補足：次元解析

次元解析

単位系の概念をより抽象化したものとして，物理的次元の概念を紹介しよう．本当は，物理的次元の方が，単位系よりも基本的な概念である．

「体積」や「重さ」といった量は，ある種の均質性を備えたものに対して使える概念である．例えば，均質な「水」だからこそ，体積を 2 倍・3 倍したものも水だと言えるし，コップの水とバケツの水を足したものも水だと言える．このように，スカラー倍と和が可能であるような量の同質性・均質性を**次元** (dimension) あるいは物理的次元と呼ぶ．

次元にはいろいろな種類がある．例えば，長さ (length) の次元 L，時間 (time) の次元 T，質量 (mass) の次元 M，面積 (area) の次元 A，体積 (volume) の次元 Vol，エネルギー (energy) の次元 E などがある．ここで L や T は，3 メートルや 12 時間などの具体的な長さや時間ではなく,「抽象的な長さ」や「抽象的な時間」を表すシンボルだと思ってほしい．記号の使い方として，例えば，変数 x が長さの次元を持っていることを

$$[x] = L \tag{1}$$

と書く．また，3m（メートル）のような定量に対しても、

$$[3\mathrm{m}] = L \tag{2}$$

と書く．

足し算または引き算される量は，同質でなくてはならない.「長さ」と「重さ」のような異質な量を足し算しても，どういう質の量になるかわからないからである．つまり，同じ次元を持っている量だけが，足し算・引き算・等号・不等号の対象になる．

しかし，次元の異なる量を掛け算または割り算してもよい．むしろ掛け算・割り算することによって，新しく別の次元の量が定義される．例えば，面積の次元 S は長さの次元 L の 2 乗に等しい：

$$S = L^2 \tag{3}$$

体積の次元 V は長さの次元 L の 3 乗に等しい：

$$\mathrm{Vol} = L^3 \tag{4}$$

速度 (velocity) の次元 Vel は，長さを時間で割った次元に等しい：

$$\mathrm{Vel} = LT^{-1} \tag{5}$$

力 (force) の次元 F はもうちょっと複雑で

$$F = MLT^{-2} \tag{6}$$

に等しい．

物理的に意味のある等式や不等式の各項・両辺は同じ次元を持っていなければならない．例えば，ばねが長さ x だけ伸びたときにばねが縮もうとする力を F とすると，

$$F = -kx \tag{7}$$

という関係式が成り立つが，左辺の次元は

$$[F] = MLT^{-2} \tag{8}$$

であり，右辺の次元は

$$[kx] = [k][x] = [k]L \tag{9}$$

なので，$MLT^{-2} = [k]L$ となることから，

$$[k] = MT^{-2} \tag{10}$$

でなくてはならない．このばねに質量 m の物体がつながっていたとして，m/k という量の次元を求めると，

$$\left[\frac{m}{k}\right] = \frac{M}{MT^{-2}} = T^2 \tag{11}$$

となるから，m/k の平方根は時間の次元を持つ：

$$\left[\sqrt{\frac{m}{k}}\right] = T \tag{12}$$

この時間は，ばね定数 k のばねにつなげられた質量 m のおもりの運動に関係しているはずである．実際，おもりが振動する周期（1 往復の振動をするのに要する時間）には $\sqrt{m/k}$ に比例する．この式だけから，おもりの質量を 4 倍，9 倍にすれば，おもりの振動の周期は 2 倍，3 倍になることがわかる．ばね定数を 4 倍，9 倍にすれば，振動周期は 1/2 倍，1/3 倍になることがわかる．このように物理量の次元を分析することを**次元解析** (dimensional analysis) という．

おもりが重いほど往復振動に要する時間は長くなるだろうし，ばねが強いほど往復時間が短くなるだろうということは直観的に見当がつくが，物理的次元を利用すると，このように正確な分析ができる．

また，次元を使うと，いろいろな計算のチェックが簡単にできる．例えば,「圧力を求めよ」という問題を解いた答えが面積の次元になっていたら，どこかで計算を間違えたか，そもそも出発点の式が間違っていたはずだということになる．

式の途中に「面積＋重さ」のような，次元のそろっていない式が現れたら，それも物理的にあり得ない計算式である．

問 9. 質量 M，長さ L, 時間 T の組み合わせで，以下の量の次元を表せ．速度，加速度，力，仕事，エネルギー，面積，体積，角度，圧力，運動量，角運動量，力積，トルク

問 10. 長さ×運動量，時間×エネルギー，角運動量，圧力×体積の次元を求めよ．

問 11. 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{13}$$

の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{14}$$

で与えられるが，これらの関係式を次元解析の観点から分析・検討せよ．

問 12. 万有引力の法則と運動方程式を組み合わせた式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{15}$$

に次元解析を適用して，ケプラーの第 3 法則（惑星の公転周期 T と惑星の公転半径 R の間に $T^2 \propto R^3$ という比例関係が成立すること）を証明せよ．

問 13. 太陽と惑星の距離が 4 倍または 9 倍になれば，公転周期は何倍になるか．

無次元量

「長さ」を「長さ」で割り算したものや,「重さ」を「重さ」で割り算したものは，何の次元も持たない「ただの数」になる．そういう数を**無次元量** (dimensionless quantity) という．例えば，円周率 π や，角度は無次元量である．無次元量の次元は $[\pi] = M^0L^0T^0$ となる．

問 14. 指数関数や三角関数に代入される変数は，無次元でなくてはならない．理由を言え．