大学で教えてほしい線形代数

谷村省吾

理系の大学の 1，2 年生が履修する数学科目の代表格は解析学（微分積分）と線形代数だろう．線形代数の教え方について問題提起と解決の方針を提案したい．

大学で教える線形代数の標準的内容は，行列の階数 (rank)，行列式，基底，固有値，行列の標準形（対角化）などのようだ．抽象的な体やベクトル空間の定義を最初に導入する先生もいるし，理学部数学科の学生相手でなければそのような抽象概念は後回しにする先生もいるようだ．

それはそれでよいのだが，行列の基本変形や階数の計算練習に多くの時間を費やすのはどうかと思う．いまどき数学者でも，行列の基本変形や階数の手計算が本気で必要だとは思っていないのではないか．行列の基本変形を教えるにしても，「連立 1 次方程式を消去法で解いているのだ」とか「連立方程式の解の多さを知るために階数を数えているのだ」とかの説明なしに行列変形だけを練習させても意味がないだろう．

講義では行列式の説明にも時間をかけている．余因子展開などは，たしかに行列式の特徴ではあるが，いまとなってはそんなに重要な性質とは思えない．

線形代数の講義で，もっと扱ってほしい題材は，抽象ベクトル空間の定義と意義（定義を述べるだけでなく，加群との違いを吟味したり，ユークリッド空間や多項式のなす空間や連続関数のなす空間などの例を挙げたり，抽象化することの意義を説明する），基底と基底変換，双対空間，内積，線形写像と行列表示，関数空間と微分演算子，線形写像の合成と行列の積，ユニタリ行列，エルミート行列の対角化，スペクトル分解などである．ジョルダン標準形もやった方がよいが，対角化できない行列の例を示して吟味する方が教育的で，一般論として標準化定理を証明する必要はないだろう．kernel と image の概念は対にして教えた方がよいし，線形方程式と結び付けて教えた方がよいだろう．また，この段階で rank が登場するのが自然だ．余裕があれば，テンソル積代数や外積代数もやるとよい．テンソル積には「圧力×面積＝力」のような物理量の双線形演算の定式化という意義がある．また，外積代数を知ると，行列式の意味が明瞭になるし，余因子展開も自動的に出て来る．できれば，線形微分方程式の解空間という概念にも触れてほしい．行列の指数関数を用いて連立微分方程式を解くのもよい．「それは解析学の問題だ」などと言わずに，そうした方が固有値・固有ベクトルの幾何学的意味もよくわかる．さらに，フーリエ級数や量子力学に触れてもよい．竹内外史氏も「線形代数の一番よい応用は量子力学で，量子力学を勉強してみて初めて線形代数の概念の発生理由がわかることが多い」と著書『線形代数と量子力学』に書いている．私自身の学習体験でも，フーリエ級数や量子力学を学んだときに，ようやく線形代数がわかったと思ったものだ．

線形代数の話がある程度済んだ段階で，群や環や体の一般論を紹介するのもよい．とくに数の拡張概念として $\mathbb{Z}_p$ や $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ や $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ を知ると，それだけでも世界が広がった気がするので，学生の数学観を育てるのによい題材である．また，有理数や実数体上で

$$\sqrt{2} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{-1} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という対応を扱うのも教育的だと思う．この延長として，四元数の 2 次複素数行列表示に触れるのもよい．さらに頑張ると，四元数と回転群の関係や，リー群の連結性やホモトピーの概念にも通じる．

線形代数というと，とりあえず理系の必修科目という感覚が強いが，せっかくなら数学としての豊かな広がりを持たせるように教えてほしいと思うのである．

（たにむら　しょうご／名古屋大学）