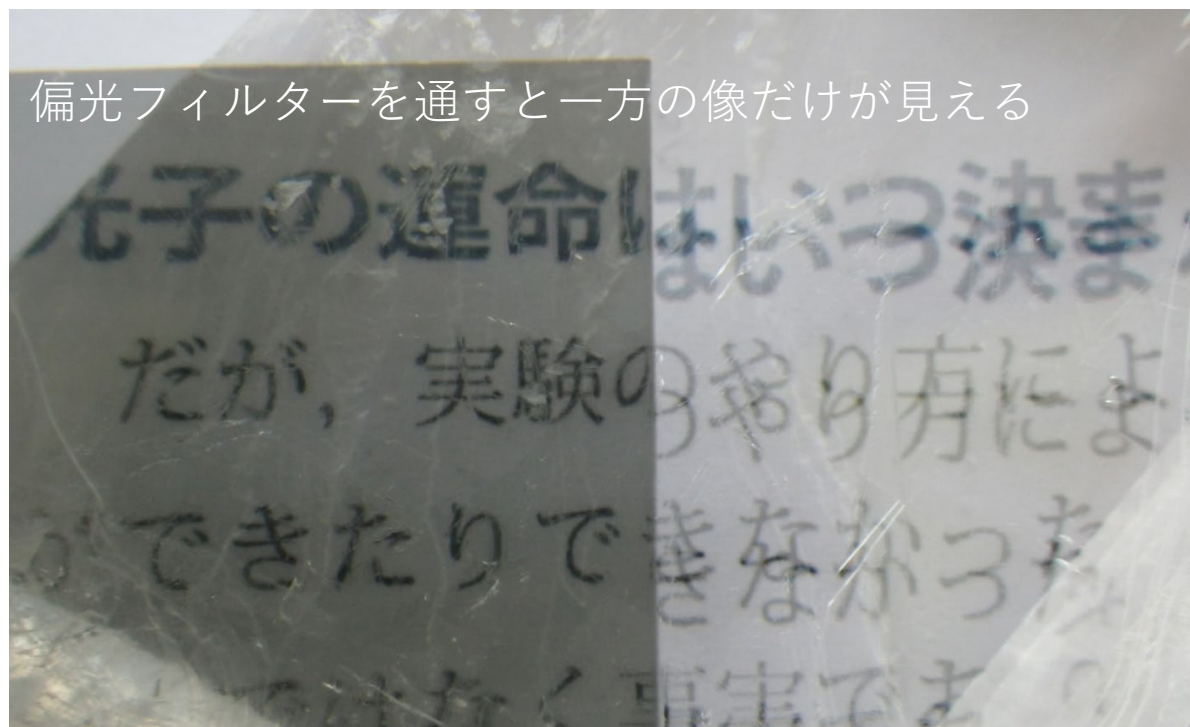
方解石（炭酸カルシウム結晶）は混合状態の光をx偏光とy偏光に分けて屈折させる。



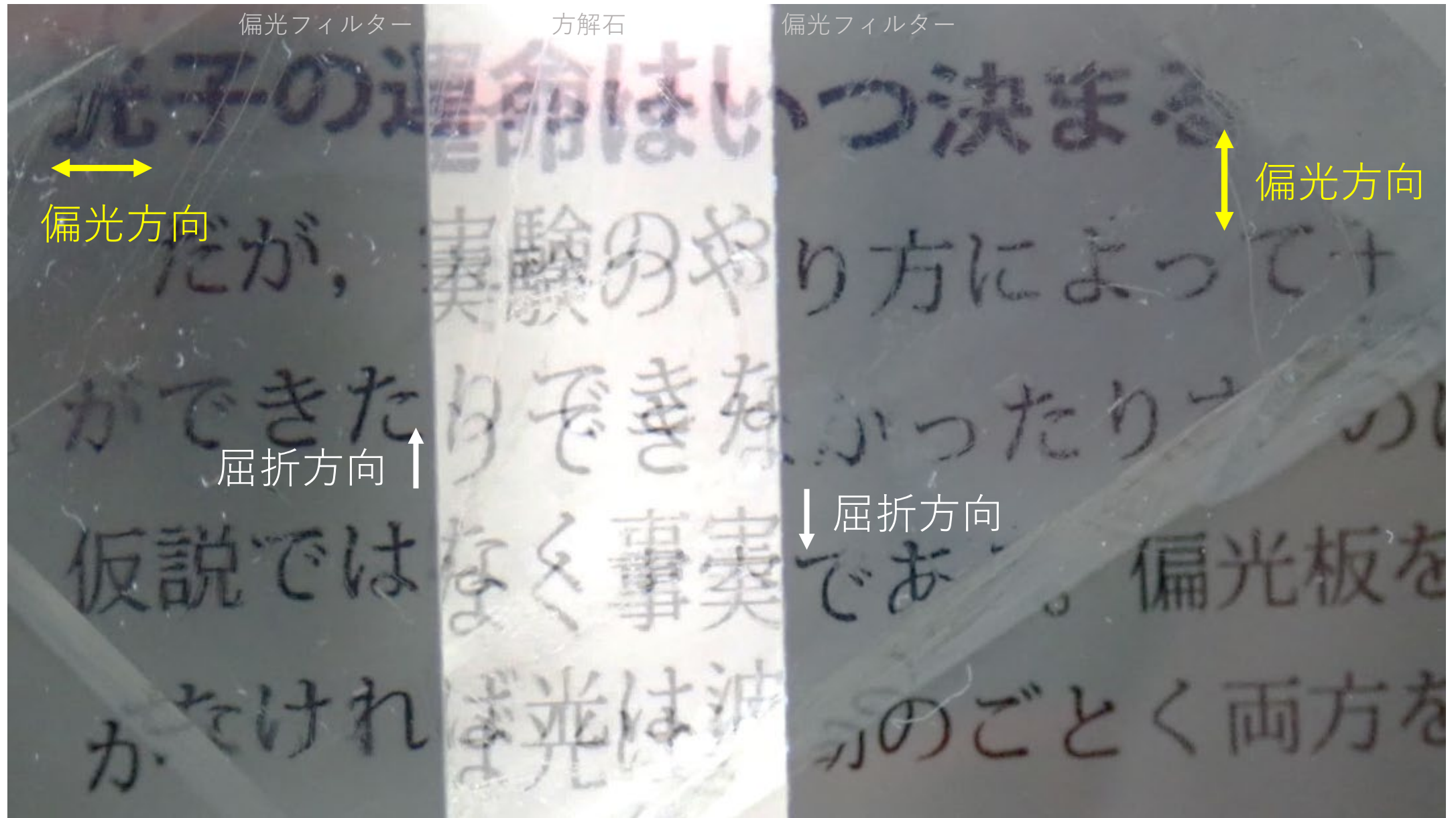
方解石を通すと、文字がダブって見える



偏光フィルターを通すと一方の像だけが見える



複屈折は偏光を分離している



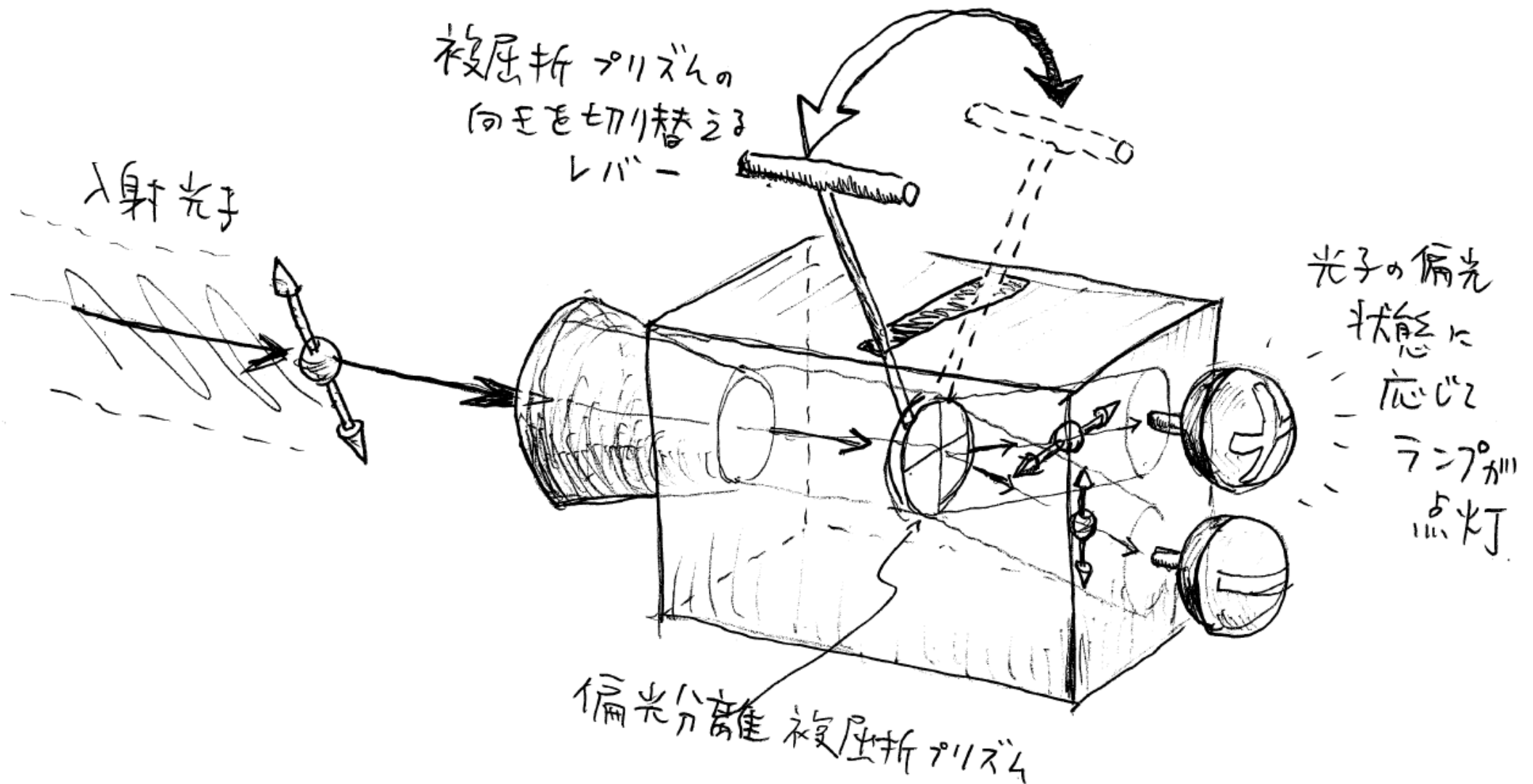
CHSHの実験設定

- 1969年にクラウザー、ホーン、シモニー、ホルト（CHSH）の4人が、ベルの不等式を実験検証しやすい形に改良した。

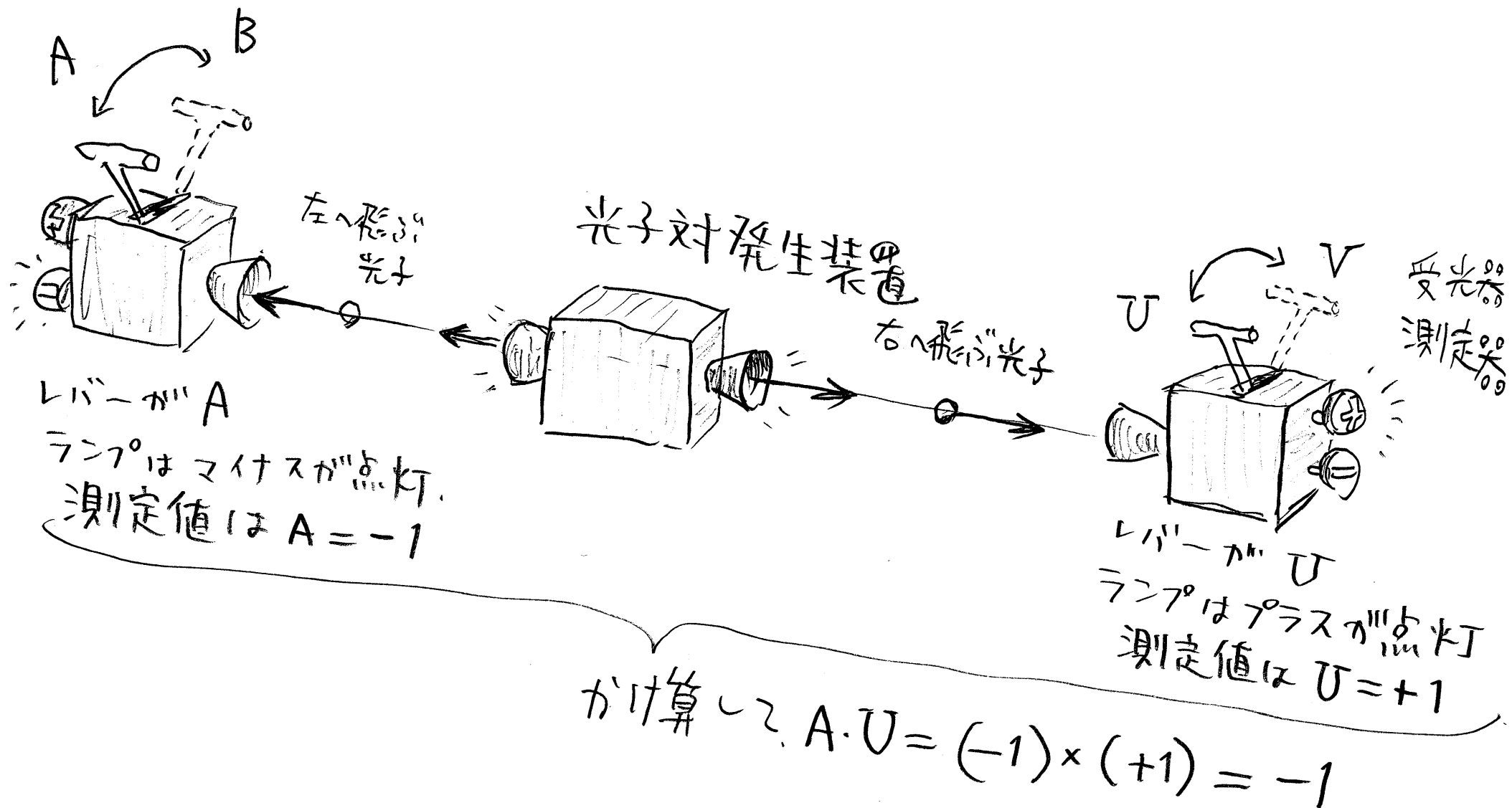
（シモニーはカルナップのもとで哲学の博士を取り、ワイトマンとウィグナーのもとで物理の博士を取った。ワイトマンに「EPR論文の間違いを指摘せよ」と指示されてEPR論文を読んだが、どこも間違っていないと思った、という。ホーンはシモニーの学生。参照：アダム・ベッカー『実在とは何か』）

- CHSHの設定を説明する。

光子の偏光測定器の概念図

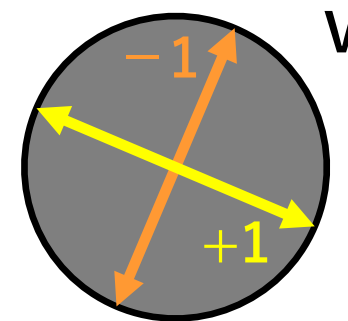
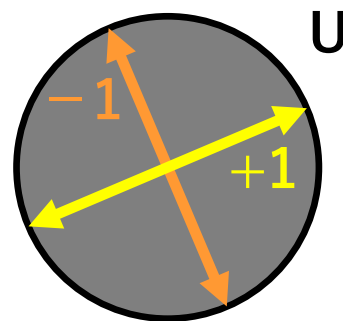
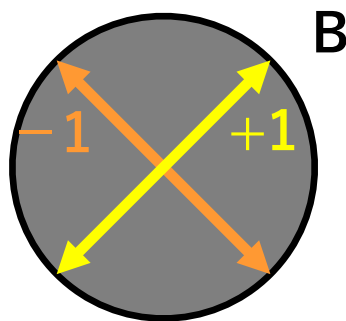
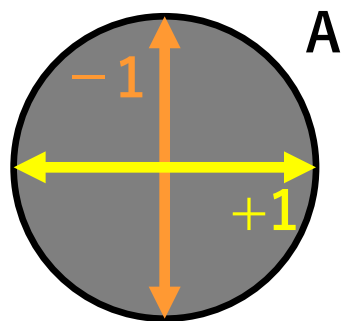


この絵を見ながら説明を聞いてください



偏光分離器

- 複屈折器 A で偏光を分けて、一方の偏光成分を+1、他方を-1 と定める。
- 複屈折の分離方向を切り替えたのが B
- もう一つの複屈折器の U と V も同様。



実験の手順

- 中央に光子ペア発生装置があり、2つの光子を同時に発生させて左右に1つずつ飛ばす。
- 左右の端に受光器。飛び込んで来た光子の偏光状態を測る。**x偏光ならプラスのランプ、y偏光ならマイナスのランプが点灯。**
- 左右の受光器にはレバーが付いていて、レバーの向きによって偏光の分離角度が変わる。レバーは左右の受光器に付き添っている実験者が切り替える。

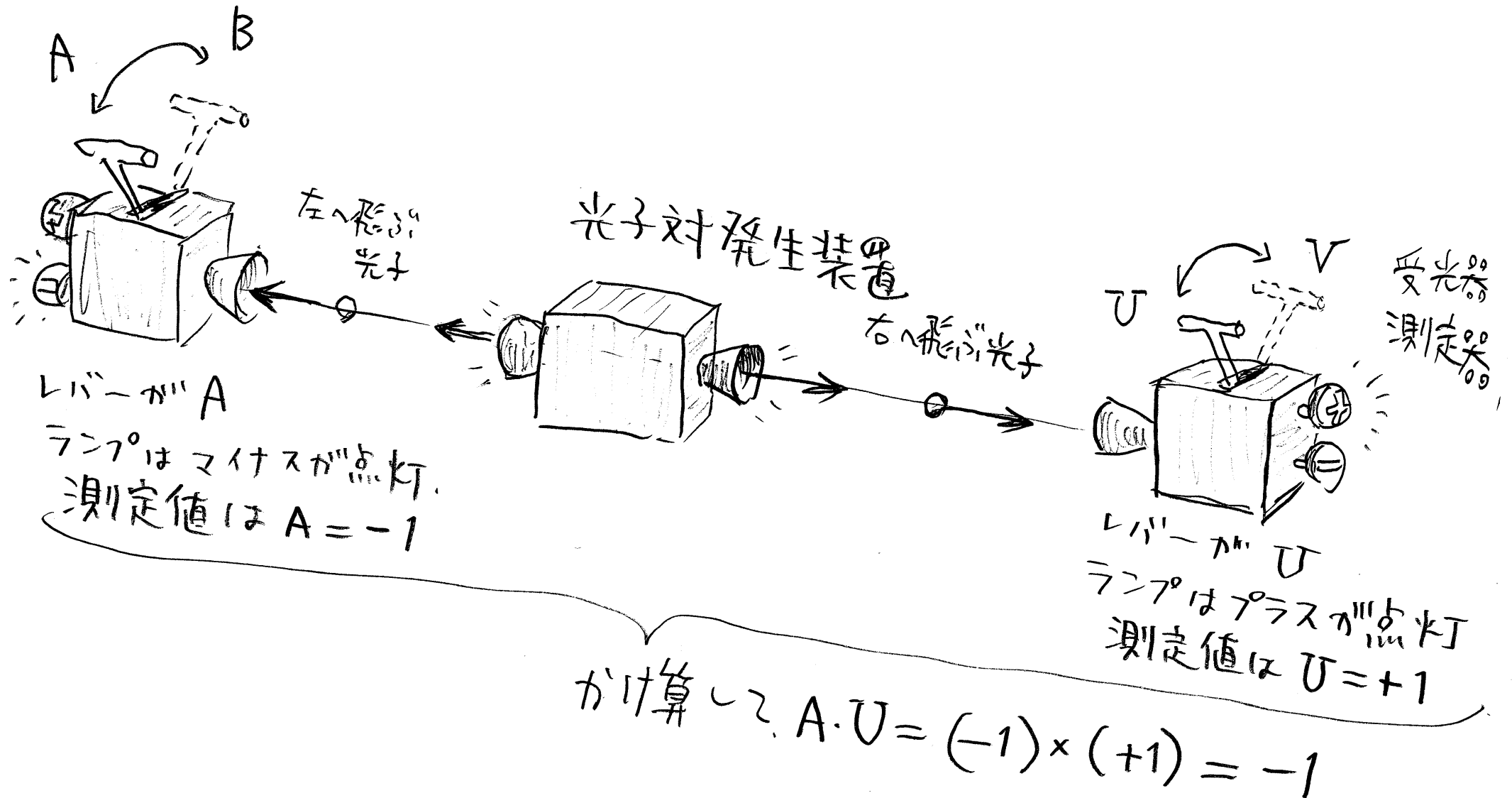
測定値の定義

- 光子が左右の受光装置に飛び込む。
- **レバーがAの位置になっている左の受光器のプラスランプが点灯したら測定値は $A=+1$ とする。**
- レバーがAの位置になっている左の受光器のマイナスランプが点灯したら測定値は $A=-1$ とする。
- レバーがBの位置になっていたら、測定値は $B=\pm 1$.
- 右の受光器についてもレバーの位置とランプの点灯に応じて $U=\pm 1$ または $V=\pm 1$ を測定。

測定を繰り返す

- 1組の光子ペアに対して左の受光器がA、右の受光器がUを測ったなら、掛け算してAUの値を求める。
- 光子ペアを何回も発生させてAUの値を多数回記録して、その**平均値** $\langle AU \rangle$ を求める。
- 同様に、AとVを測って掛け算値AVを求め、光子ペアの発生を繰り返して、**平均値** $\langle AV \rangle$ を求める。
- 同様に、 $\langle BU \rangle$, $\langle BV \rangle$ を求める。

やることはわかりましたか？



測定データの最終処理

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{AU} \rangle + \langle \mathbf{AV} \rangle + \langle \mathbf{BU} \rangle - \langle \mathbf{BV} \rangle$$

を求める。

局所实在論によれば、

$$-2 \leq \langle \mathbf{S} \rangle \leq +2 \quad (\text{CHSHの不等式})$$

となるはずである。

CHSHの不等式の証明 1/2

平均化する前の式を書く：

$$S = AU + AV + BU - BV$$

因数分解する：

$$S = A(U + V) + B(U - V)$$

U と V の値は ± 1 なので、

U + V の値は ± 2 または 0.

U - V の値も 0 または ± 2 .

U + V と U - V の どちらか一方は 0 で、もう一方は ± 2 .

CHSHの不等式の証明 2/2

$$S = A(\mathbf{U} + \mathbf{V}) + B(\mathbf{U} - \mathbf{V})$$

$U + V$ と $U - V$ は 必ず一方が 0 で、もう一方が ± 2 .

A, B の値は ± 1 なので、けっきょく S の値は ± 2 .

平均値は、必ず最大値と最小値の間にあるので、

$$-2 \leq \langle S \rangle \leq +2 \quad (\text{CHSHの不等式})$$

**$\langle S \rangle$ がこの不等式の外にはみ出るなんてありえない！
と想像していただけたでしょうか？**

実在論 vs. 量子論

$$-2 \leq \langle S \rangle \leq +2 \quad (\text{CHSHの不等式})$$

$$-2.828 = -2\sqrt{2} \leq \langle S \rangle \leq +2\sqrt{2} = 2.828 \quad (\text{量子論})$$

量子論では、CHSH不等式の破れ（violation）が起きうる。

ここまでのまとめ

- 光には偏光という性質がある。
- 偏光は **x**（**プラス**）か **y**（**マイナス**）かどちらか。
- 光子対に対して、測定器の向きをあちこち変えて、光子の偏光を測って掛け算して平均して足し算・引き算した数量を考えると

$$-2 \leq \langle AU \rangle + \langle AV \rangle + \langle BU \rangle - \langle BV \rangle \leq 2$$

という不等式を満たすはずだ。

- だが、量子論では $-2\sqrt{2} \leq \langle S \rangle \leq \sqrt{2}$

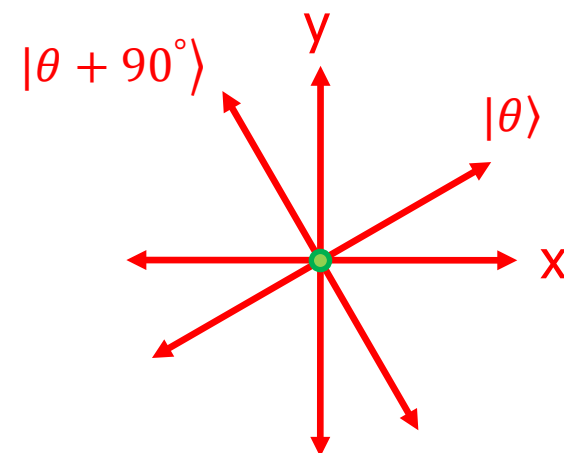
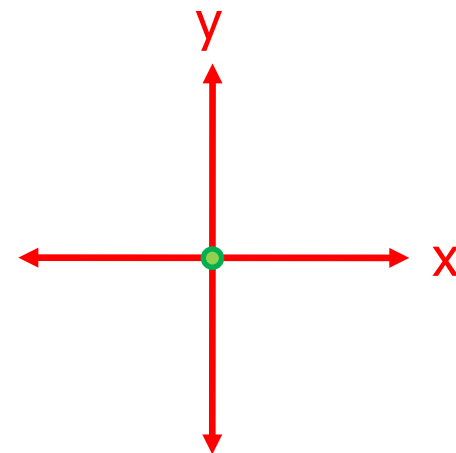
一光子の重ね合わせ状態

一光子の直線偏光状態（基底ベクトル）：

$$|x\rangle, \quad |y\rangle$$

重ね合わせ状態：

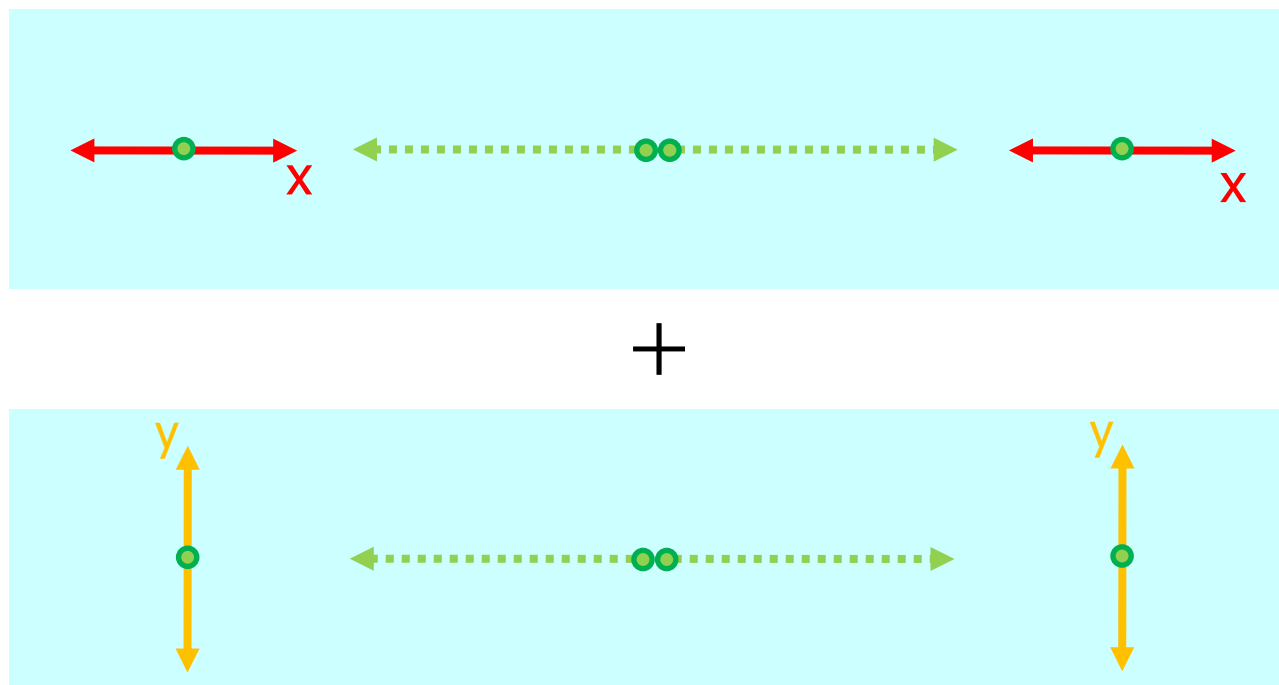
$$\begin{cases} |\theta\rangle = \cos \theta |x\rangle + \sin \theta |y\rangle \\ |\theta + 90^\circ\rangle = -\sin \theta |x\rangle + \cos \theta |y\rangle \end{cases}$$



二光子の量子もつれ状態

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle \otimes |x\rangle + |y\rangle \otimes |y\rangle)$$

「左に**x**偏光 and 右に**x**偏光のペア状態」と
「左に**y**偏光 and 右に**y**偏光のペア状態」の**重ね合わせ状態**。



量子もつれ状態は完全な相関状態

二光子の量子もつれ状態（ $\otimes$ はテンソル積）

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle \otimes |x\rangle + |y\rangle \otimes |y\rangle)$$

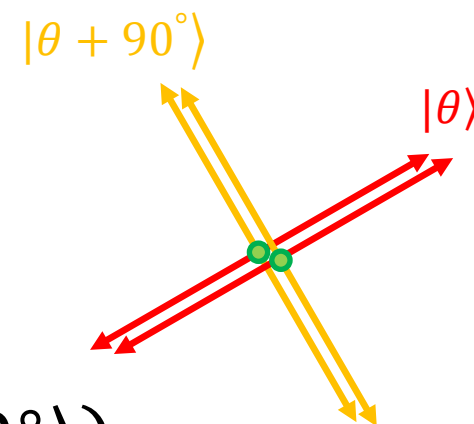
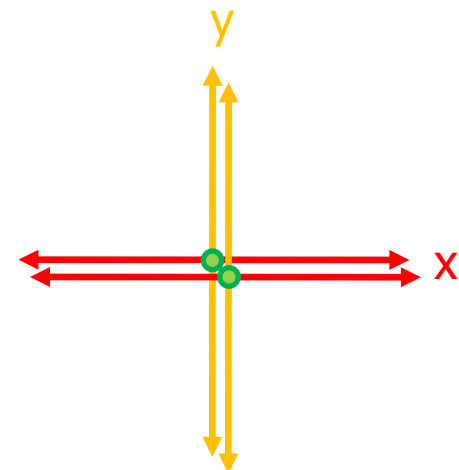
別の観測基底

$$|\theta\rangle = \cos \theta |x\rangle + \sin \theta |y\rangle,$$

$$|\theta + 90^\circ\rangle = -\sin \theta |x\rangle + \cos \theta |y\rangle$$

で見ても、

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\theta\rangle \otimes |\theta\rangle + |\theta + 90^\circ\rangle \otimes |\theta + 90^\circ\rangle)$$

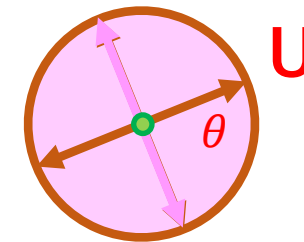
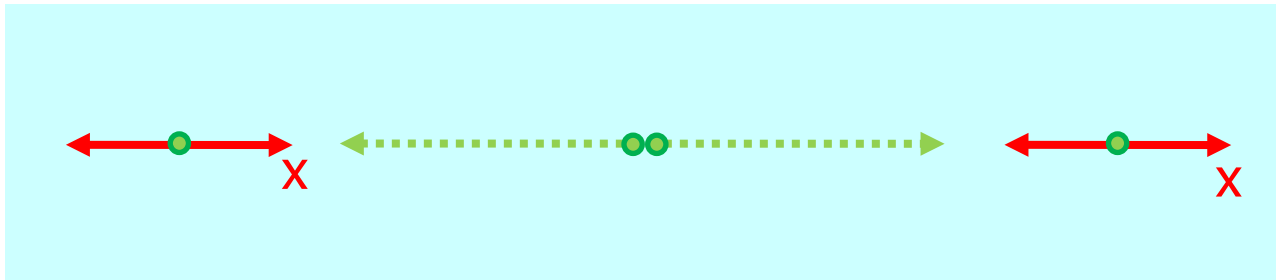
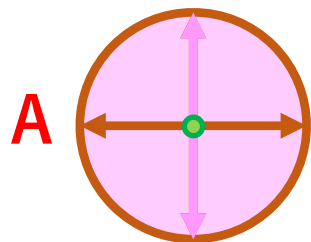


AとUが同符号になる確率

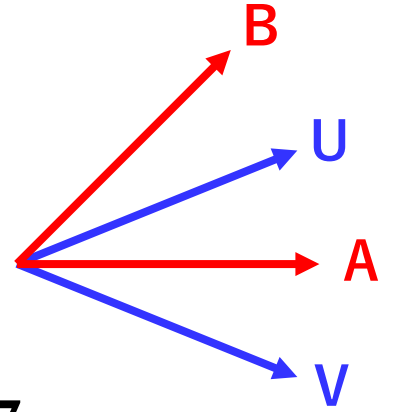
- 左の光子がx偏光であることが確定したとき、
右の光子もx偏光なのだから
右の光子が角度 θ の偏光フィルターを通る確率は

$$P(\theta) = \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

- とくに、 $P(22.5^\circ) = 0.85 \dots$



平均値 $\langle AU \rangle$ の計算



- AとUのなす角度が 22.5° の場合、

$$\langle AU \rangle = (+1) \times 0.85 + (-1) \times 0.15 = 0.7$$

- 同様に、 $\langle AV \rangle = \langle BU \rangle = 0.7$

- BとVだけ $45^\circ + 22.5^\circ = 67.5^\circ$, $P(67.5^\circ) = 0.15 \dots$

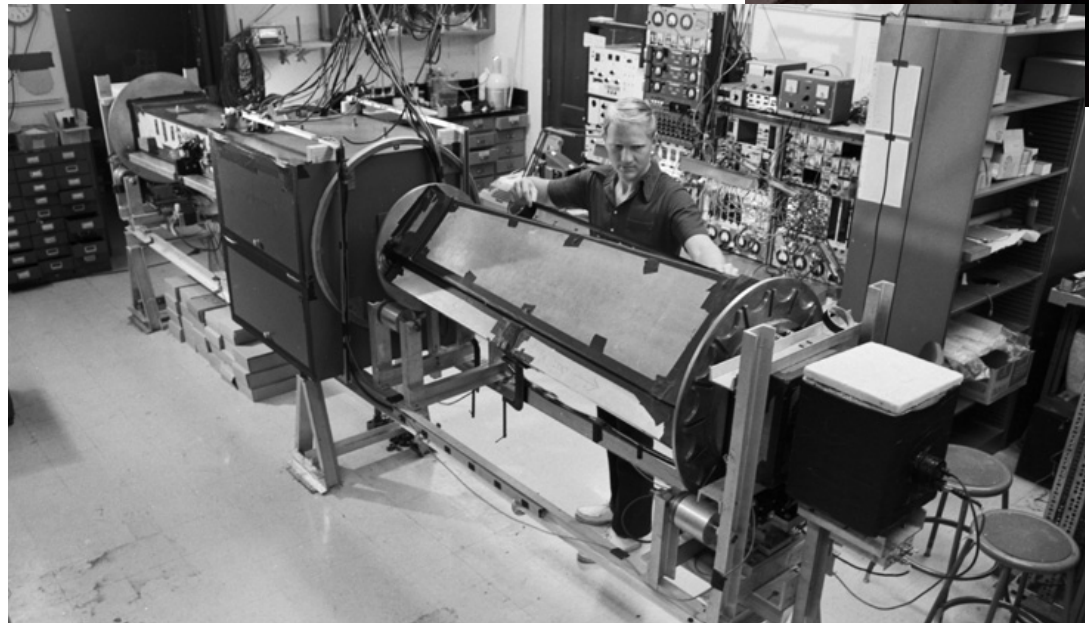
$$\langle BV \rangle = (+1) \times 0.15 + (-1) \times 0.85 = -0.7$$

- 集計すると、

$$\langle S \rangle = \langle AU \rangle + \langle AV \rangle + \langle BU \rangle - \langle BV \rangle = 2.8$$

ジョン・クラウザーの実験（1972年）

大学院では宇宙背景放射の研究をしていたが、ベルの論文を知ってシモニーらと共同研究を行った。博士号を取って、量子もつれ光子ペアを作る実験を行っていたタウンズの研究室の研究員となり、大学院生のフリードマンと共同で最初の検証実験を行った。CHSHの不等式の破れを示した。



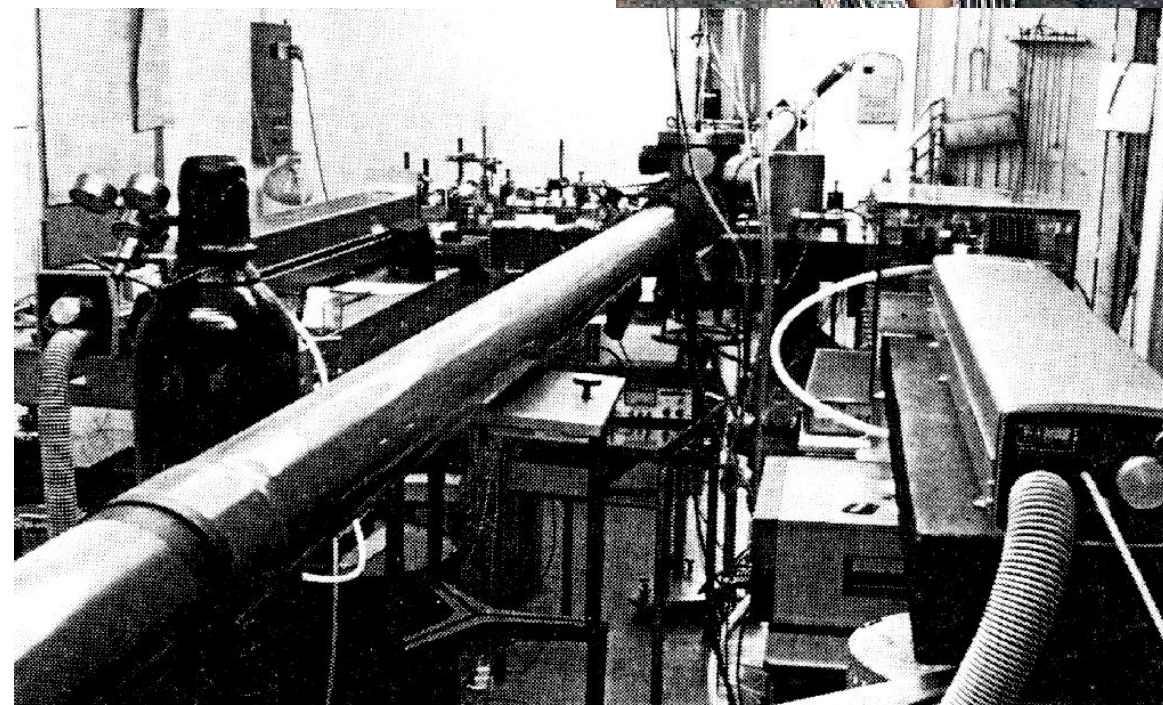
<https://www.johnclausser.com/>

<https://www.universityofcalifornia.edu/news/physics-nobel-recognizes-uc-berkeley-experiment-spooky-action-distance>

アラン・アスぺの実験（1982年）

「左右の測定器が互いに連絡しあう時間があると、量子もつれがなくても相関を生じうる」というクレームに応えるため、左右の測定器を光速で40ナノ秒かかる距離に離して、測定器を10ナノ秒周期で切り替える実験を行い、 $\langle S \rangle = 2.4$ を得た。

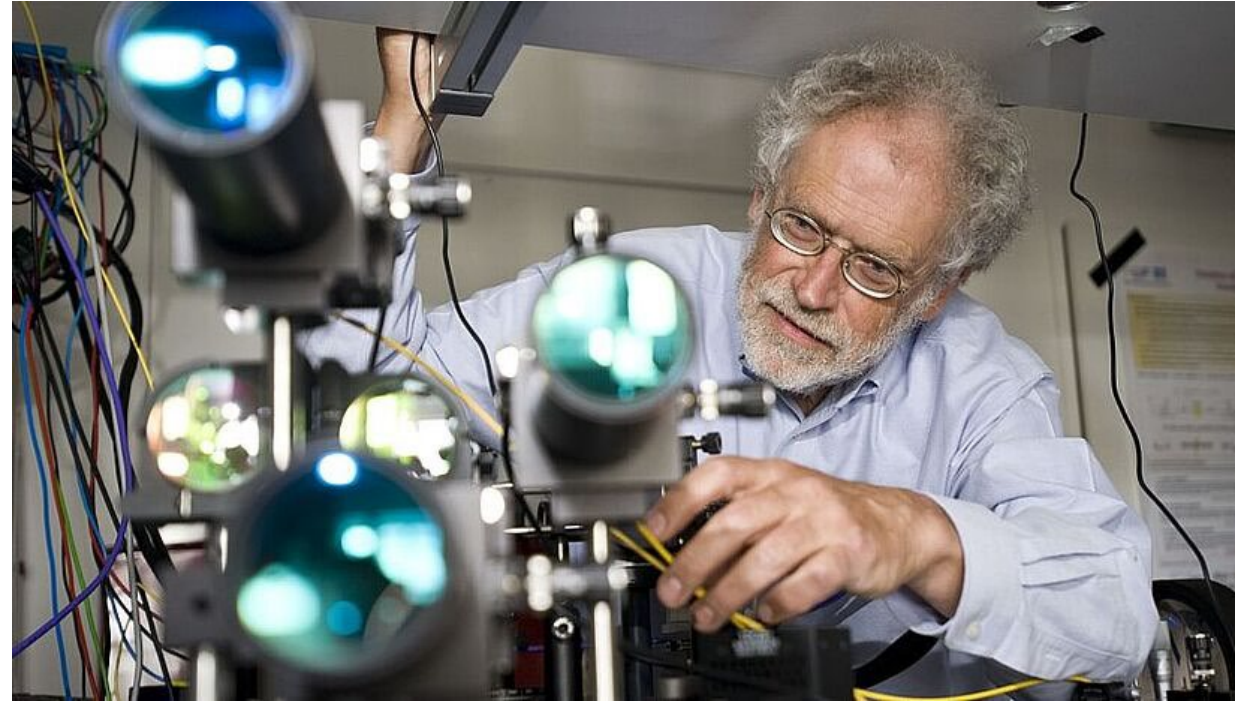
この研究でアスぺは博士学位を取った。



アントン・ツァイリンガーの実験（1998年）

左右の測定器が互いに相手の状態を知らないようにするため、また、あらかじめ光子が測定器の状態を知るチャンスがないようにするため、左右の測定器のそばに乱数発生器を置いて、光子が発生して測定器に飛び込むまでの間に乱数を振って、それに応じて測定器を切り替える実験を行った。

$\langle S \rangle = 2.73$ を得た。



量子力学の由緒正しい数学：非可換代数

$A^2 = 1, \quad B^2 = 1$ でも $\mathbf{BA} = -\mathbf{AB}$ ならば

$$\begin{aligned}(A + B)^2 &= A^2 + AB + BA + B^2 \\ &= 1 + AB - AB + 1 \\ &= 2.\end{aligned}$$

$A = \pm 1, \quad B = \pm 1$ だが、 $A + B = \pm\sqrt{2}$.

非可換物理量では、一般に

$$(A + B \text{ の値}) \neq (A \text{ の値}) + (B \text{ の値})$$

「 $(A \text{ の値})$ と $(B \text{ の値})$ が同時に実在すると思って計算してはいけない」ことが量子力学にはビルトインされている。

代数的量子論で解く

左で*A*または*B*を測る。右で*U*または*V*を測る。

離れた場所の物理量は可換。同一地点の物理量は非可換

$$A^2 = 1, \quad B^2 = 1, \quad U^2 = 1, \quad V^2 = 1$$

$$AU = UA, \quad AV = VA, \quad BU = UB, \quad VB = VB$$

$$AB = -BA, \quad UV = -VU$$

$$S = AU + AV + BU - BV$$

以上の仮定から*S*の値は $\pm 2\sqrt{2}, 0$ であることが証明できる。

(谷村『量子論と代数—思考と表現の進化論』数理科学2018年3月号、[名大リポジトリで無料公開](#))

ヒルベルト空間フォーマリズムで解く

$|x\rangle = |\uparrow\rangle$, $|y\rangle = |\downarrow\rangle$ を基底ベクトルとして行列表現

$$A = \sigma_z \otimes I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes I, \quad B = \sigma_x \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes I$$

$$U = I \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_z + \sigma_x), \quad V = I \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_z - \sigma_x)$$

エンタングル状態 $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle)$

$$\langle \Psi | \sigma_z \otimes \sigma_z | \Psi \rangle = 1, \quad \langle \Psi | \sigma_x \otimes \sigma_x | \Psi \rangle = 1, \quad \langle \Psi | \sigma_z \otimes \sigma_x | \Psi \rangle = 0$$

$$\langle \Psi | A \otimes U | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle \Psi | A \otimes V | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \Psi | B \otimes U | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle \Psi | B \otimes V | \Psi \rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle S \rangle = \langle AU \rangle + \langle AV \rangle + \langle BU \rangle - \langle BV \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + 1 + 1 - (-1)) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = 2.8$$

CHSHの不等式のどこが間違っていたのか？

証明の途中で、 $S = A(U + V) + B(U - V)$

UとVの値は ± 1 なので、

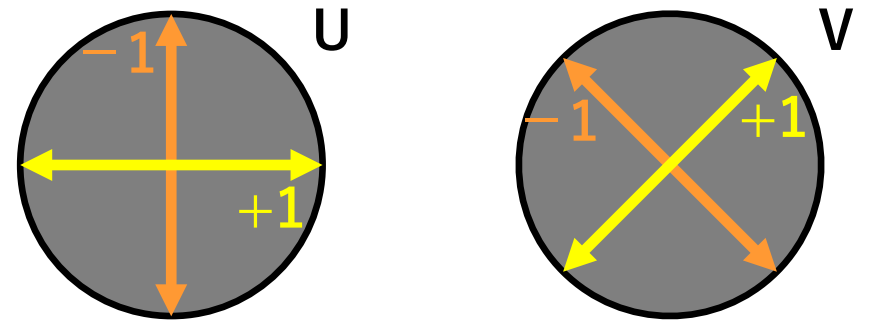
U+Vの値は ± 2 または 0.

U-Vの値も 0 または ± 2 .

U+V と U-V は 必ず一方が0 で、もう一方が ± 2

と考えた。しかし、UとVは同時には測れない！

Uを測っているときは Vは測れないのに、UとVの両方の値が実在していると仮定したことが誤り。



CHSHの不等式の破れを吟味する

マーミンの野球原理「見ていなかった野球の試合は、見ていたときとまったく同じように進行し、同じスコアになる」が正しいとすると、

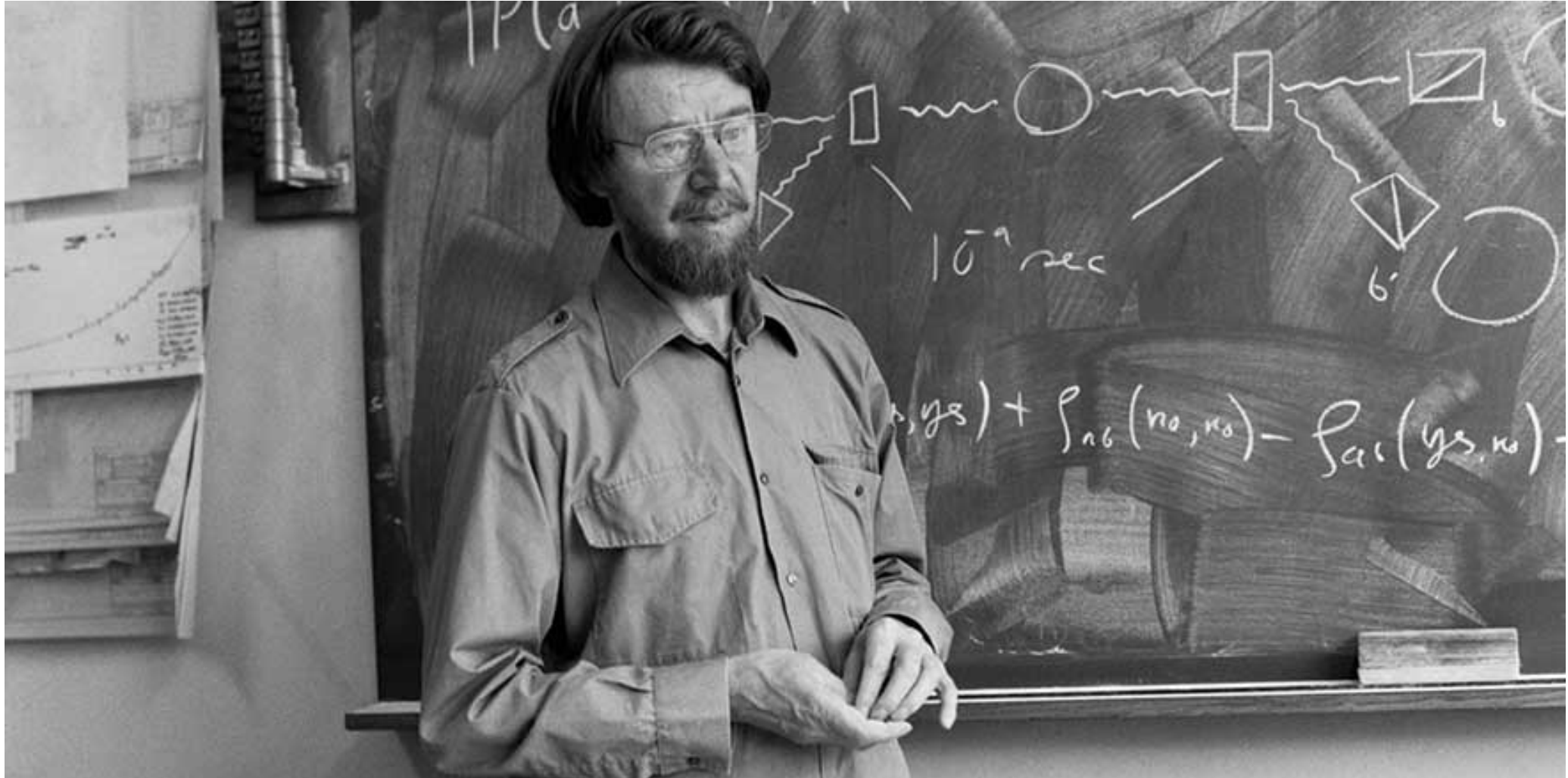
B	+	+	-	-	+	-	-	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	-	+	-
U	+	-	-	-	+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	+	-
15%が異符号																				
U	+	-	-	-	+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	+	-
A	+	-	-	-	+	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-
15%が異符号																				
A	+	-	-	-	+	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-
V	+	-	-	+	+	-	+	+	+	-	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-
15%が異符号																				

どう頑張っても一番上のBと一番下のVの異符号箇所は45%以下。

〈S〉 = 2.8を達成するためには BとVの異符号箇所が85%必要！

ジョン・ベル (1928-1990)

CERNにて。加速器設計の仕事のかたわら、量子力学・場の量子論も研究



ジョン・ベルのキャリア

- 北アイルランドのベルファストで労働者階級の家にもまれた。4人兄弟の中で高校に行ったのはジョンだけ。高校を卒業してクィーンズ大学ベルファスト校の物理学学科の実験助手になり、才能が認められ、大学に入学・卒業した。
- イギリスの原子力研究所に就職。在職中、パイエルスのもとで博士号取得。CPT定理を証明したが、パウリとリューダースが一足先に証明していた。
- CERNの加速器設計部門に転職。サバティカル休暇中に、いわゆるベルの不等式を発見。
- ジャッキーフと場の量子論のカイラル・アノマリーを発見。
- ランダウ・リフシッツの本を英訳（力学、量子力学、物質中の電磁場、量子電磁力学の巻）。
- J.J.サクライのModern Quantum Mechanicsの遺稿のベルの不等式についての解説の部分をベルが増補。
- CERN在職中に亡くなった。
- 恵まれた環境にもまれた、とは言えないが、才気にあふれ、多彩な活躍

量子性とは何だろう 1/10

何が古典物理と量子物理の本質的差異なのか？

- 飛び飛びのエネルギー準位（黒体輻射、光子、原子）
- 重ね合わせの原理と干渉効果（ダブルスリット干渉、シュレーディンガーの猫）
- 不確定性関係
- 仮想粒子（摂動論のファインマンダイアグラム）
- ループ積分、くりこみ群、running coupling constant
- アハラノフ・ボーム効果（干渉）

量子性とは何だろう 2/10

根源的差異は**古典物理量は可換、量子物理量は非可換**であること。

- 飛び飛びのエネルギー準位：例えば調和振動子

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} k \hat{x}^2$$

- $\frac{1}{2m} \hat{p}^2$, $\frac{1}{2} k \hat{x}^2$ の各項は連続スペクトル $[0, \infty)$
- 非可換であり、同時対角化できない。
- 足してから対角化すると離散スペクトル $\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$

量子性とは何だろう 3/10

根源的差異は**古典物理量は可換、量子物理量は非可換**

- 重ね合わせ状態と干渉効果

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_3^* \\ b_3 & b_2 \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

- $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = a_1|z_1|^2 + a_2|z_2|^2$
- $\langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle = b_1|z_1|^2 + b_2|z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(b_3 z_2^* z_1)$
- 同時対角化できない $\hat{A}$ と $\hat{B}$ だからこそ**干渉項**が現れる。

量子性とは何だろう 4/10

根源的差異は**古典物理量は可換、量子物理量は非可換**

- **Flavor mixing, oscillation**
- mass matrix と interaction matrix が非可換で、同時対角化できず、interaction eigenstate が mass eigenstates の重ね合わせ状態になっているから起こる。

量子性とは何だろう 5/10

根源的差異は**古典物理量は可換、量子物理量は非可換**

- **Kennard-Robertsonの不確定性不等式：**

$$\sigma(\hat{A}) \cdot \sigma(\hat{B}) \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle|$$

- $\langle \hat{A} \rangle := \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle, \quad \sigma(\hat{A})^2 := \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle$

- 非可換性が不確定性に直結している。

量子性とは何だろう 6/10

根源的差異は**古典物理量は可換、量子物理量は非可換**

- **CHSHの不等式の破れ**

- AとB, UとVが非可換。

- U, V の値が ± 1 だからと言って、 $U+V$ の値が ± 2 または 0 だと思ってはいけない。

- 「非可換演算子が同時に測定値を持っている」 と思ってはいけない。

量子性とは何だろう 7/10

根源的差異は**古典物理量は可換、量子物理量は非可換**

- イジングモデル（各項を同時対角化できる）

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{\sigma}_z^i \hat{\sigma}_z^j$$

- ハイゼンベルクモデル（同時対角化できない）

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} (\hat{\sigma}_x^i \hat{\sigma}_x^j + \hat{\sigma}_y^i \hat{\sigma}_y^j + \hat{\sigma}_z^i \hat{\sigma}_z^j)$$

- 量子揺らぎ、量子相転移（絶対零度でも起こる）

量子性とは何だろう 8/10

根源的差異は**古典物理量は可換、量子物理量は非可換**

- ハバードモデル（運動項と局所相互作用項を同時対角化できない）

$$\hat{H} = t \sum_{\langle i,j \rangle} (\hat{c}_{i\uparrow}^\dagger \hat{c}_{j\uparrow} + \hat{c}_{i\downarrow}^\dagger \hat{c}_{j\downarrow}) + U \sum_i (\hat{c}_{i\uparrow}^\dagger \hat{c}_{i\uparrow}) (\hat{c}_{i\downarrow}^\dagger \hat{c}_{i\downarrow})$$

- コールマンの定理：1+1次元のスカラー場モデルでは連続対称性の自発的破れは起きない。つねに場の量子ゆらぎがポテンシャル項に打ち勝つ。場の1点関数（真空期待値）はill-defined, 2点関数もinfra-red divergence.

$$\hat{H} = \int dx \left\{ \hat{\pi}^\dagger \hat{\pi} + \nabla \hat{\phi}^\dagger \cdot \nabla \hat{\phi} - m^2 \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi} + g (\hat{\phi}^\dagger \hat{\phi})^2 \right\}$$

量子性とは何だろう 9/10

根源的差異は**古典物理量は可換、量子物理量は非可換**

- **量子消しゴム (quantum eraser)**
- **弱い値 (weak value)**

量子性とは何だろう 10/10

根源的差異は**古典物理量は可換、量子物理量は非可換**

重力の量子効果は、どういう形で現れるでしょうか？

- グラビトン？
- 干渉効果？（重力源の重ね合わせ状態？ 何と何の非可換性？ポテンシャル g_{00} と潮汐力または2経路の干渉 R_{0101} ？）
- レゲット・ガーク不等式の破れ？
- 量子と古典の境界は？ たんに長さスケールの違いか？

まとめ

- CHSHの不等式は、すべての物理量は測定されていないときも値を持っている、という仮定のもとで導かれる。
- 量子論においては、 A と B , U と V のように同一時空点で定義される物理量演算子は、一般には、非可換であり、同時対角化できない。
- 量子論および実験においては、CHSHの不等式は破れる。
- したがって、非可換物理量は同時には値は客観的には実在しない（文脈依存性 contextuality）
- これぞ量子論の特徴と言える。

ご清聴ありがとうございました。

Thank you for your attention.

This session is open for discussion.