

2013年12月11-13日

神戸大学大学院理学研究科にて特別講義「素粒子理論特論 A」

現代数学と量子論

谷村 省吾

名古屋大学大学院情報科学研究科

1 いまどきの観測理論：「シュレーディンガーの猫」は真の問題ではない

最近の学生さんは量子力学の観測問題(measurement problem)についてどう思っているだろうか？ 観測問題とは、「重ね合わせ状態の量子系を観測すると途端に波動関数が収縮するというが、それは本当か？波束の収縮はいつ、どのようなメカニズムで起きるのか？波束は超光速で収縮するのか？因果律は破れないのか？」とか「波動関数の確率解釈は正しいのか？それ以外の解釈はあり得ないのか？」とか「ミクロ量子系とマクロ古典系の境目はどこにあるのか？観測者の定義は何か？観測者は知性を持った人間でないといけないのか？」、「測定していないときのミクロ系は実在しているのか？」とかいった問題を指す。一通りの量子力学に慣れて満足している人たちには「そんなことを疑ってもしかたないだろう、そんなもん物理学の問題にならないだろう」と言われて相手にされないことの多い問題である。

ところが最近、観測問題が、まじめな、物理学上の問題として取り上げられるようになってきた。その理由はいろいろあるが、観測問題を扱うための数学的概念が整備されてきて「自我」や「自由意思」のような曖昧な概念を介入させずに観測問題を淡々と記述・分析できるようになってきた、量子情報科学という分野が勃興して観測問題を正面切って扱おうという機運が高まってきた、そもそも量子暗号や量子計算機を思いついた人が観測問題に関心の高い人たちだった、量子暗号や量子計算は、ある意味、観測問題のアイデアを利用している、電子デバイスの微細加工技術が進歩したおかげで、昔は思考実験でしか議論できなかったことがリアルな実験で検証できるようになってきた、若者たちは観測問題に対して先入観を持っておらず固定観念に凝り固まっていないのでフレッシュな気持ちで観測問題に取り組むことができる、などといった理由が挙げられる。

たしかに、昔の観測問題は、そもそも問題の立て方が悪すぎて、答えようのない悪問になっていたり、本当は問題としなくてよいことを日常言語の意味に引きずられてわざわざ問題にしていた感がある。例えば、シュレーディンガーの猫や、ウィグナーの友人と呼ばれる、観測問題の古典的なパラドクスが「悪問」の例である。この講義が終わる頃には、これらのパラドクスは解消した気分になってもらいたい。

2 遅延選択実験・量子消去

素朴な「波束の収縮」描像では理解しにくい現象として次の実験を解説する。1) 監視付きダブルスリット実験, 2) 量子消去, 3) 遅延選択実験, 4) 遅延選択量子消去実験

3 代数的量子論：ヒルベルト空間要らずの量子論

力学とは（古典力学だろうと量子力学だろうと熱力学だろうと）「系(system)・状態(state)・物理量(observable)・値(value)・運動(dynamics, transformation)」の五者のありようと関係を記述する理論である。この観点からすると、古典力学と量子力学は、物理量代数が可換か非可換かという違いしかない。

代数的量子論(algebraic quantum theory)では、和・積・スカラー倍・対合という演算規則を持つ「物理量の集合」がマイクロ系に内在することを前提とする。「状態」は、マイクロ系に内在している「物理量」をマクロ世界の側で見える「測定値」に変換するインターフェイスである。

代数的量子論を従来のフォンノイマン流の量子力学の定式化と比べるなら、天下りの公理的要件としてヒルベルト空間の存在を認めるのがフォンノイマン流であり、必要とあればいつでも構成・調達・変更できる便利な計算道具としてヒルベルト空間を位置付けるのが代数的アプローチの特徴である。

代数的量子論のための最低限の数学を解説する。以下、キーワード列挙：

- 3.1 環・体・ベクトル空間・代数・群・加群
- 3.2 零因子・イデアル・商環
- 3.3 位相空間・距離空間・完備性・完備化
- 3.4 ノルム・内積・バナッハ空間・ヒルベルト空間・可分なヒルベルト空間
- 3.5 線形作用素
- 3.6 有界線形関数とリース(Riesz)の表現定理
- 3.7 随伴(共役)作用素
- 3.8 自己共役作用素・射影作用素・ユニタリ作用素
- 3.9 作用素のノルム・有界作用素
- 3.10 C*代数
- 3.11 代数の表現
- 3.12 物理量代数
- 3.13 スペクトル値
- 3.14 状態と期待値
- 3.15 純粋状態と混合状態
- 3.16 GNS 構成
- 3.17 可換代数とゲルファント・ナイマルク双対性と確率解釈
- 3.18 非可換代数としての量子系

- 3.19 非可換性と干渉効果
- 4 量子測定理論
 - 4.1 事象・状態・確率
 - 4.2 確率則（読み取り値を決める規則）と遷移則（測定後の状態を決める規則）
 - 4.3 POVM・CP 写像・インストルメント・間接測定モデル
 - 4.4 隠れた変数理論(hidden-variable theory)
 - 4.5 ベルの不等式（ミステリー姉妹, マーミンの野球原理その他）
 - 4.6 コッヘン・シュペッカーの定理
 - 4.7 マーミンの魔法陣
 - 4.8 小澤の不確定性不等式
 - 4.9 測定理論に対する不満（現在の量子測定理論は決して必要十分なものではない）
- 5 圏論入門
 - 5.1 圏・対象・射・関手・自然変換
 - 5.2 直積と直和
 - 5.3 線形空間の圏
- 6 テンソル代数と量の理論
 - 6.1 数と量の概念
 - 6.2 双対性
 - 6.3 多重線形写像とテンソル積
 - 6.4 外積代数
 - 6.5 向き付けと捩形式
 - 6.6 計量と随伴構造
 - 6.7 代数的量子論におけるテンソル積と合成系
- 7 微分幾何学と物理への応用
 - 7.1 多様体
 - 7.2 ベクトル場と微分形式
 - 7.3 ホモロジー
 - 7.4 コホモロジー
 - 7.5 電磁気学
 - 7.6 解析力学
 - 7.7 ゲージ理論
- 8 次元解析と超選択則
- 9 古典から量子へ
 - 9.1 幾何学的量子化(Geometric quantization)
 - 9.2 変形量子化(Deformation quantization)

参考文献：

- [1] I. E. Segal, “Irreducible representations of operator algebras,” Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 73 (1947), “Postulates for general quantum mechanics,” Ann. Math. **48**, 930 (1947).
- [2] J. von Neumann (M. Redei, editor), Selected Letters, History of Mathematics Vol. 27, AMS (2005), p. 59. “I would like to make a confession which may seem immoral: I do not believe absolutely in Hilbert space any more.”
- [3] 梅垣壽春, 大矢雅則, 日合文雄「作用素代数入門 : Hilbert 空間より von Neumann 代数」共立出版
- [4] O. Bratteli, D. W. Robinson, “Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1, 2,” Springer
- [5] 荒木不二洋「量子場の数理」岩波書店
- [6] R. Haag, “Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras,” Springer
- [7] マーミン (町田茂 訳) 「量子のミステリー」丸善
- [8] 佐藤文隆「アインシュタインの反乱と量子コンピュータ」京大出版会
- [9] 筒井泉「量子力学の反常識と素粒子の自由意思」岩波書店
- [10] W. F. Stinespring, “Positive functions on C^* -algebras,” Proc. Am. Math. Soc. **6**, 211 (1955).
- [11] M. Ozawa, “Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements,” Ann. Phys. **311**, 350 (2004).
- [12] 谷村省吾「21 世紀の量子論入門」, 雑誌『理系への数学』(現代数学社) に 2010 年 5 月から 2012 年 4 月まで連載. 代数的アプローチによる量子力学の解説. 単行本化の予定.
- [13] 谷村省吾「トポロジー・圏論・微分幾何 — 双対性の視点から」数理科学 SGC ライブラリ 52, サイエンス社
- [14] 谷村省吾「光子の逆説」 日経サイエンス 2012 年 3 月号 pp. 32-43.
- [15] 谷村省吾「量子の地平線 : 揺らぐ境界—非実在が動かす実在」 日経サイエンス 2013 年 7 月号 pp. 36-45.
- [16] 谷村省吾「量子古典対応 : 量子化の技法, 古典系創発の機構」数理科学 2012 年 4 月号 pp. 19-25.
- [17] 谷村省吾「波動関数は実在するか — 物質的存在ではない. 二つの世界をつなぐ窓口である」 数理科学 2013 年 12 月号 pp. 14-21.
- [18] S. Tanimura, “Superselection rules from measurement theory,” arXiv: 1112.5701 (2011).
- [19] 谷村省吾「測定理論から見た超選択則」素粒子論研究電子版 Vol. 14, No. 5 (2013).
- [20] 谷村省吾「エキゾチックな対称性の破れとゲージ場の幾何学」素粒子論研究 106

巻 6 号, F2-21 (2003 年 3 月). 双対性についての解説あり. 谷村の web page にも掲載.

- [21] V. Jacques, et al., “Experimental realization of Wheeler’s delayed-choice gedanken experiment,” *Science* **315**, 966 (2007)
- [22] U. Eichmann and W. M. Itano et al., “Young’s interference experiment with light scattered from two atoms,” *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2359 (1993)
- [23] S. Durr, T. Nonn, G. Rempe, “Origin of quantum-mechanical complementarity probed by a ‘which-way’ experiment in an atom interferometer,” *Nature* **395**, 22 (1998)
- [24] S. Durr, T. Nonn, G. Rempe, “Fringe visibility and which-way information in an atom interferometer,” *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5705 (1998)
- [25] S. P. Walborn et al., “Double-slit quantum eraser,” *Phys. Rev. A* **65**, 033818 (2002)
- [26] Y.-H. Kim and M. O. Scully et al., “Delayed choice quantum eraser,” *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1 (2000)
- [27] D. Mermin, “Hidden variables and the two theorems of John Bell,” *Rev. Mod. Phys.* **65**, 803 (1993).
- [28] J. Conway, S. Kochen, “The free will theorem,” *Found. Phys.* **36**, 1441 (2006).