2011 年 9 月 5 日

圏論と群の表現論と量子力学[1]

谷村 省吾

名古屋大学大学院情報科学研究科

圏論の視点・表記法を使って群の表現論を構築し，表現論の物理への応用，主に量子力学への応用を解説する．しかし Lie 代数の分類やすべての表現の構成方法などは解説しない．

1　序

群論・表現論・圏論の考え方を概観する．それらが物理とどう関わるのか論じる．

2　圏論

2.1　圏

圏 (category) とは，**対象** (object) と呼ばれる $a, b, c, \cdots$ と，対象 a から出て対象 b に入る**射** (arrow, morphism) と呼ばれる矢印

$$f : a \to b \tag{2.1}$$

あるいは

$$a \xrightarrow{f} b \tag{2.2}$$

と書かれる矢印の集まりで，以下の公理を満たすものである．
(圏の公理 1：合成) 射 $f : a \to b$ と射 $g : b \to c$ があれば，これらの**合成** (composite) の射 $g \circ f : a \to c$ が一意的に定められる：

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & b \arrow[d, "g"] \\ & c \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

(圏の公理 2：結合律) 射の系列

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d \tag{2.4}$$

があったときに

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \tag{2.5}$$

が成り立つ．つまり，合成射 $g \circ f$ に引き続いて h を合成してできる射と，合成射 $h \circ g$ に f をつけ足してできる射は同じ射である：

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] \arrow[drr, dotted, no head] & b \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\ & c \arrow[r, "h"'] & d \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

[1]2011 年 9 月 5〜7 日，大阪市立大学「応用物理学特別講義」資料．

(圏の公理 3：恒等射) 各対象 b に対して $1_b : b \to b$ という射があり，任意の射 $f : a \to b$ に対して

$$1_b \circ f = f \tag{2.7}$$

と，任意の射 $g : b \to c$ に対して

$$g \circ 1_b = g \tag{2.8}$$

が成り立つ．1_b を b に対する**恒等射** (identity arrow) といい，id_b とも書く．恒等射は矢印の代わりに二重線で記すことがある：

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & b \arrow[d, equal, "1_b"] \arrow[dr, "g"] & \\
& b \arrow[r, "g"'] & c
\end{tikzcd} \tag{2.9}$$

以上 3 つの条件を満たす対象と射の集まりを圏と呼ぶ．一つの圏を $\mathscr{C}$（飾り文字の C）という記号で表すことにする．圏 $\mathscr{C}$ の対象 a, b について a から b への射全体の集合を $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(a, b)$ と書き，hom-set と呼ぶ．

2.2　射の性質

射に関する用語をもう少し導入する．ある対象からその対象自身への射 $a \to a$ を a の**自己準同形射** (endomorphism) という．射 $f : a \to b$ に対して射 $f' : b \to a$ と $f'' : b \to a$ で，

$$f \circ f' = 1_b \qquad f'' \circ f = 1_a, \tag{2.10}$$

を満たすものがあれば，f' を f の**右逆射** (right inverse) といい，f'' を f の**左逆射** (left inverse) という．右逆射と左逆射が存在すれば

$$f' = 1_a \circ f' = (f'' \circ f) \circ f' = f'' \circ (f \circ f') = f'' \circ 1_b = f'' \tag{2.11}$$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, equal, "1_b"'] & a \arrow[d, "f"] \arrow[dr, equal, "1_a"] & \\
& b \arrow[r, "f''"'] & a
\end{tikzcd}$$

となるので両者は一致する．このようなとき，$f' = f''$ を f の**逆射** (inverse) といい $f' = f^{-1}$ と書く．上に示したことから，逆射はあれば一意的である．逆射は存在することを，f は**可逆** (invertible)，あるいは**同形射** (isomorphism) であるという．また，このとき対象 a と b はこの圏において**同形** (isomorphic) であるといい，$a \cong b$ と書く．とくに $a \to a$ という同形射を a の**自己同形射** (automorphism) という．

演習：集合の圏 Set においては，単射であることと左逆射が存在することは同値である．全射であることと右逆射が存在することは同値である．そのことを証明せよ．

圏に含まれている対象や射が無数にあってそれらすべてを書き尽くすことは不可能であったり，たとえ有限個であっても全部を書くのは煩わしかったりするので，たいていは注目したい対象と射だけを抜き出して図式を書く．射 $f_1 : a_1 \to a_2$，$f_2 : a_2 \to a_4$，$f_3 : a_1 \to a_3$，$f_4 : a_3 \to a_4$ があって，

$$f_2 \circ f_1 = f_4 \circ f_3 \tag{2.12}$$

という関係があるとき，対応する図式を**可換図式** (commutative diagram) という．下図のように真ん中に輪になった矢印を書いて可換図式を示すことがある．どの矢印をたどっても a_1 から a_4 に至る合成射は同じ射になるということを可換図式は意味している．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_3"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & a_2 \arrow[d, "f_2"] \\
a_3 \arrow[r, "f_4"'] & a_4
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g_1"] \arrow[dr, "g_3"'] & \bullet \arrow[d, "g_2"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft", near start] \\
& \bullet
\end{tikzcd}
\tag{2.13}
$$

可換図式は正方形とは限らない．例えば上図の右の可換図式は $g_2 \circ g_1 = g_3$ を表している．輪になった矢印は煩わしいのでいちいち書かないこともある．可換図式は，任意の経路が定める合成射は経路のホモトープな変形によって変わらない，という性質で特徴付けられる．この性質が可換図式の計算規則だと言ってもよい．

2.3　亜群

すべての射が可逆であるような圏を**亜群** (groupoid) と呼ぶ．

2.4　群

対象が一つだけあり，すべての射が可逆であるような圏を**群** (group) と呼ぶ．

2.5　圏の例

Set, *Top*, *Grp*, *Mod*, Vct_K, Pos (partially ordered set), $P(X)$

2.6　関手

圏 $\mathscr{C}$ と圏 $\mathscr{D}$ があったとき，$\mathscr{C}$ の各対象 a, b に $\mathscr{D}$ の対象 Fa, Fb を対応させ，$\mathscr{C}$ の各射 $f : a \to b$ に $\mathscr{D}$ の射 $Ff : Fa \to Fb$ を対応させる F が条件

$$F(g \circ f) = Fg \circ Ff \tag{2.14}$$

$$F(1_a) = 1_{Fa} \tag{2.15}$$

を満たすとき，F を圏 $\mathscr{C}$ から圏 $\mathscr{D}$ への**共変関手** (covariant functor) あるいはたんに**関手**(かんしゅ)(functor) という．あまり普及していない記法だが，関手による対応を $F : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ あるいは対象ごとに $a \rightsquigarrow Fa$，射ごとに $f \rightsquigarrow Ff$ と書くことにする．関手は，たんに対象を対象に移す写像ではなく，ある圏の射のネットワークを別の圏の中の射のネットワークに写し取る操作であることに注意してほしい．

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{C} & a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & b \arrow[d, "g"] \arrow[rr, squiggly, "F"] & & Fa \arrow[r, "Ff"] \arrow[dr, "F(g \circ f) = Fg \circ Ff"'] & Fb \arrow[d, "Fg"] & \mathscr{D} \\
& & c \arrow[rr, squiggly, "F"] & & & Fc &
\end{tikzcd}
\tag{2.16}
$$

また，$\mathscr{C}$ の各対象 a, b に $\mathscr{D}$ の対象 Ga, Gb を対応させ，$\mathscr{C}$ の各射 $f : a \to b$ に $\mathscr{D}$ の射 $Gf : Gb \to Ga$ を対応させる G が条件

$$G(g \circ f) = Gf \circ Gg \tag{2.17}$$

$$G(1_a) = 1_{Ga} \tag{2.18}$$

を満たすとき，G を圏 $\mathscr{C}$ から圏 $\mathscr{D}$ への**反変関手** (contravariant functor) という．反変関手で写し取った射の向きが反転していて，合成される射の順序も入れ替わっていることに注意してほしい．

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} & a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & b \arrow[d, "g"] & {} \arrow[r, squiggly, "G"] & {} & Ga & Gb \arrow[l, "Gf"'] & \mathscr{D} \\
 & & c & {} \arrow[r, squiggly, "G"] & {} & & Gc \arrow[u, "Gg"'] \arrow[ul, "G(g\circ f)=Gf\circ Gg"] &
\end{tikzcd} \tag{2.19}$$

共変関手 $F : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ があったとき，$\mathscr{C}$ の対象 a と b が同形ならば，関手 F によって対応する $\mathscr{D}$ の対象 Fa と Fb も同形である．なぜなら，a と b が同形であるとは，(2.10) で定義したように，射 $f : a \to b$ と $f' : b \to a$ で

$$f' \circ f = 1_a, \qquad f \circ f' = 1_b \tag{2.20}$$

を満たすものがあるということであり，このとき関手 F によって対応する射 $F(f) : Fa \to Fb$ と $F(f') : Fb \to Fa$ も，関手の性質 (2.14), (2.15) により

$$F(f') \circ F(f) = 1_{Fa}, \qquad F(f) \circ F(f') = 1_{Fb} \tag{2.21}$$

を満たす．したがって，Fa と Fb は圏 $\mathscr{D}$ で同形な対象である．

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[d, equal, "1_a"'] \arrow[dr, "f"] & & {} \arrow[r, squiggly, "F"] & {} & Fa \arrow[d, equal, "1_{Fa}"'] \arrow[dr, "Ff"] & & \\
\mathscr{C} & a \arrow[dr, "f"'] & b \arrow[l, "f'"] \arrow[d, equal, "1_b"] & {} \arrow[r, squiggly, "F"] & {} & Fa \arrow[dr, "Ff"'] & Fb \arrow[l, "Ff'"] \arrow[d, equal, "1_{Fb}"] & \mathscr{D} \\
 & & b & {} \arrow[r, squiggly, "F"] & {} & & Fb &
\end{tikzcd} \tag{2.22}$$

この結果は形式的に

$$a \cong b \ \Rightarrow \ Fa \cong Fb \tag{2.23}$$

とまとめられる．いま，共変関手の場合について証明したが，反変関手の場合についても同様に

$$a \cong b \ \Rightarrow \ Ga \cong Gb \tag{2.24}$$

が成り立つ．

2.7 関手の例

共変べき集合関手 $P : Set \rightsquigarrow Set$, 反変べき集合関手 $\bar{P} : Set \rightsquigarrow Set$, 単調増加関数 $\phi : \mathrm{Pos} \rightsquigarrow \mathrm{Pos}'$, 双対空間 $* : Vct_K \rightsquigarrow Vct_K$, 忘却関手 $U : Grp \rightsquigarrow Set$, 加群生成関手 $G : Set \rightsquigarrow Mod$, ベクトル空間生成関手 $G : Set \rightsquigarrow Vct_K$, 自由群生成関手 $G : Set \rightsquigarrow Grp$

2.8　自然変換

圏 $\mathscr{C}$ から圏 $\mathscr{D}$ への共変関手 F, F' があったとき，F から F' への**自然変換** (natural transformation) $T : F \Rightarrow F'$ とは，$\mathscr{C}$ の各対象 a に対して $\mathscr{D}$ の射 $T_a : Fa \to F'a$ を対応させるものであり，任意の対象 a, b と任意の射 f に対して

$$\begin{tikzcd}
 & & & & Fa \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "T_a"] & Fb \arrow[d, "T_b"] & \\
\mathscr{C} & a \arrow[r, "f"] & b & {} \arrow[ur, rightsquigarrow, "F"] \arrow[dr, rightsquigarrow, "F'"'] & & & \mathscr{D} \\
 & & & & F'a \arrow[r, "F'f"'] & F'b &
\end{tikzcd} \tag{2.25}$$

という可換図式が成り立つことを言う．

例：Vct における成分表示は共変関手である．基底が関手であると言ってもよい．Vct における基底変換は自然変換である．

3　群論の基礎

3.1　群の例

整数群 $\mathbb{Z}$, 巡回群 $\mathbb{Z}_n$, 正多角形群，正多面体群，置換群 $\mathfrak{S}_n$, $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$, $SO(n)$, $U(1)$, $U(n)$, $SU(n)$, 並進群 $\mathbb{R}^n$, ユークリッド群 $E(n) = O(n) \rtimes \mathbb{R}^n$, アフィン変換群，射影変換群

同形な群，3 通りの定義：

$$U(1) := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\} = \{e^{i\theta}\,;\, \theta \in \mathbb{R}\}, \tag{3.1}$$

$$\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \tag{3.2}$$

$$SO(2) := \{g \in M(2, \mathbb{R});\, g^\top g = \mathbf{1},\, \det g = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix};\, \theta \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.3}$$

内包的定義と外延的定義の区別に注意．また，位相の入れ方がそれぞれ異なるが，結果的に同相になることにも注意．

3.2　群の構造

可換・非可換，部分群，準同形，同形，直積群，自己同形変換群，半直積 $N \rtimes K$

左移動，右移動，どちらも全単射，左移動と右移動の双対性，剰余類，随伴作用（内部自己同形），正規部分群（＝不変部分群），商群（剰余群），準同形定理

演習：鏡映を含む正四面体群に対して群表を書き，部分群をすべて列挙せよ．また共役類を列挙せよ．正規部分群があれば示せ．その正規部分群による剰余群を述べよ．正六面体群についても同様の分析を行え．

3.3　位相群

位相群，Lie 群，コンパクト，離散，局所コンパクト

3.4 群作用を受ける空間

$G \curvearrowright X$, $G \to \mathrm{Aut}X$, 軌道，不動点（不変元），等方群（固定化群，小群），等質空間，表現空間，共役類

4 構造を持ったベクトル空間

4.1 ベクトル空間の常識

部分空間，補空間，直和空間，商空間，線形写像，基底，数ベクトル表示，行列表示

4.2 線形位相空間

距離空間，ノルム空間，Banach 空間，完備性

4.3 双線形形式を付与されたベクトル空間

内積空間（Euclid 空間），Minkowski 空間，シンプレクティック空間，複素内積空間，Hilbert 空間

4.4 構造を保つ変換

等長変換，Lorentz 変換，シンプレクティック変換，ユニタリ変換，体積保存変換，共形変換（等角写像）．ただし，シンプレクテック群の定義は $Sp(n) = \{g \in U(2n);\, g^\top J_n g = J_n\}$ であり，正準変換群とは一致しない．

4.5 テンソル代数

双対空間，テンソル積空間，テンソル代数，外積代数

5 群の表現

5.1 表現の基礎概念

群の表現，定義表現，ユニタリ表現，制限表現，直和表現，不変部分空間，部分表現，既約，可約，完全可約，連続表現.

以下，有限次元表現，もしくは Hilbert 空間上の連続表現を考える．とくに断りがなければ，ユニタリ表現である必要はない.

5.2 圏論から見た表現論

群は圏，表現は関手，繫絡(けいらく)作用素 (intertwining operator, intertwiner) は自然変換.

$$\begin{tikzcd} & & & & V \arrow[r, "\pi(g)"] \arrow[dd, "T"] & V \arrow[dd, "T"] & \\ G & * \arrow[r, "g"] & * & \arrow[ur, squiggly, "\pi"] \arrow[dr, squiggly, "\pi'"'] & & & Vct \\ & & & & V' \arrow[r, "\pi'(g)"'] & V' & \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

という可換図式が成り立つ.

群 G の 2 つの表現 (π, V) から (π', V') への繫絡作用素全体を $\mathrm{Hom}_G(V, V')$ と書く．これはベクトル空間になる．また，$\mathrm{Hom}_G(V, V)$ は環（代数）になる.

表現の同値，ユニタリ同値表現，表現の分解, Schur の補題

Schur（シューア）の補題：群 G の 2 つの既約表現 π, π' が作用する $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間をそれぞれ V, V' とし，V, V' の少なくとも一方は有限次元と仮定する．連続線形写像 $T : V \to V'$ が繫絡作用素だとする．つまり

$$\forall g \in G, \qquad T\pi(g) = \pi'(g)T \tag{5.2}$$

を満たすとする．このとき，

(i) π と π' が同値でないならば $T = 0$.

(ii) π と π' が同値であるとし，同形写像 $I : V \to V'$ を一つ選ぶ．このとき $T = \lambda I$ となるような $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在する．とくに，$\pi = \pi'$ ならば $T = \lambda\, \mathrm{id}_V$ である.

【証明】

(1) $\mathrm{Ker}\, T$ と $\mathrm{Im}\, T$ は G 不変部分空間である.

(2) T は連続写像だから，$\mathrm{Ker}\, T$ は V の閉部分空間．V が有限次元ならば，$\mathrm{Im}\, T$ は Hilbert 空間 V' の有限次元部分空間なので閉部分空間．V' が有限次元ならば，$\mathrm{Im}\, T$ は V' の閉部分空間．いずれにしても $\mathrm{Im}\, T$ は V' の閉部分空間.

(3) $T \neq 0$ とする．(π, V) は既約表現だから $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$．(π', V') は既約表現だから $\mathrm{Im}\, T = V'$．従って，T は線形同形写像である．ゆえに π と π' は同値表現である．このことの対偶が (i) である.

(4) (ii) の場合を考える．T の代わり $I^{-1} \circ T$ をとれば $(\pi', V') = (\pi, V)$ としてよい．$T : V \to V$ は有限次元の複素ベクトル空間の線形変換だから，T の固有値 λ が少なくとも 1 つは存在する（複素数体でないとこのことは言えない）．条件 (5.2) より，$T - \lambda \mathrm{id}_V$ もまた $\pi(g)$ と可換なので，$\mathrm{Ker}\,(T - \lambda \mathrm{id}_V)$ は V の G 不変部分空間である．いま，

$$\{0\} \subsetneqq \mathrm{Ker}\,(T - \lambda \mathrm{id}_V) \subset V \tag{5.3}$$

であり，(π, V) は既約なので $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda \mathrm{id}_V) = V$ でなければならない．従って，$T = \lambda \mathrm{id}_V$ である【証明終了】

定理：群 G の複素有限次元表現 (π, V) について

$$(\pi, V) \text{ が既約表現} \Leftrightarrow \text{「}\exists T : V \to V \text{ 線形}, \forall g \in G, T\pi(g) = \pi(g)T \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, T = \lambda \mathrm{id}_V\text{」} \tag{5.4}$$

定理：可換群の既約表現は 1 次元である．

5.3 派生表現

テンソル積表現，反傾表現（双対表現），反対称積，対称積，外部テンソル積表現 (outer tensor product representation) $\pi_1 \boxtimes \pi_2$

6 Lie 代数

6.1 Lie 群から Lie 代数へ

微分多様体，Lie 群の随伴作用，Lie 括弧積，Jacobi identity, 不変ベクトル場，指数写像，部分代数，イデアル，商 Lie 代数，Lie 代数の準同形定理

6.2 Lie 代数の例

Lie 群 G に付随する Lie 代数をドイツ文字 $\mathfrak{g}$ で表す．$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{o}(n)$, $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{o}(1,3)$

6.3 被覆群

$\mathbb{R} \to U(1)$, $SU(2) \to SO(3)$, $SL(2,\mathbb{C}) \to SO^{\uparrow}(1,3)$

7 Peter-Weyl の理論

7.1 不変測度

測度，Baire（ベール）測度（コンパクトな台を持つ連続関数がすべて可測・有限積分値であるような，位相空間上の測度），左不変測度，右不変測度，両側不変測度＝ Haar（ハール）測度，モジュラー関数

定理：局所コンパクト位相群には 0 でない左不変 Baire 測度と右不変 Baire 測度が存在する．それらは正の実数倍を除いて一意的である．

定理：コンパクト位相群 G には $\int_G dg = 1$ を満たす Haar 測度が一意的に存在する．

例題：$SU(2)$ の Haar 測度を求めよ．規格化もせよ．

例題：左不変測度と右不変測度が一致しない例を挙げよ．モジュラー関数を求めよ（小林・大島 p.84, 山内・杉浦 p.64）．

例題：非コンパクト群では必ず左不変測度が右不変測度が一致しない，というわけではない．$GL(2,\mathbb{R})$ で左不変測度が右不変測度が一致することを確認せよ（小林・大島 p.87）．

定理：コンパクト位相群 G の Haar 測度を dg とする．G のユニタリとは限らない表現 (π, V) において，任意の $v \in V$ に対し

$$\tilde{v} := \int_G \pi(g) v \, dg \tag{7.1}$$

を定めると $\tilde{v}$ は G 作用に関して不変元である．つまり任意の $h \in G$ に対して

$$\begin{aligned} \pi(h)\tilde{v} &= \pi(h) \int_G \pi(g) v \, dg \\ &= \int_G \pi(h)\pi(g) v \, dg \\ &= \int_G \pi(hg) v \, dg \\ &= \int_G \pi(g) v \, dg \\ &= \tilde{v} \end{aligned} \tag{7.2}$$

が成り立つ．つまり，群平均によって群不変元が得られる．

定理：コンパクト位相群のどのような表現もユニタリ表現と同値である．

7.2 Schur の直交関係式

定理：$(\pi, V), (\pi', V')$ をコンパクト群 G の既約ユニタリ表現とする．V, V' の少なくとも一方は有限次元と仮定する．dg は規格化された Haar 測度とする．このとき，任意の $v, w \in V$, $v', w' \in V'$ に対して

$$\int_G \overline{\langle v, \pi(g) w \rangle} \, \langle v', \pi'(g) w' \rangle \, dg = \begin{cases} 0 & (\pi \not\cong \pi') \\ \frac{1}{\dim V} \, \langle v', v \rangle \langle w, w' \rangle & (\pi = \pi') \end{cases} \tag{7.3}$$

が成立する．さらに V, V' の規格直交基底を選んで $\pi(g)$, $\pi'(g)$ の行列成分を $\pi_{ij}(g)$, $\pi'_{kl}(g)$ とすると

$$\int_G \overline{\pi_{ij}(g)} \pi'_{kl}(g) \, dg = \begin{cases} 0 & (\pi \not\cong \pi') \\ \frac{1}{\dim V} \, \delta_{ik}\delta_{jl} & (\pi = \pi') \end{cases} \tag{7.4}$$

【証明】段階を区切って証明を進める．

(1) 半双線形写像

$$\begin{array}{rcl} A : V \times V' & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V', V) \\ (v, v') & \mapsto & A_{v,v'} : \quad \begin{array}{rcl} V' & \to & V \\ w' & \mapsto & A_{v,v'}(w') := v\langle v', w' \rangle \end{array} \end{array} \tag{7.5}$$

を定める．$v \neq 0$, $v' \neq 0$ のとき $\mathrm{Im}\, A_{v,v'} = \mathbb{C}v \subset V$ は 1 次元部分空間.

(2) 線形写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V') \to \mathrm{Hom}_G(V, V'), \quad B \mapsto \tilde{B} := \int_G \pi(g) \circ B \circ \pi'(g^{-1}) \tag{7.6}$$

が定める $\tilde{B}$ は任意の $h \in G$ に対し

$$\tilde{B}\pi'(h) = \pi(h)\tilde{B} \tag{7.7}$$

を満たすので，$\tilde{B}$ は表現 (π', V') から (π, V) への intertwiner である．

(3) (7.6) を $A_{v,v'}$ に適用して定められる $\widetilde{A_{v,v'}}$ は既約表現 (π', V') から (π, V) への intertwiner なので，Schur の補題より，$\pi \cong \pi'$ でなければ $\widetilde{A_{v,v'}} = 0$ である．$\pi = \pi'$ ならば

$$\widetilde{A_{v,v'}} = \lambda\, \mathrm{id}_V \tag{7.8}$$

となる $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在する．

(4) 従って，(7.3) の左辺は

$$\int_G \langle w, \pi(g)^\dagger v\rangle \langle v', \pi'(g) w'\rangle\, dg = \langle w, \widetilde{A_{v,v'}} w'\rangle = \begin{cases} 0 & (\pi \not\cong \pi') \\ \lambda \langle w, w'\rangle & (\pi = \pi') \end{cases} \tag{7.9}$$

となる．

(5) $\pi = \pi'$ のとき，(7.8) の両辺のトレースをとると

$$\mathrm{Tr}\, \widetilde{A_{v,v'}} = \mathrm{Tr}\, A_{v,v'} = \langle v', v\rangle = \lambda\, \mathrm{Tr}(\mathrm{id}_V) = \lambda \dim V \tag{7.10}$$

となるので，

$$\lambda = \frac{1}{\dim V} \langle v', v\rangle \tag{7.11}$$

以上で (7.3) が示された．【証明終了】

7.3 展開公式

コンパクト群 G の規格化 Haar 測度 dg によって関数空間

$$L^2(G) := \{\psi : G \to \mathbb{C} \mid \int_G |\psi(g)|^2 dg < \infty\} \tag{7.12}$$

を定め，内積を

$$\langle \phi, \psi\rangle := \int_G \overline{\phi(g)} \psi(g)\, dg \tag{7.13}$$

で定めると $L^2(G)$ は Hilbert 空間．

$$\pi_L(h)\psi(g) := \psi(h^{-1}g), \qquad \pi_R(h)\psi(g) := \psi(gh) \tag{7.14}$$

を定めると π_L, π_R はともに $L^2(G)$ 上の群 G のユニタリ表現になる．これらをそれぞれ左正則表現，右正則表現という．$\pi_L \boxtimes \pi_R$ は $G \times G$ の $L^2(G)$ 上のユニタリ表現を与える：

$$((\pi_L \boxtimes \pi_R)(h_l, h_r)\psi)(g) := \psi(h_l^{-1} g h_r) \tag{7.15}$$

コンパクト群 G のユニタリ既約表現の同値類全体の集合を $\hat{G}$ と書き，G の**群双対** (group dual) と呼ぶ．ユニタリ既約表現 $(\pi, V_\pi) \in \hat{G}$ の次元を $d_\pi = \dim V_\pi$ と書く．その反傾表現 $(\pi^*, V_\pi^*) \in \hat{G}$

$$V_\pi^* \ni f \mapsto \pi^*(g) f := f \circ \pi(g^{-1}) \in V_\pi^* \tag{7.16}$$

から，線形写像

$$\begin{array}{rcl} \varPhi_\pi : V_\pi^* \otimes V_\pi & \to & L^2(G) \\ f \otimes v & \mapsto & \varPhi_\pi(f, v) : \begin{array}{ccl} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \varPhi_\pi(f,v)(g) := \sqrt{d_\pi}\, \langle f, \pi(g) v\rangle \end{array} \end{array} \tag{7.17}$$

を定めると，これはユニタリ写像であり，しかも $\pi^* \boxtimes \pi$ から $\pi_L \boxtimes \pi_R$ への intertwiner になっている．

Peter-Weyl の定理：

$$\begin{array}{rcccccl} \Phi: & \sum_{\pi}^{\oplus} V_\pi^* \otimes V_\pi & \to & L^2(G) & & & \\ & c = \sum_{\pi,i} f_i^\pi \otimes v_i^\pi & \mapsto & \Phi(c): & G & \to & \mathbb{C} \\ & & & & g & \mapsto & \Phi(c)(g) := \sum_{\pi,i} \sqrt{d_\pi}\, \langle f_i, \pi(g) v_i \rangle \end{array} \tag{7.18}$$

は全単射ユニタリ写像であり，$\sum_{\pi}^{\oplus} \pi^* \boxtimes \pi$ から $\pi_L \boxtimes \pi_R$ への intertwiner である．言い換えると，既約ユニタリ表現の行列要素の全体

$$\left\{ \sqrt{d_\pi} \pi_{ij}(g) \,|\, \pi \in \hat{G};\, i, j = 1, 2, \cdots, d_\pi \right\} \tag{7.19}$$

は $L^2(G)$ の完全規格直交系である．任意の $\psi \in L^2(G)$ は

$$\psi(g) = \sum_{\pi \in \hat{G}} \sum_{i,j} \sqrt{d_\pi}\, c_{ij}^\pi\, \pi_{ij}(g) \tag{7.20}$$

と展開され，その展開係数は

$$c_{ij}^\pi = \sqrt{d_\pi} \int_G \overline{\pi_{ij}(g)} \psi(g)\, dg \tag{7.21}$$

で与えられる．

【証明】一番非自明な部分は (7.19) の完全性なので，その部分を証明する．証明すべきことは

$$f \in L^2(G),\, \forall \pi \in \hat{G},\, \forall i, j \in 1, 2, \cdots, d_\pi,\, \int_G f(g) \pi_{ij}(g) dg = 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0 \tag{7.22}$$

(1) $h(g)$ は G 上の連続関数で $h(g^{-1}) = \overline{h(g)}$ を満たすとする．さらに h がすべての π_{ij} と直交すると仮定する．仮に，$h \neq 0$ として

$$(A_h \psi)(g) := \int_G h(gx^{-1}) \psi(x)\, dx \tag{7.23}$$

とおけば，A_h は $L^2(G)$ 上の 0 ではない自己共役な有界線形作用素である．有界性は Schwarz 不等式と，G のコンパクト性（h は G 上で最大値をとり，G の体積は有限）から得られ，自己共役性は

$$\begin{aligned} \langle \phi, A_h \psi \rangle &= \int_G \overline{\phi(g)} h(gx^{-1}) \psi(x)\, dx dg \\ &= \int_G \overline{\phi(g) h(xg^{-1})} \psi(x)\, dx dg \\ &= \langle A_h \phi, \psi \rangle \end{aligned} \tag{7.24}$$

からわかる．

(2) 従って，A_h は少なくとも一つは 0 でない固有値 σ を持ち，それに属する固有空間 E_σ は有限次元である（ということを証明しようと思ったら，A_h がコンパクト作用素であることを示すべきだと思われるが，江沢・島 p.154 はそういう書き方をしていない）．A_h の自己共役性から $\psi \in E_\sigma$ はすべての π_{ij} と直交する．

(3) $a \in G$, $f \in L_2(G)$ に対して

$$(T_a f)(g) := f(ga) \tag{7.25}$$

と定めると T_a はユニタリで A_h と可換．従って T_a は E_σ を不変にとどめるので，制限 $U_a := T_a|_{E_\sigma}$ は G の有限次元ユニタリ表現．従って，E_σ は G の既約ユニタリ表現の直和に分解される．その中にある既約成分 π をとり，その表現空間の基底を $\nu_1, \cdots, \nu_d$ とすれば

$$\nu_j(ga) = (U_a \nu_j)(g) = \sum_{i=1}^{d} \pi_{ij}(a) \nu_i(g) \tag{7.26}$$

が成り立つ．$g = e$ とおけば

$$\nu_j(a) = \sum_{i=1}^{d} \pi_{ij}(a) \nu_i(e) \tag{7.27}$$

を得るが，これは ν_j が π_{ij} の線形結合でかけることを意味する．ところが $\nu_j \in E_\sigma$ は任意の表現行列 π_{ij} に直交するのだから，$\nu_j = 0$ でなくてはならない．すべての既約表現成分について同様のことが言えるから $E_\sigma = \{0\}$ である．これは先に $E_\sigma \neq \{0\}$ としたことと矛盾する．従って $h = 0$ でなくてはならない【証明前半終了】.

(4) 前半では $h(g^{-1}) = \overline{h(g)}$ を仮定したが，今度は，この仮定を満たすとは限らない $f \in L^2(G)$ がすべての π_{ij} と直交すれば $f = 0$ であることを示す．$f \in L^2(G)$ がすべての π_{ij} と直交するとき，

$$s(x) = \int_G f(xy)\overline{f(y)}\, dy \tag{7.28}$$

とおくと，これは G 上の連続関数で，

$$\begin{aligned} \langle \pi_{ij}, s \rangle &= \int_G \overline{\pi_{ij}(x)} s(x)\, dx \\ &= \int_G \overline{\pi_{ij}(x)} f(xy) \overline{f(y)}\, dx\, dy \\ &= \int_G \overline{\pi_{ij}(zy^{-1})} f(z) \overline{f(y)}\, dz\, dy \\ &= \int_G \sum_k \overline{\pi_{ik}(z)} \pi_{jk}(y) f(z) \overline{f(y)}\, dz\, dy \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7.29}$$

となり，s はすべての π_{ij} と直交する．

(5) $h(x) = s(x) + \overline{s(x^{-1})}$ とおけば，これは前半の $h(x)$ の仮定を満たすから $h = 0$. ところが

$$s(e) = \int_G f(y)\overline{f(y)}\, dy \tag{7.30}$$

は実数であり，$0 = h(e) = s(e) + \overline{s(e)} = 2s(e)$ なので $\int_G |f(y)|^2\, dy = 0$. ゆえに $f = 0$【証明後半終了】.

7.4 指標

類関数，指標，指標の直交関係式，類関数の展開公式，類関数と共役類の双対性，表現の分解
定理：有限群に関して次の関係式が成り立つ：

$$\sharp G = \sum_{\pi \in \hat{G}} (\dim V_\pi)^2, \tag{7.31}$$

$$\sharp \hat{G} = G \text{ の共役類の個数} \tag{7.32}$$

従ってとくに可換有限群に対しては，既約表現はすべて 1 次元であり，共役類は 1 つの元からなり，非同値な既約表現の個数は群の元の個数に等しい．

8 群表現の例

いままでの一般論を $U(1)$ と $SU(2)$ に適用する．

8.1 U(1)

8.2 SU(2)

$SU(2)$ の定義

$$\begin{aligned} SU(2) &:= \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C}) \,\middle|\, g^\top g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \det g = 1 \right\} \\ &= \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C}) \,\middle|\, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \end{aligned} \tag{8.1}$$

位相空間として同相 $SU(2) \cong S^3$. $\mathbb{C}^2$ への作用（定義表現）

$$g \in SU(2), \quad \mathbb{C}^2 \ni \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \mapsto g\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \alpha z + \gamma w \\ \beta z + \delta w \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \tag{8.2}$$

2 変数複素係数多項式 $\psi(z,w) = \psi(\boldsymbol{v})$ 全体を L とする．これに $SU(2)$ の作用を

$$\psi(\boldsymbol{v}) \mapsto (U_g\psi)(\boldsymbol{v}) := \psi(g^{-1}\boldsymbol{v}) = \psi(\delta z - \gamma w, -\beta z + \alpha w) \tag{8.3}$$

と定めると，$U_{g_1}U_{g_2} = U_{g_1 g_2}$ が確かめられる．とくに ψ が斉次の多項式

$$\psi(z,w) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} w + a_2 z^{n-2} w^2 + \cdots + a_{n-1} z w^{n-1} + a_n w^n \tag{8.4}$$

であれば $U_g\psi$ も同じ次数の斉次多項式．従って，n 次の斉次多項式全体 L_n $(n = 0,1,2,\cdots)$ は $SU(2)$ の表現空間になっている．$\dim L_n = n+1$ である．

L に $SU(2)$ 不変な内積を定めたい．複素平面積分

$$\int \psi(z)\, dz\, d\bar{z} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x+iy)\, dx\, dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \psi(re^{i\theta})\, rdr\, d\theta \tag{8.5}$$

を用いて

$$\langle \phi, \psi \rangle := \int \overline{\phi(z,w)}\psi(z,w)\, e^{-|z|^2-|w|^2}\, dz\, d\bar{z}\, dw\, d\bar{w} \tag{8.6}$$

と定めると，$\langle U_g\phi, U_g\psi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle$ が確かめられる．また，

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^{2k}\, e^{-r^2}\, rdr\, d\theta = \pi \int_0^\infty t^k\, e^{-t}\, dt = \pi\, \Gamma(k+1) = \pi\, k! \tag{8.7}$$

だから，

$$\langle z^k w^m,\, z^p w^q \rangle = \delta_{kp}\, \delta_{mq}\, \pi^2\, k!\, m! \tag{8.8}$$

が従う．

定理：2 変数 n 次斉次多項式全体のなす空間 L_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ は $SU(2)$ の $n+1$ 次元のユニタリ既約表現空間である．また，$SU(2)$ の非同値なユニタリ既約表現はこれらで尽きている．
【証明】

(1) ユニタリ表現であることはすでに明らかなので，既約性を示す．$SU(2)$ の元として

$$g_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C},\, |\alpha| = 1, \tag{8.9}$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R} \tag{8.10}$$

をとる．L_n 上の線形変換 A で U_{g_1}, U_{g_2} と可換なものがあったとする．$\phi_k = z^k\, w^{n-k}$ に対して $U_{g_1}\phi_k = \alpha^{2k-n}\, z^k\, w^{n-k}$ である．$\alpha^n, \alpha^{n-2}, \cdots, \alpha^{-n}$ が異なるよう α を選ぶことができるから，U_{g_1} の固有空間はそれぞれ 1 次元である．いま，A は U_{g_1} は A と可換としているから，$A\phi_k = \lambda_k\phi_k$ となる $\lambda_k \in \mathbb{C}$ が存在する．ところで，

$$U_{g_2} z^n = (z\cos\theta + w\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} z^k\, w^{n-k}\, \cos^k\theta\, \sin^{n-k}\theta \tag{8.11}$$

であり，A と U_{g_2} は可換としているから，

$$0 = [A, U_{g_2}]z^n = \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_n) z^k\, w^{n-k}\, \cos^k\theta\, \sin^{n-k}\theta \tag{8.12}$$

が従う．各項は線形独立なので，$\lambda_k - \lambda_n$ $(k = 0, \cdot, n)$．このことは $A = \lambda_n \mathrm{id}$ を意味する．従って，Schur の補題より，(L_n, U) は既約表現である．

(2) 完全性（この他に同値でない既約表現はないこと）を示す．$SU(2)$ の共役類全体は

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad 0 \le \theta \le \pi \tag{8.13}$$

で尽きている．従って，$SU(2)$ 上の類関数は周期 2π の偶関数と同一視される．既約表現 L_n の指標は

$$\chi_n(g) = e^{in\theta} + e^{i(n-2)\theta} + e^{i(n-4)\theta} + \cdots + e^{i(-n+2)\theta} + e^{-in\theta} \tag{8.14}$$

である．これらより，

$$\chi_n(g) - \chi_{n-1}(g) = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = \cos n\theta \tag{8.15}$$

が得られ，$n = 0, 1, 2, \cdots$ について，これらは周期 2π の偶関数全体の空間の完全系をなす．従って，これらは $SU(2)$ の類関数の完全系であり，非同値表現の完全系である【証明終了】．

定理 (Clebsch-Gordan の法則)：

$$\chi_m \times \chi_n = \chi_{m+n} + \chi_{m+n-1} + \cdots + \chi_{|m-n|} \tag{8.16}$$

次元表記で書くことが多い．例えば，

$$\begin{array}{lcl} \chi_1\chi_1 = \chi_2 + \chi_0 & \to & \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1} \\ \chi_2\chi_1 = \chi_3 + \chi_1 & \to & \mathbf{3} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{5} \oplus \mathbf{1} \\ \chi_2\chi_2 = \chi_4 + \chi_2 + \chi_0 & \to & \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{5} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{1} \\ \chi_5\chi_2 = \chi_7 + \chi_5 + \chi_3 & \to & \mathbf{6} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{6} \oplus \mathbf{4} \\ \chi_7\chi_7 = \chi_{14} + \chi_{12} + \cdots + \chi_0 & \to & \mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{15} \oplus \mathbf{13} \oplus \cdots \oplus \mathbf{1} \end{array} \tag{8.17}$$

テンソル積表現を既約表現の直和成分に分解する intertwiner は Clebsch-Gordan 係数と呼ばれる．

8.3 SU(3)

システマティックな計算のためには Young 図を用いる．

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \mathbf{3}^* \tag{8.18}$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \tag{8.19}$$

$$\mathbf{6} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \tag{8.20}$$

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{27} \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \tag{8.21}$$

（江沢・島 p.218 など）

9 群と表現の双対性

9.1 Fourier-Pontryagin duality

G を局所コンパクトハウスドルフ可換群 (locally compact Hausdorff Abelian group) とする．実質的には，離散有限可換群 $\mathbb{Z}_p$，離散可算群 $\mathbb{Z}$，コンパクト可換群 $U(1)$ とこれらの直積群を思い浮かべればよい．γ を G の既約ユニタリ表現とする．$\gamma : G \to U(1)$ は連続準同形写像であり，G の指標 (character) とも呼ぶ．

$$\gamma : G \to U(1), \quad g \mapsto \gamma(g), \tag{9.1}$$

$$\gamma(g_1 g_2) = \gamma(g_1)\gamma(g_2) \tag{9.2}$$

$$\gamma(g^{-1}) = \overline{\gamma(g)} \tag{9.3}$$

指標全体の集合を $\hat{G}=\{\gamma\}$ と書く．

$$(\gamma_1\gamma_2)(g) := \gamma_1(g)\gamma_2(g) \tag{9.4}$$

双対定理：$\hat{G}$ もまた局所コンパクトハウスドルフ可換群になる．これを G の双対群 (dual group) あるいは指標群 (character group) と呼ぶ．従って，さらに $\hat{G}$ の双対群を定めることができるが，このとき自然な同形対応

$$\hat{\hat{G}} \cong G \tag{9.5}$$

がつく．また，以下の性質が成立する．

Fourier 変換の基本関係式（直交性と完全性）

$$\int_G \overline{\gamma_1(g)}\gamma_2(g)dg = \delta_{\gamma_1,\gamma_2} \tag{9.6}$$

$$\int_{\hat{G}} \overline{\gamma(g_1)}\gamma(g_2)d\gamma = \delta_{g_1,g_2} \tag{9.7}$$

一般 Fourier 展開：G の表現空間を G 作用について分解する．G が Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上に U でユニタリ表現されているとする．

$$U : G \to U(\mathcal{H}), \quad g \mapsto U(g) \tag{9.8}$$

このとき

$$P_\gamma := \int_G \overline{\gamma(g)}U(g)dg \tag{9.9}$$

とおいたものは

$$P_\gamma^\dagger = P_\gamma, \tag{9.10}$$

$$P_\alpha P_\beta = \delta_{\alpha\beta}P_\beta, \tag{9.11}$$

$$\int_{\hat{G}} P_\gamma\, d\gamma = 1, \tag{9.12}$$

$$U(g)P_\gamma = \gamma(g)P_\gamma, \tag{9.13}$$

$$P_\gamma U(g) = \gamma(g)P_\gamma, \tag{9.14}$$

$$\int_{\hat{G}} \gamma(g)P_\gamma\, d\gamma = U(g) \tag{9.15}$$

を満たす．証明：(9.10) はユニモジュラー性から

$$\begin{aligned}
P_\gamma^\dagger &= \int_G \gamma(g)U(g)^\dagger dg \\
&= \int_G \overline{\gamma(g^{-1})}U(g^{-1})dg \\
&= \int_G \overline{\gamma(g)}U(g)dg \\
&= P_\gamma
\end{aligned} \tag{9.16}$$

(9.11) は直交性から

$$\begin{aligned}
P_\alpha P_\beta &= \int_G \overline{\alpha(g)}U(g)dg \int_G \overline{\beta(h)}U(h)dh \\
&= \int_G dg \int_G dh\, \overline{\alpha(g)\beta(h)}U(gh) \\
&= \int_G dg \int_G dh\, \overline{\alpha(g)\beta(g^{-1}h)}U(h) \\
&= \int_G dh \int_G dg\, \overline{\alpha(g)}\beta(g)\overline{\beta(h)}U(h) \\
&= \delta_{\alpha,\beta} \int_G dh\, \overline{\beta(h)}U(h) \\
&= \delta_{\alpha\beta}P_\beta
\end{aligned} \tag{9.17}$$

(9.12) は完全性から

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{G}} P_\gamma\, d\gamma &= \int_{\hat{G}} d\gamma \int_G dg\, \overline{\gamma(g)}U(g) \\
&= \int_G dg \int_{\hat{G}} d\gamma\, \overline{\gamma(g)}\gamma(e)\, U(g) \\
&= \int_G dg\, \delta_{g,e}\, U(g) \\
&= U(e) = 1
\end{aligned} \tag{9.18}$$

(9.13) は測度の左不変性から

$$\begin{aligned}
U(g)P_\gamma &= U(g) \int_G \overline{\gamma(h)}U(h)dh \\
&= \int_G \overline{\gamma(h)}U(gh)dh \\
&= \int_G \overline{\gamma(g^{-1}h)}U(h)dh \\
&= \int_G \overline{\gamma(g^{-1})\gamma(h)}U(h)dh \\
&= \gamma(g) \int_G \overline{\gamma(h)}U(h)dh \\
&= \gamma(g)P_\gamma
\end{aligned} \tag{9.19}$$

同様に (9.14) は測度の右不変性から示される．(9.15) も完全性から

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{G}} \gamma(g)P_\gamma\, d\gamma &= \int_{\hat{G}} d\gamma\, \gamma(g) \int_G dh\, \overline{\gamma(h)}U(h) \\
&= \int_G dh \int_{\hat{G}} d\gamma\, \overline{\gamma(h)}\gamma(g)\, U(h) \\
&= \int_G dh\, \delta_{g,h}\, U(h) \\
&= U(g)
\end{aligned} \tag{9.20}$$

9.2 Doplicher-Roberts category

Doplicher-Roberts（ドップリカー・ロバーツ）圏 $\mathscr{T}$ とは以下の条件を満たす圏である：

(i) 対象は無定義.

(ii) 任意の 2 つの対象 π, π' を結ぶ射全体の集合 $\mathrm{Hom}(\pi, \pi')$ はベクトル空間であり，射の合成は双線形である.

$$T \circ (\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2) = \lambda_1 T \circ S_1 + \lambda_2 T \circ S_2 \tag{9.21}$$

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2) \circ S = \lambda_1 T_1 \circ S + \lambda_2 T_2 \circ S \tag{9.22}$$

図式では

$$\begin{tikzcd} \pi \arrow[d, "S_1"'] \\ \pi' \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \pi \arrow[d, "S_2"'] \\ \pi' \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \pi \arrow[d, "\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2"'] \arrow[dr, "\lambda_1 T S_1 + \lambda_2 T S_2"] & \\ \pi' \arrow[r, "T"'] & \pi'' \end{tikzcd} \tag{9.23}$$

(iii) $\mathrm{Hom}(\pi, \pi')$ は Banach 空間である.

(iv) 任意の射 $S : \pi \to \pi'$, $T : \pi' \to \pi''$ の合成に関して $||T \circ S|| \leq ||T||||S||$ が成り立つ.

(v) 対象に関しては恒等的で射に関して反線形的で対合的で反変的な関手 $* : \mathscr{T} \rightsquigarrow \mathscr{T}$ がある. つまり $S : \pi \to \pi'$ に対して $S^* : \pi' \to \pi$ が定まり,

$$(\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2)^* = \bar{\lambda}_1 S_1^* + \bar{\lambda}_2 S_2^* \tag{9.24}$$

$$(S^*)^* = S \tag{9.25}$$

$$(T \circ S)^* = S^* \circ T^* \tag{9.26}$$

が成り立つ.

(vi) $||S^* \circ S|| = ||S||^2$ が成り立つ (C*-norm property)

(vii) $E \in \mathrm{Hom}(\pi, \pi)$ が $E^* = E$, $E^2 = E$ を満たすとき，E を（自己共役）射影と呼ぶ. $V \in \mathrm{Hom}(\sigma, \pi)$ が $V^* \circ V = 1_\sigma$ を満たすとき，V を部分等長射と呼ぶ. 射影 E に対して $V \circ V^* = E$ を満たす部分等長射 $V : \sigma \to \pi$ があれば，σ を E の subobject と呼ぶ. 任意の対象 σ_1, σ_2 に対して，部分等長射 $V_1 : \sigma_1 \to \pi$, $V_2 : \sigma_2 \to \pi$ で $V_1 \circ V_1^* + V_2 \circ V_2^* = 1_\pi$ を満たすような π が存在することを要請する（有限直和の存在）.

$$\begin{tikzcd} & \sigma_2 \arrow[d, shift right, "V_2"'] \\ \sigma_1 \arrow[r, shift left, "V_1"] & \pi \arrow[l, shift left, "V_1^*"] \arrow[u, shift right, "V_2^*"'] \arrow[loop right, "1_\pi"] \end{tikzcd} \tag{9.27}$$

(viii) 任意の 2 つの対象 ρ, τ のテンソル積対象 $\rho \otimes \tau$ が定まり，任意の 2 つの射 $R : \rho \to \rho'$, $T : \tau \to \tau'$ のテンソル積射 $R \otimes T : \rho \otimes \tau \to \rho' \otimes \tau'$ が定まり，R, T に関して双線形である. また，テンソル積は（自然変換同形の意味で）結合的である.

$$\begin{tikzcd} \rho \arrow[d, "R"'] \\ \rho' \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \sigma \arrow[d, "S"'] \\ \sigma' \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \rho \otimes \sigma \arrow[d, "R \otimes S"'] \\ \rho' \otimes \sigma' \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} (\rho \otimes \sigma) \otimes \tau \arrow[r, equal] \arrow[d, "(R \otimes S) \otimes T"'] & \rho \otimes (\sigma \otimes \tau) \arrow[d, "R \otimes (S \otimes T)"'] \\ (\rho' \otimes \sigma') \otimes \tau' \arrow[r, equal] & \rho' \otimes (\sigma' \otimes \tau') \end{tikzcd} \tag{9.28}$$

(ix) 射のテンソル積と合成が両立する：

$$(R' \otimes T') \circ (R \otimes T) = (R' \circ R) \otimes (T' \circ T) \tag{9.29}$$

垂直積と水平積が可換という言い方もできる：

$$\begin{tikzcd}
\rho \arrow[d, "R"'] & \tau \arrow[d, "T"'] & \rho \arrow[dd, "R'R"'] & \tau \arrow[dd, "T'T"'] & \rho\otimes\tau \arrow[r, equal] \arrow[dd, "R'R\otimes T'T"'] & \rho\otimes\tau \arrow[d, "R\otimes T"'] \\
\rho' \arrow[d, "R'"'] & \tau' \arrow[d, "T'"'] & & & & \rho'\otimes\tau' \arrow[d, "R'\otimes T'"'] \\
\rho'' & \tau'' & \rho'' & \tau'' & \rho''\otimes\tau'' \arrow[r, equal] & \rho''\otimes\tau''
\end{tikzcd} \tag{9.30}$$

(x) 対合に関して

$$(R \otimes T)^* = R^* \otimes T^* \tag{9.31}$$

が成り立つ.

(xi) 特別な対象 i が存在し，任意の対象 π に対して $i \otimes \tau = \tau \otimes i = \tau$ が対象として同形であり，任意の射 $T : \tau \to \tau'$ に対して

$$1_i \otimes T = T \otimes 1_i = T \tag{9.32}$$

が成り立ち（単位対象の存在），

$$\mathrm{Hom}(i, i) = \mathbb{C}1_i \tag{9.33}$$

が成り立つ（単位対象の 1 次元性）.

(xii) $U : \pi \to \pi'$ が $U^* \circ U = 1_\pi$, $U \circ U^* = 1_{\pi'}$ を満たすならユニタリ射と呼ぶ．任意の対象 τ, ρ に対して $\rho \otimes \tau$ から $\tau \otimes \rho$ へのユニタリ射 $\varepsilon(\rho, \tau)$ が存在し，

$$\varepsilon(\rho', \tau') \circ (R \otimes T) = (T \otimes R) \circ \varepsilon(\rho, \tau) \tag{9.34}$$

$$\varepsilon(\tau, \rho) \circ \varepsilon(\rho, \tau) = 1_{\rho\otimes\tau} \tag{9.35}$$

$$\varepsilon(i, \rho) = \varepsilon(\rho, i) = 1_\rho \tag{9.36}$$

$$\varepsilon(\rho \otimes \sigma, \tau) = (\varepsilon(\rho, \tau) \otimes 1_\sigma) \circ (1_\rho \otimes \varepsilon(\sigma, \tau)) \tag{9.37}$$

が成り立つ（テンソル積の対称性）．図式では

$$
\begin{tikzcd}
\rho \arrow[d, "R"'] \\ \rho'
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\tau \arrow[d, "T"'] \\ \tau'
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\rho\otimes\tau \arrow[d, "\varepsilon(\rho,\tau)"'] \\ \tau\otimes\rho
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\rho\otimes\tau \arrow[r, "\varepsilon(\rho,\tau)"] \arrow[d, "R\otimes T"'] & \tau\otimes\rho \arrow[d, "T\otimes R"] \\
\rho'\otimes\tau' \arrow[r, "\varepsilon(\rho',\tau')"'] & \tau'\otimes\rho'
\end{tikzcd}
\tag{9.38}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\rho\otimes\tau \arrow[d, "\varepsilon(\rho,\tau)"'] \arrow[dr, "1_{\rho\otimes\tau}"] & \\
\tau\otimes\rho \arrow[r, "\varepsilon(\tau,\rho)"'] & \rho\otimes\tau
\end{tikzcd}
\tag{9.39}
$$

$$
\begin{tikzcd}
i\otimes\rho \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varepsilon(i,\rho)"'] & \rho \arrow[r, equal] \arrow[d, "1_\rho"'] & \rho\otimes i \arrow[d, "\varepsilon(\rho,i)"'] \\
\rho\otimes i \arrow[r, equal] & \rho \arrow[r, equal] & i\otimes\rho
\end{tikzcd}
\tag{9.40}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\rho\otimes\sigma\otimes\tau \arrow[d, "1_\rho\otimes\varepsilon(\sigma,\tau)"'] \arrow[dr, "\varepsilon(\rho\otimes\sigma,\tau)"] & \\
\rho\otimes\tau\otimes\sigma \arrow[r, "\varepsilon(\rho,\tau)\otimes 1_\sigma"'] & \tau\otimes\rho\otimes\sigma
\end{tikzcd}
\tag{9.41}
$$

(xiii) 各対象 ρ に対して共役 (conjugate) 対象 $\bar\rho$ と射 $R : i \to \bar\rho\otimes\rho$ が定まり，$\bar R := \varepsilon(\bar\rho,\rho)\circ R : i \to \rho\otimes\bar\rho$ とおくと，

$$
(\bar R^*\otimes 1_\rho)\circ(1_\rho\otimes R) = 1_\rho \tag{9.42}
$$

$$
(R^*\otimes 1_{\bar\rho})\circ(1_{\bar\rho}\otimes \bar R) = 1_{\bar\rho} \tag{9.43}
$$

が成り立つ（共役の存在）．図式では $\bar R$ の定義が

$$
\begin{tikzcd}
i \arrow[d, "R"'] \arrow[dr, "\bar R"] & \\
\bar\rho\otimes\rho \arrow[r, "\varepsilon(\bar\rho,\rho)"'] & \rho\otimes\bar\rho
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
i & \\
\bar\rho\otimes\rho \arrow[u, "R^*"] & \rho\otimes\bar\rho \arrow[l, "\varepsilon(\rho,\bar\rho)"] \arrow[ul, "\bar R^*"']
\end{tikzcd}
\tag{9.44}
$$

で，共役に対する条件を図式で表すと

$$
\begin{tikzcd}
\rho\otimes i = \rho \arrow[d, "1_\rho\otimes R"'] \arrow[dr, "1_\rho"] & \\
\rho\otimes\bar\rho\otimes\rho \arrow[r, "\bar R^*\otimes 1_\rho"'] & i\otimes\rho = \rho
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
i\otimes\bar\rho = \bar\rho & \\
\bar\rho\otimes\rho\otimes\bar\rho \arrow[u, "R^*\otimes 1_{\bar\rho}"] & \bar\rho\otimes i = \bar\rho \arrow[l, "1_{\bar\rho}\otimes\bar R"] \arrow[ul, "1_{\bar\rho}"']
\end{tikzcd}
\tag{9.45}
$$

以上の条件をすべて満たす圏 $\mathscr{T}$ を DR 圏または共役を持つ対称モノイド C* 圏という．

単一の対象を持つ圏 $\mathscr{T}$ が (i)-(iv) の条件を満たすならば $\mathscr{T}$ を Banach 代数と呼ぶ．単一対象を持つ圏が (i)-(v) の条件を満たすならば Banach∗ 代数と呼ぶ．単一対象を持つ圏が (i)-(vi) の条件を満たすならば C* 代数と呼ぶ．単一対象とは限らない圏が (i), (ii), (viii), (ix) を満たすならばテンソル圏と呼ぶ．

Doplicher-Roberts の双対定理：コンパクト群 G の有限次元ユニタリ表現を対象，intertwiner を射，エルミート共役を対合，反傾表現を共役として DR 圏 $Rep(G)$ を得る Rep は反変関手であ

る．逆に，任意の DR 圏 $\mathscr{T}$ に対して $\mathscr{T} = Rep(G)$ となるようなコンパクト群 G が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \pi \arrow[d, "T"] & & \mathscr{T} \\
 & & & & \pi' \arrow[dl, squiggly, "V"'] \arrow[dr, squiggly, "V"] & & \\
 & & & V_\pi \arrow[rr, "\pi(g)"] \arrow[dd, "T_V"] & & V_\pi \arrow[dd, "T_V"] & \\
G & V \arrow[r, "g"] & V \arrow[ur, squiggly, "\pi"] \arrow[dr, squiggly, "\pi'"'] & & & & Vct \\
 & & & V_{\pi'} \arrow[rr, "\pi'(g)"'] & & V_{\pi'} &
\end{tikzcd} \tag{9.46}$$

横糸は群作用，縦糸は intertwiner．DR 圏の表現関手 V の自己同形自然変換全体が群 G を再構成する．

10　量子力学への応用

10.1　量子力学における対称性

対称性，保存則，縮退，ユニタリ表現，特殊関数，簡約（自由度の縮減），射影表現，ユニタリ射影表現，群のコホモロジー

10.2　スピノル

10.3　球面調和関数

10.4　Mackey's imprimitivity system

誘導表現

11　統計力学への応用

11.1　Curie の原理

ピエール・キュリー，線形応答と intertwiner，周波数応答，ラプラス変換とフーリエ変換

11.2　秩序変数

線形応答理論の破綻＝対称性の自発的破れ．それでも相構造は対称性で特徴づけられる．

12 古典力学への応用

12.1 ハミルトン形式とシンプレクティック構造

可積分系

13 SU(2) の Haar 測度を求めよ．規格化もせよ

Hopf bundle: ファイバー束としての構造

$$\begin{array}{l} S^3 \cong SU(2) \quad \curvearrowleft U(1) \cong S^1 \\ \downarrow \rho \\ S^2 \end{array} \tag{13.1}$$

$SU(2)$ の定義と座標：

$$SU(2) := \{g \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C}) \,|\, g^\dagger g = g g^\dagger = I,\, \det g = 1\} \cong S^3 \subset \mathbb{R}^4 \tag{13.2}$$

$$g = \begin{pmatrix} y_0 + i y_3 & i y_1 + y_2 \\ i y_1 - y_2 & y_0 - i y_3 \end{pmatrix} \qquad \det g = (y_0)^2 + (y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2 = 1 \tag{13.3}$$

リー代数 $\mathfrak{su}(2)$ はユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ と同一視される：

$$\mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{su}(2), \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \tilde{\boldsymbol{x}} = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3 \tag{13.4}$$

Hopf 写像：

$$\rho : SU(2) \cong S^3 \to S^2 \subset \mathfrak{su}(2), \qquad g \mapsto g \sigma_3 g^\dagger = \tilde{\boldsymbol{n}} = n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_2 + n_3 \sigma_3 \tag{13.5}$$

fiber は $\rho^{-1}(\sigma_3) = \{e^{-\frac{1}{2} i \sigma_3 \psi} \,|\, \psi \in \mathbb{R}\} \cong U(1) \cong S^1$.

Hopf 写像を半径方向に伸ばして拡大 Hopf 写像を定める：

$$\begin{array}{rcl} \tau : \mathbb{R}^4 \supset \mathbb{R}_+ \times S^3 & \to & \mathbb{R}_+ \times S^2 \subset \mathbb{R}^3, \\ (\sqrt{r}, g) & \mapsto & (r, g \sigma_3 g^\dagger) \\ \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C}) \ni q = \sqrt{r} g = q_0 + i \sigma_k q_k & \mapsto & \tilde{\boldsymbol{x}} = q \sigma_3 q^\dagger = r\, g \sigma_3 g^\dagger = \sigma_k x_k \in \mathfrak{su}(2) \\ \begin{pmatrix} q_0 + i q_3 & i q_1 + q_2 \\ i q_1 - q_2 & q_0 - i q_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 q_0 q_2 + 2 q_1 q_3 \\ 2 q_0 q_1 + 2 q_2 q_3 \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \end{array} \tag{13.6}$$

$-||\boldsymbol{x}||^2 = \det \tilde{\boldsymbol{x}} = \det(q \sigma_3 q^\dagger) = \det(\sigma_3) \det(q) \det(q)^* = -(\det\, q)^2 = -||\boldsymbol{q}||^4$ から

$$r = ||\boldsymbol{q}||^2 = ||\boldsymbol{x}|| \tag{13.7}$$

また拡大 Hopf 写像は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_2 & q_3 & -q_0 & q_1 \\ q_1 & q_0 & q_3 & q_2 \\ q_0 & -q_1 & -q_2 & q_3 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & -q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \tag{13.8}$$

とも書ける．このとき $W^T W = W W^T = ||q||^2 I$ が成り立つ．スピノルを使って拡大 Hopf 写像を書くこともできる：

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{R}^3, \\ \psi = \begin{pmatrix} q_0 + i q_3 \\ i q_1 - q_2 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi^\dagger \sigma_1 \psi \\ \psi^\dagger \sigma_2 \psi \\ \psi^\dagger \sigma_3 \psi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{13.9}$$

Euler angles:

$$g = e^{-\frac{i}{2}\sigma_3 \phi} e^{-\frac{i}{2}\sigma_2 \theta} e^{-\frac{i}{2}\sigma_3 \psi} \tag{13.10}$$

$$g \sigma_3 g^\dagger = \sigma_1 \sin\theta \cos\phi + \sigma_2 \sin\theta \sin\phi + \sigma_3 \cos\theta \tag{13.11}$$

$SU(2)$ 上の座標として単射な領域：$0 < \theta < \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 \leq \psi < 4\pi$.

南極点を除いて，あるいは北極点を除いて微分可能な座標：

$$g_N = e^{-\frac{i}{2}\sigma_3 \phi} e^{-\frac{i}{2}\sigma_2 \theta} e^{+\frac{i}{2}\sigma_3 \phi} e^{-\frac{i}{2}\sigma_3 \psi} \tag{13.12}$$

$$g_S = e^{-\frac{i}{2}\sigma_3 \phi} e^{-\frac{i}{2}\sigma_2 \theta} e^{-\frac{i}{2}\sigma_3 \phi} e^{-\frac{i}{2}\sigma_3 \psi} \tag{13.13}$$

Maurer-Cartan 1-form:

$$\begin{aligned} g^\dagger dg &= -\frac{i}{2}\Big\{ \sigma_1 (\sin\psi \, d\theta - \cos\psi \sin\theta \, d\phi) \\ &\qquad + \sigma_2 (\cos\psi \, d\theta + \sin\psi \sin\theta \, d\phi) + \sigma_3 (d\psi + \cos\theta \, d\phi) \Big\} \\ &= -\frac{i}{2} \big\{ \sigma_1 \alpha_1 + \sigma_2 \alpha_2 + \sigma_3 \alpha_3 \big\} \end{aligned} \tag{13.14}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\psi & -\cos\psi \sin\theta & 0 \\ \cos\psi & \sin\psi \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ d\phi \\ d\psi \end{pmatrix} \tag{13.15}$$

両側作用に関して不変な 3-form

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} g^\dagger dg \wedge g^\dagger dg \wedge g^\dagger dg &= \Big(-\frac{i}{2} \Big)^3 \times 3! \, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \, \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \\ &= \frac{i}{8} \times 6 \times 2i \, \sin\theta \, d\theta \wedge d\phi \wedge d\psi \\ &= -\frac{3}{2} \sin\theta \, d\theta \wedge d\phi \wedge d\psi \end{aligned} \tag{13.16}$$

積分値は

$$\int \sin\theta \, d\theta \wedge d\phi \wedge d\psi = 2 \times 2\pi \times 4\pi = 16\pi^2 \tag{13.17}$$

規格化されたHaar測度

$$\Omega = \frac{1}{16\pi^2}\,\sin\theta\,d\theta\wedge d\phi\wedge d\psi \tag{13.18}$$

$SU(2)\cong S^3$ 上の $SU(2)$ 両側作用に関して不変な計量

$$\mathrm{Tr}(g^\dagger dg)^\dagger(g^\dagger dg) = \frac{1}{2}\Big\{d\theta^2 + (\sin\theta\,d\phi)^2 + (d\psi+\cos\theta\,d\phi)^2\Big\} \tag{13.19}$$

座標付けを $q=\sqrt{r}g$ もしくは $q=q_0+i\sigma_k q_k\in\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$ として $SU(2)$ 左不変形式 $q^\dagger dq$ を書き換える：

$$\begin{aligned}
q^\dagger dq &= \frac{1}{2}dr + rg^\dagger dg \\
&= \eta_0 + i\sigma_k\eta_k \\
&= q_0\,dq_0 + q_1\,dq_1 + q_2\,dq_2 + q_3\,dq_3 \\
&\quad +i\sigma_1(-q_1\,dq_0 + q_0\,dq_1 - q_3\,dq_2 + q_2\,dq_3) \\
&\quad +i\sigma_2(-q_2\,dq_0 + q_3\,dq_1 + q_0\,dq_2 - q_1\,dq_3) \\
&\quad +i\sigma_3(-q_3\,dq_0 - q_2\,dq_1 + q_1\,dq_2 + q_0\,dq_3)
\end{aligned} \tag{13.20}$$

$$\begin{pmatrix}\eta_0\\ \eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3\\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2\\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1\\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dq_0\\ dq_1\\ dq_2\\ dq_3\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}dq_0\\ dq_1\\ dq_2\\ dq_3\end{pmatrix} \tag{13.21}$$

最後に現れた行列 Q は $Q^TQ=QQ^T=||q||^2\,I$ を満たす．$||q||^2=q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=\det q=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}q^\dagger q$ は $SU(2)$ 両側作用で不変．また，(13.14) と (13.20) の $rg^\dagger dg$ の式を見比べて

$$-\frac{1}{2}r\alpha_k = \eta_k \qquad k=1,2,3 \tag{13.22}$$

(13.21) を逆解きして

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}dq_0\\ dq_1\\ dq_2\\ dq_3\end{pmatrix} &= \frac{1}{||q||^2}Q^T\begin{pmatrix}\eta_0\\ \eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix} = \frac{1}{2r}\begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3\\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2\\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1\\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dr\\ -r\alpha_1\\ -r\alpha_2\\ -r\alpha_3\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2r}\begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3\\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2\\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1\\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -r\sin\psi & r\cos\psi\sin\theta & 0\\ 0 & -r\cos\psi & -r\sin\psi\sin\theta & 0\\ 0 & 0 & -r\cos\theta & -r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dr\\ d\theta\\ d\phi\\ d\psi\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{13.23}$$

$Q=\mathbb{R}^4-\{\mathbf{0}\}=\mathbb{R}_+\times S^3$ 上の計量

$$\begin{aligned}
g_Q &:= 2\,\mathrm{Tr}(q^\dagger dq)^\dagger(q^\dagger dq) \\
&= 2\Big\{\frac{1}{2}dr^2 + r^2\mathrm{Tr}(g^\dagger dg)^\dagger(g^\dagger dg)\Big\} \\
&= dr^2 + r^2\Big(d\theta^2 + (\sin\theta\,d\phi)^2 + (d\psi+\cos\theta\,d\phi)^2\Big) \\
&= 4||q||^2(dq_0^2 + dq_1^2 + dq_2^2 + dq_3^2)
\end{aligned} \tag{13.24}$$

を定めると，これは $SU(2)$ の両側作用で不変だが，並進群 $\mathbb{R}^4$ の作用では不変ではないことに注意．また，$X := Q/U(1) = \mathbb{R}_+ \times S^2 = \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ 上の計量

$$g_X := \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr} d\tilde{\boldsymbol{x}} d\tilde{\boldsymbol{x}} = dr^2 + r^2\Big(d\theta^2 + (\sin\theta\, d\phi)^2\Big) = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \tag{13.25}$$

を定めると，これは 3 次元ユークリッド群 $\mathbb{R}^3 \rtimes SU(2)$ の作用で不変．(13.6) の $\tau : Q \to X$ はリーマン沈め込みになっている．また，g_Q が定める体積形式は

$$\mathrm{Vol}_Q = (2||q||)^4 dq_0 \wedge dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_3 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge r d\psi \tag{13.26}$$

である．この表式から

$$dq_0 \wedge dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_3 = \frac{1}{16r} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge d\psi \tag{13.27}$$

という関係を得る．

TQ の水平成分，垂直成分はおのおの

$$(TQ)_H = \mathrm{span}\Big\{\frac{\partial}{\partial r},\, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\, \frac{1}{r\sin\theta}\Big(\frac{\partial}{\partial\phi} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial\psi}\Big)\Big\} \tag{13.28}$$

$$(TQ)_V = \mathrm{span}\Big\{\frac{\partial}{\partial\psi}\Big\} \tag{13.29}$$

これと双対に，T^*Q の水平成分，垂直成分はおのおの

$$(T^*Q)_H = \mathrm{span}\Big\{dr,\, r\,d\theta,\, r\,\sin\theta\, d\phi\Big\} \tag{13.30}$$

$$(T^*Q)_V = \mathrm{span}\Big\{r(d\psi + \cos\theta\, d\phi)\Big\} \tag{13.31}$$

14　左不変測度と右不変測度が一致しない例．モジュラー関数

山内・杉浦 p.64 の例：三角行列の群

$$G = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix};\, x, y, z \in \mathbb{R},\, x > 0, z > 0\right\} \tag{14.1}$$

左作用で

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & z' \end{pmatrix} \tag{14.2}$$

$$x' = ax, \quad y' = ay + bz, \quad z' = cz \tag{14.3}$$

となり，

$$\begin{aligned} dx' \wedge dy' \wedge dz' &= a\,dx \wedge (a\,dy + b\,dz) \wedge c\,dz \\ &= a^2 c\,dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \frac{x'^2 z'}{x^2 z}\,dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned} \tag{14.4}$$

となるので，

$$\omega_L = \frac{1}{x'^2 z'}\,dx' \wedge dy' \wedge dz' = \frac{1}{x^2 z}\,dx \wedge dy \wedge dz \tag{14.5}$$

は左不変測度.

右作用で

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & z' \end{pmatrix} \tag{14.6}$$

$$x' = ax, \quad y' = bx + cy, \quad z' = cz \tag{14.7}$$

となり,

$$\begin{aligned} dx' \wedge dy' \wedge dz' &= a\,dx \wedge (b\,dx + c\,dy) \wedge c\,dz \\ &= ac^2\,dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \frac{x'z'^2}{xz^2}\,dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned} \tag{14.8}$$

となるので,

$$\omega_R = \frac{1}{x'z'^2}\,dx' \wedge dy' \wedge dz' = \frac{1}{xz^2}\,dx \wedge dy \wedge dz \tag{14.9}$$

は右不変測度.

$$\omega_L = \frac{xz^2}{x^2z}\,\omega_R = \frac{z}{x}\,\omega_R \tag{14.10}$$

なので，右変換を施すと

$$R_g^*\omega_L = \frac{cz}{ax}\,\omega_R = \frac{c}{a}\,\omega_L \tag{14.11}$$

となり，モジュラー関数は

$$\Delta(g) = \frac{c}{a} \tag{14.12}$$

であることがわかる.

小林・大島 p.84 の例：1 次元アファイン変換群

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\, x, y, z \in \mathbb{R},\, x \neq 0 \right\} \tag{14.13}$$

参考文献

[1] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician (2nd edition), Springer, 1998.
S. マックレーン（三好博之・高木理訳）「圏論の基礎」シュプリンガー・フェアラーク東京, 2005.

[2] K. H. Rose, XY-pic（圏論の図式を描くための LaTeX のマクロ）
`http://www.tug.org/applications/Xy-pic/`

[3] 谷村省吾「理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何 — 双対性の視点から」数理科学 SGC ライブラリ 52, サイエンス社 (2006).

[4] 犬井鉄郎, 田辺行人, 小野寺嘉孝「応用群論 — 群表現と物理学」裳華房 (1980). 群の表現論の物理への応用の包括的解説.

[5] 江沢洋, 島和久「群と表現」岩波書店 (2009). 何回かシリーズ・版を変えて出版されている.

[6] 今野豊彦「物質の対称性と群論」共立出版 (2001).

[7] 平井武, 山下博「表現論入門セミナー：具体例から最先端にむかって」遊星社 (2003).

[8] H. ジョージアイ（九後汰一郎 訳）「物理学におけるリー代数：アイソスピンから統一理論へ」吉岡書店 (1990), (第 2 版 2010).

[9] 山内恭彦，杉浦光夫「連続群論入門」培風館 (1960).

[10] 小林俊行，大島利雄「リー群と表現論」岩波書店 (2005). 「Lie 群と Lie 環 (1,2 巻)，岩波書店 (1999)」と同内容.

[11] 淡中忠郎「双対原理」岩波書店 (1951).

[12] 辰馬伸彦「位相群の双対定理」紀伊國屋書店 (1994).

[13] S. Doplicher and J. E. Roberts, “A new duality theory for compact groups,” Invent. Math. **98**, 157 (1989).

[14] 小嶋泉「だれが量子場を見たか」（中村孔一・中村徹・渡辺敬二編集，だれが量子場をみたか，pp. 65–107）日本評論社 (2004).

[15] 黒川信重，若山正人 他「フォーラム：現代数学の風景，双対性をさがす」数学のたのしみ No. 10，pp. 11–102, 日本評論社 (1998).

[16] 梅田亨 他「フォーラム：現代数学のひろがり，表現論の素顔 」数学のたのしみ, 2006 冬号, 日本評論社 (2006).

[17] P. W. Anderson, “More is different”, *Science*, **177**, 393 (1972).

[18] 谷村省吾「液晶科学者のための群論入門」日本液晶学会誌 11 巻 3 号, 288-295 (2007 年 7 月), 11 巻 4 号, 365-372 (2007 年 10 月), 12 巻 1 号, 57-65 (2008 年 1 月) に連載（同内容の記事が谷村の web page で公開されている）.

[19] 谷村省吾「21 世紀の量子論入門」理系への数学 2010 年 5 月号より連載.