物質情報学 2（物理数学）　担当 谷村　平成 24 年度前期

ノート 6：非斉次連立線形微分方程式

Set of inhomogeneous linear differential equations

A は定数成分を持つ n 次の正方行列，$\boldsymbol{x}(t)$ は未知関数を成分とする n 次元ベクトル，$\boldsymbol{b}(t)$ は既知関数を成分とする n 次元ベクトルとする：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

このとき，非斉次の微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t) \tag{2}$$

を考える．t の関数であることを強調するために $\boldsymbol{b}(t)$ と書いている．この式は

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1(t)\,, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2(t)\,, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n(t) \end{aligned}$$

という n 個の方程式の組に他ならない．

非斉次方程式の解は，斉次方程式の解から**定数変化法** (method of variation of constants) によって求められる．まず，斉次方程式（$\boldsymbol{b}(t) \equiv 0$ の場合）の解は

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\,\boldsymbol{x}(0) \tag{3}$$

であったが，定数ベクトル $\boldsymbol{x}(0)$ の部分を t の関数 $\boldsymbol{y}(t)$ で置き換えて

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\,\boldsymbol{y}(t) \tag{4}$$

とおいて，方程式 (2) に (4) を代入すると，

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \;=\; \frac{d}{dt}(e^{tA}\,\boldsymbol{y}(t)) \;=\; A\,e^{tA}\,\boldsymbol{y}(t) + e^{tA}\,\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} &= A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t) \;=\; A\,e^{tA}\,\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{b}(t) \\ e^{tA}\,\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} &= \boldsymbol{b}(t) \\ \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} &= e^{-tA}\,\boldsymbol{b}(t) \end{aligned} \tag{5}$$

を得る．変数 t を s で置き換えて，s について 0 から t まで積分すると，

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d\boldsymbol{y}}{ds}\,ds = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}(0) &= \int_0^t e^{-sA}\,\boldsymbol{b}(s)\,ds \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{y}(0) + \int_0^t e^{-sA}\,\boldsymbol{b}(s)\,ds \end{aligned} \tag{6}$$

これを (4) を代入すると,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\,\boldsymbol{y}(t) &= e^{tA}\,\boldsymbol{y}(0) + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}\,\boldsymbol{b}(s)\,ds \\ &= e^{tA}\,\boldsymbol{y}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\,\boldsymbol{b}(s)\,ds \qquad (7)\end{aligned}$$

を得る．(4) で $t=0$ とおくと $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{y}(0)$ である．第 2 項は畳み込み積分を使って求められる．ただし，行列とベクトルの積を計算した後で各成分ごとに畳み込み積分を計算しなければならない．以上の結果は次の公式にまとめられる：

公式 (Useful formula)：非斉次連立線形微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

の初期値問題の解は形式的に

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\,\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\,\boldsymbol{b}(s)\,ds \qquad (8)$$

で与えられる．この結果は公式として用いてよい．

例題：

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

を解いてみよう．まず行列 A の固有値問題を解くと，固有値 $\lambda_1=3$, $\lambda_2=5$ と固有ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が得られる．縦ベクトルを並べて行列

$$U = (\boldsymbol{v}_1\,\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathit{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

を定めると， 固有ベクトルの条件式 $A\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ $(i=1,2)$ はまとめて

$$AU = U\mathit{\Lambda}$$

と書かれる．したがって $A = U\mathit{\Lambda}U^{-1}$ であり，

$$e^{tA} = e^{tU\mathit{\Lambda}U^{-1}} = Ue^{t\mathit{\Lambda}}U^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2e^{3t}+4e^{5t} & -8e^{3t}+8e^{5t} \\ e^{3t}-e^{5t} & 4e^{3t}-2e^{5t} \end{pmatrix}$$

を得る（検算：$t=0$ を代入すると単位行列になり，t について微分してから $t=0$ を代入すると A になることを確かめよ）．$\phi_{\alpha,n}(t) = \frac{1}{(n-1)!}\,t^{n-1}\,e^{\alpha t}$ という記法を使うと，

$$e^{tA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2\phi_{3,1}+4\phi_{5,1} & -8\phi_{3,1}+8\phi_{5,1} \\ \phi_{3,1}-\phi_{5,1} & 4\phi_{3,1}-2\phi_{5,1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{3,1} \end{pmatrix}$$

と書ける．行列とベクトルのたたみ込み積は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a*x+b*y \\ c*x+d*y \end{pmatrix}$$

の形で定義される．これらのたたみ込み積は，公式 $\phi_{\alpha,1}*\phi_{\beta,1} = \frac{1}{\alpha-\beta}(\phi_{\alpha,1}-\phi_{\beta,1})$ および $\phi_{\alpha,1}*\phi_{\alpha,1} = \phi_{\alpha,2}$ を用いて計算できる．結果だけを書くと

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{(t-s)A}\, \boldsymbol{b}(s)\, ds &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2\phi_{3,1}+4\phi_{5,1} & -8\phi_{3,1}+8\phi_{5,1} \\ \phi_{3,1}-\phi_{5,1} & 4\phi_{3,1}-2\phi_{5,1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{3,1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5\phi_{3,1}+5\phi_{5,1}-8\phi_{3,2} \\ \frac{3}{2}\phi_{3,1}-\frac{1}{4}\phi_{1,1}-\frac{5}{4}\phi_{5,1}+4\phi_{3,2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．以上より，この例題の解は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= e^{tA}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\, \boldsymbol{b}(s)\, ds \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2e^{3t}+4e^{5t} & -8e^{3t}+8e^{5t} \\ e^{3t}-e^{5t} & 4e^{3t}-2e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5e^{3t}+5e^{5t}-8\,te^{3t} \\ \frac{3}{2}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{5}{4}e^{5t}+4\,te^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる（検算：非斉次項は $t=0$ を代入すると 0 になることを確かめよ）．

演習 6-1．　以下の微分方程式の初期値問題を解け．ただし，初期値問題を解くとは，$x(t)$, $y(t)$ などを $x(0)$, $y(0)$, t の関数で表すことである．なお，これらの問題を解くために，前回のプリントの演習問題の結果を利用してもよい．

$$(1)\quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t - e^{2t} \\ e^t + e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$(3)\quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$(4)\quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$