

愛媛大学理学部セミナー  
2019.08.27

# 光の二つの未解決問題： 光子局在化問題と アブラハム・ミンコフスキー論争

谷村 省吾  @tani6s

名古屋大学 大学院 情報学研究科 複雑系科学専攻

参考文献 [arXiv: 1309.0620](https://arxiv.org/abs/1309.0620)

# 私，谷村省吾について

- 名古屋生まれ，名古屋育ち。
- 1990年 名古屋大学工学部応用物理学科卒業（主に物性物理）
- 1995年 名古屋大学大学院理学研究科物理学専攻博士課程 修了（素粒子論研究室，師匠は大貫義郎）
- 東京大学（学振研究員），京都大学，大阪市立大学，京都大学の順に就職・異動
- 2011年より名古屋大学

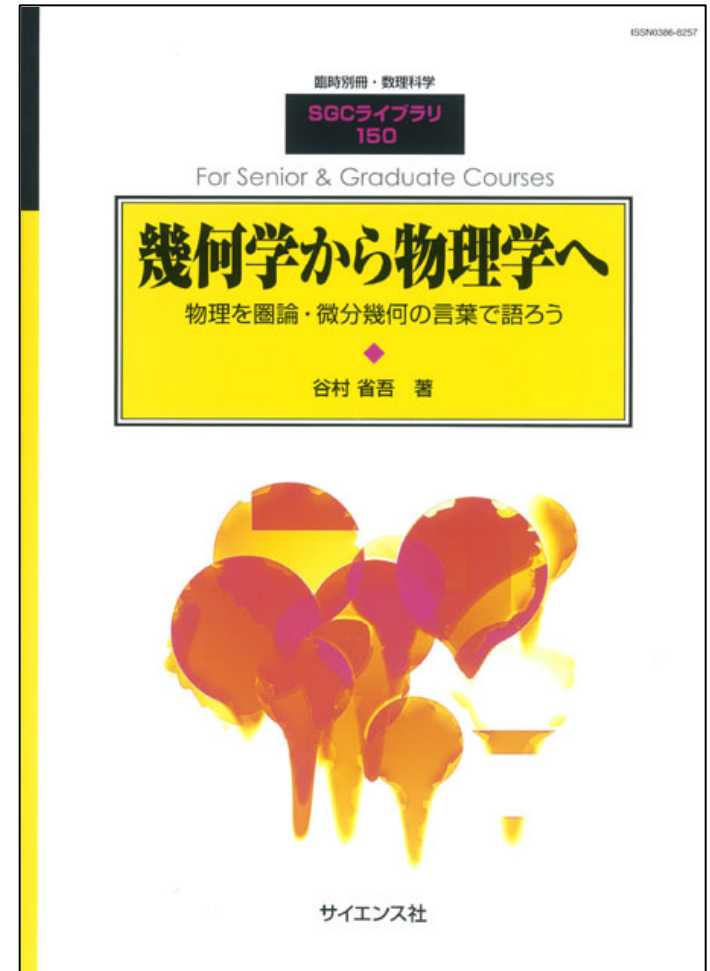
# 私の専門分野

理論物理, とくに

- 量子基礎論
- 力学系理論 (量子も古典も)
- 応用微分幾何
- 応用圏論
- 量子情報も研究していたが最近は開店休業状態

# 宣伝

- 新刊本『幾何学から物理学へ』（サイエンス社）
- 近刊予定『21世紀の量子論入門』（現代数学社）
- 私のウェブページで、日経サイエンスや数理科学などの記事情報・補足解説を公開しています。



# 私にとっての事始め

名古屋大学の物理学科OBたちが不定期に集まるセミナーがあります。2009年8月のセミナーで大貫義郎氏が

『Position Operator of Relativistic Particles』と題して話をしました。以前から大貫氏は、質量ゼロ粒子の位置演算子が定義できないことを知っていたようです。同テーマについてのセミナーは回を重ね、大貫氏は、非相対論的量子論の正準交換関係で特徴付けられる位置概念と、相対論的場の量子論における位置概念は、別ものであることを指摘し、**「二つの局所性」**と命名しました。これらが数学的・物理的にどういう関係にあるかという問題は完全な理解には至っていませんが、光子の位置概念については部分的な解答を得ています。それが今回紹介する内容です。

2019年8月 谷村省吾

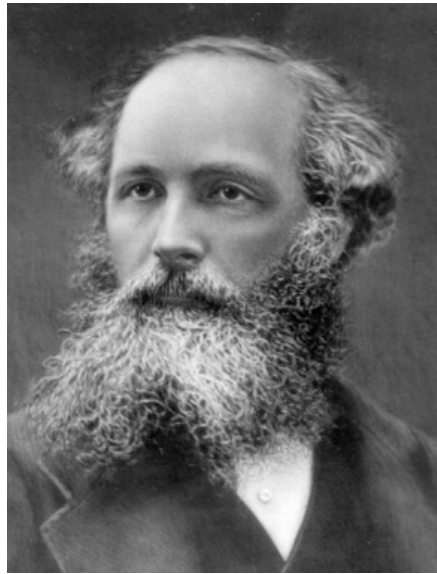
# 光の正体をめぐって

光は波動の性質と粒子の性質をあわせ持つ。  
このことを知らない現代物理学者いないでしょう。



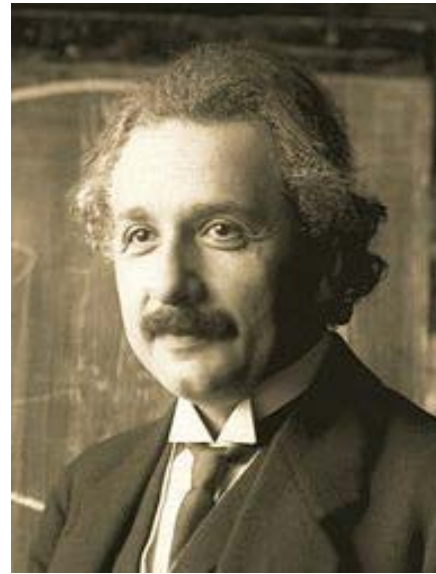
T. Young  
光の干渉実験

[https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas\\_Young\\_%28scientist%29](https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Young_%28scientist%29)



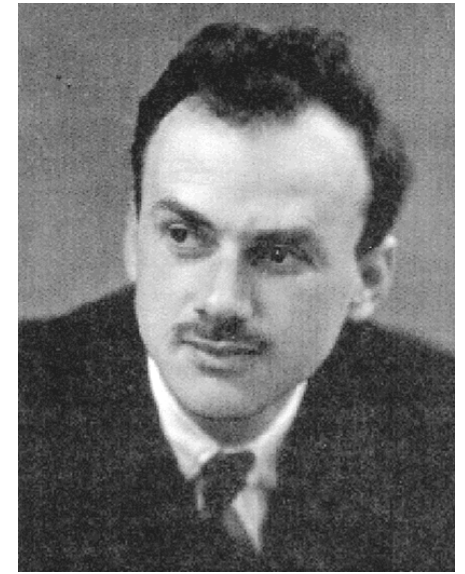
J. C. Maxwell  
光を電磁波と定

<http://www.astronoo.com/en/biographies/james-clerk-maxwell.html>



A. Einstein  
光量子仮説

<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%A2%E3%83%AB%E3%83%99%E3%83%AB%E3%83%88%E3%83%BB%E3%82%A2%E3%82%A4%E3%83%B3%E3%82%B7%E3%83%A5%E3%82%BF%E3%82%A4%E3%83%B3>

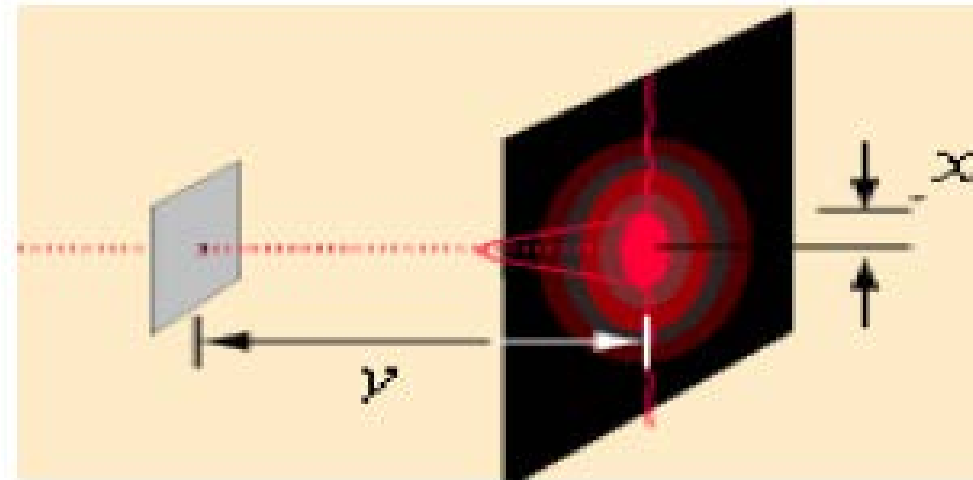


P. A. M. Dirac  
電磁場の量子論

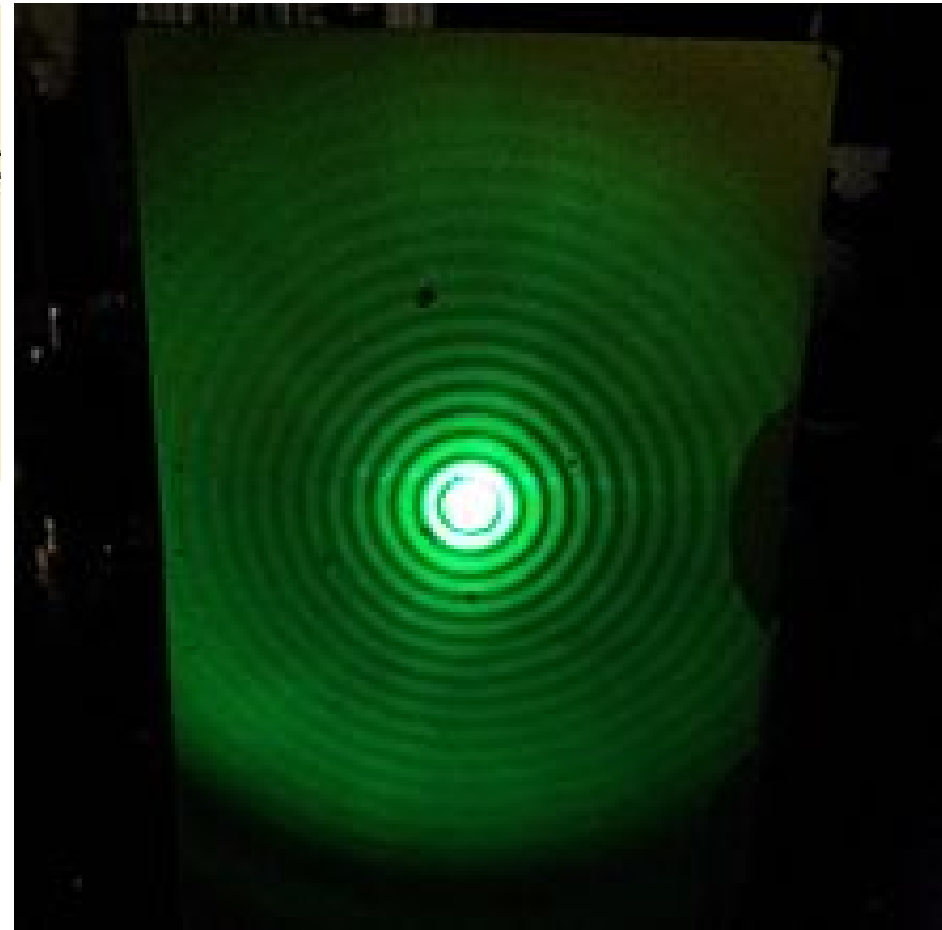
[http://www.emph.com.ua/9/edintr\\_o.htm](http://www.emph.com.ua/9/edintr_o.htm)

# 光の波動性

回折現象：細い穴を通った光が広がる。しかも明暗の縞模様ができる。



<http://www.physics.nus.edu.sg/pc2193/Experiments/Diffraction%20of%20a%20Circular%20Aperture.pdf>



[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Airy\\_disk\\_created\\_by\\_laser\\_beam\\_through\\_pinhole.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Airy_disk_created_by_laser_beam_through_pinhole.jpg)

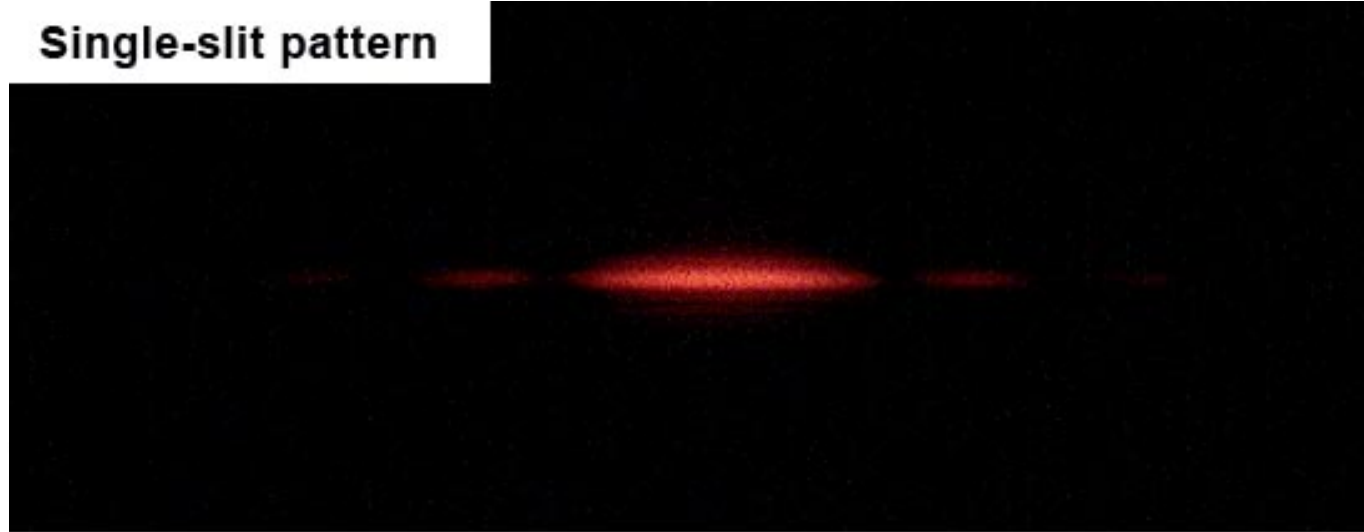
# 光の波動性

## 干渉効果：ダブルスリット

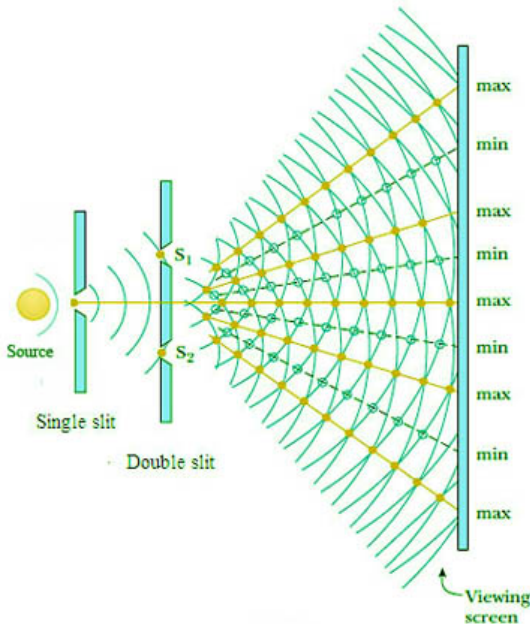
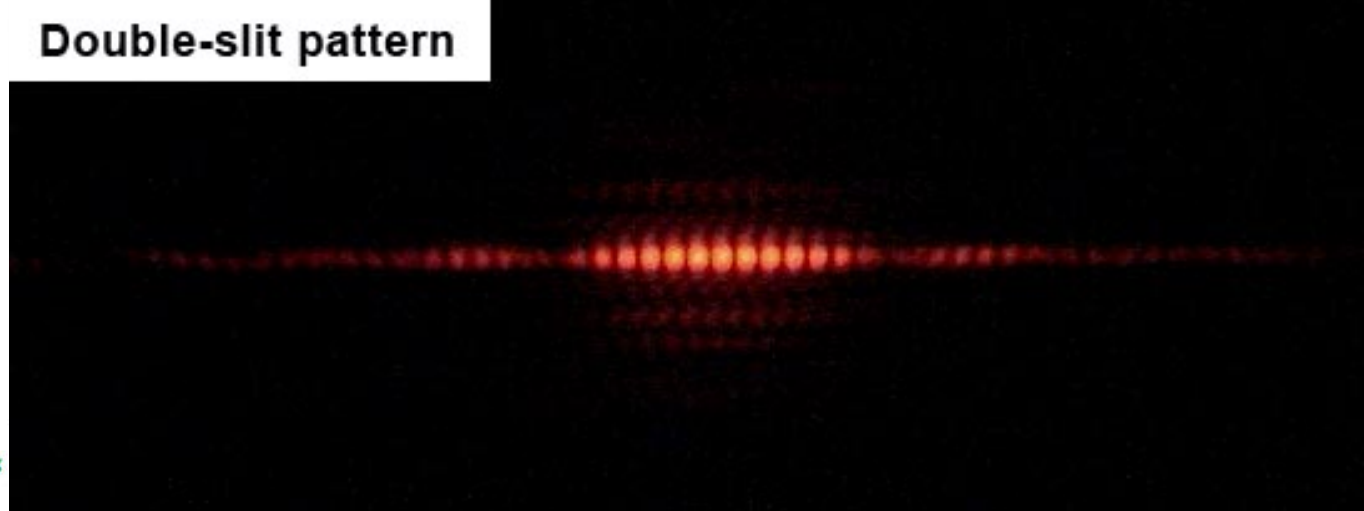
[http://en.wikipedia.org/wiki/Double-slit\\_experiment](http://en.wikipedia.org/wiki/Double-slit_experiment)

<https://practicallawandjustice.liberty.me/the-double-slit-experiment-a-rational-explanation/>

Single-slit pattern



Double-slit pattern

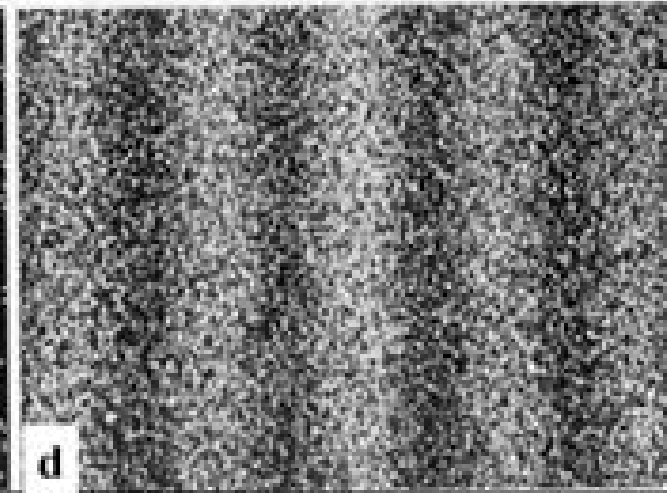
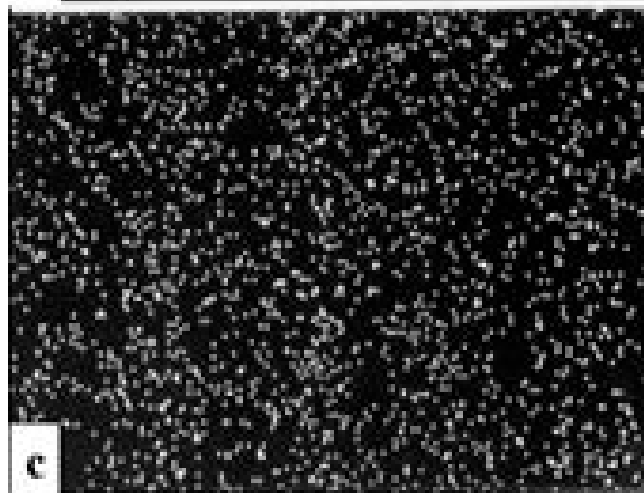
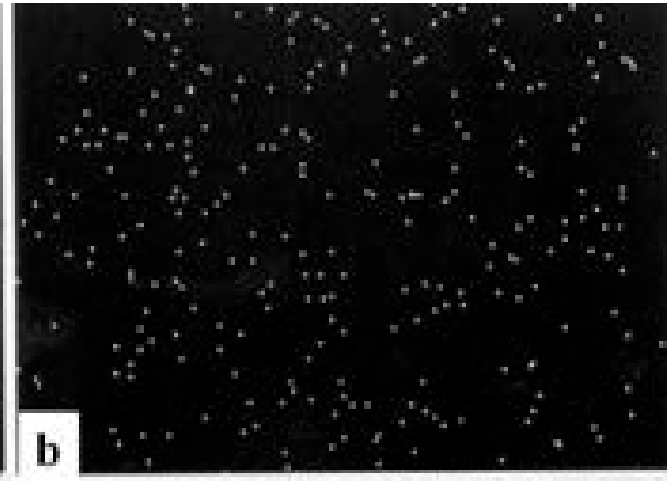
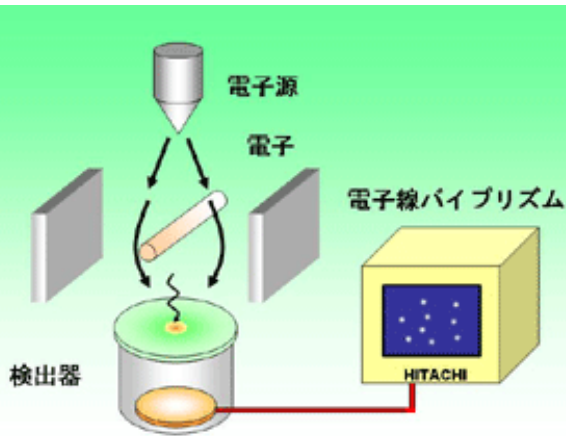




# 電子の波動性

## 外村実験

<https://www.hitachi.co.jp/rd/portal/highlight/quantum/doubleslit/index.html>



# 量子論によれば

- 電子も粒子性と波動性を持つ。
- しかし、光子や電子が粒子のように振る舞うとき、**空間中の点粒子**のようなものかということ、光子と電子では微妙な（しかし重大な）違いがある。

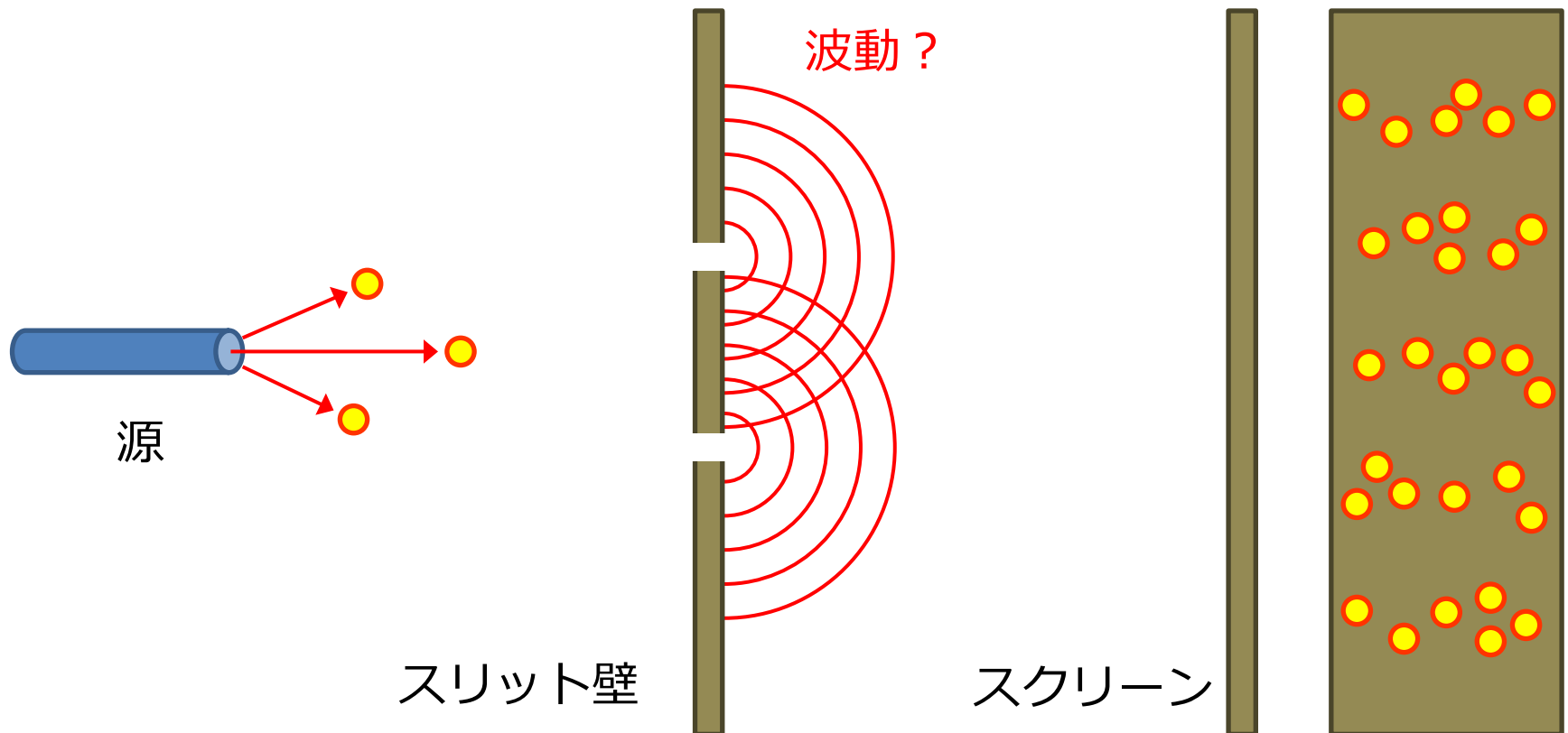
# 何が問題なのか？

- 電子は電荷保存則のおかげで個数が変わらないが、光子は容易に放出・吸収されて個数が変化する。
- 電子は質量があるが、光子は質量ゼロ。
- 電子は、観測すればここにある、というふうに位置を指定できる粒子だが、光子は（電子と同じ意味での）位置という概念を持たないことが、相対論的量子論では証明されている。
- 単位体積あたりの光子数密度もダメ。

# 光や電子のダブルスリット実験

粒子と波動の二重性，量子力学的振る舞いの典型例として教科書の始めの方に書かれる。

ぽつりぽつりと到着した粒子が干渉縞を描く



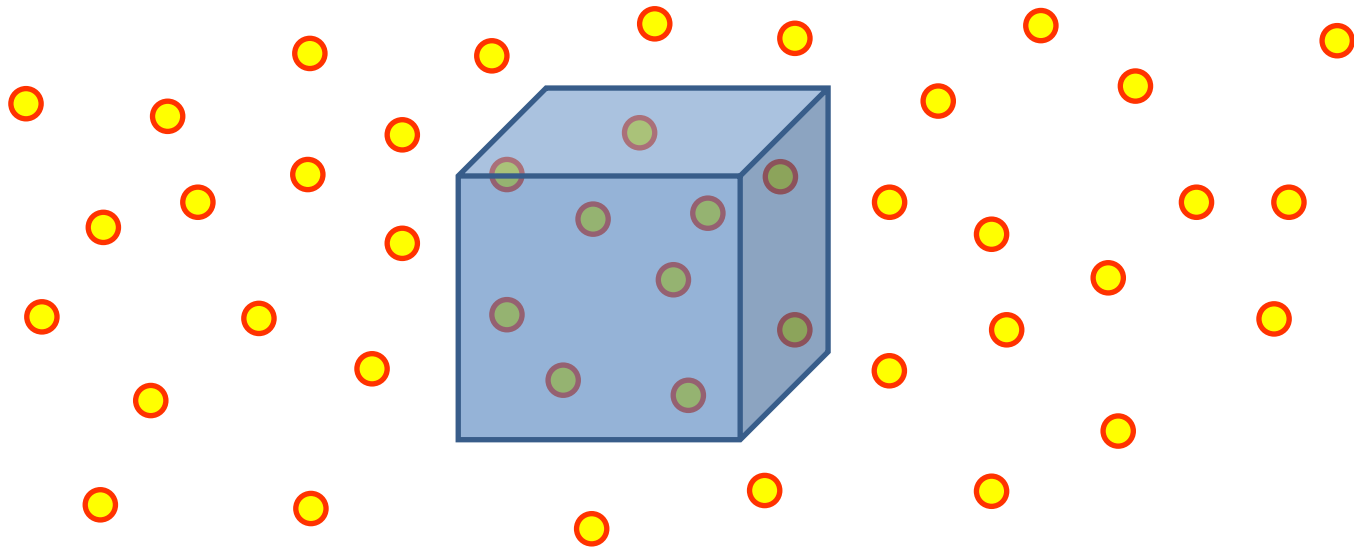
しかし、教科書を読み進むと…

正準交換関係 $[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$ が出て来るあたりになると、「光は相対論的対象であり、光子は質量ゼロで、非相対論的量子論では扱えない」とか何とか言い出して（あるいは何の断りもなしに）、**光子の位置と運動量の話は鳴りを潜めてしまう**。あるいは偏光状態だけに注目して話が進められる。

また、こういうハミルトニアンは光子に対してはNGとされる：
$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}^2 + \hat{V}(x, y, z)$$

# 光子の位置という概念は使ってはいけないのか？

「光子数密度 = 単位体積あたりの光子数」  
という概念は ill-defined なのか？



「明るい場所は光子ガスが濃くて、暗い場所は光子ガスが薄い」みたいな直観を働かせてはいけないのか？

# 「光子の位置の問題」の歴史

- Pauli (1933) : 光子のエネルギー-運動量密度はwell-definedだが, 光子数密度は場の量としては定義できないことを指摘 (パウリ『量子力学の一般原理』 p.294) .
- エネルギー密度  $\varepsilon = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$  は well-def.
- 個数密度を  $n = \frac{\varepsilon}{\hbar\omega}$  で定義すればいいんじゃないかと思われるかもしれないが, 周波数 $\omega$ は局所物理量ではない.
- $n = \frac{\varepsilon}{\hbar\omega}$  は mathematical artifact.

# 光子数密度がうまく定義 できないことの場の理論的説明

spin 0 : スカラー場  $\phi$

電荷カレント (1階微分)  $J_\mu = -i(\phi^\dagger \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^\dagger)$

エネルギーテンソル (2階微分)

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\nu \phi + \partial_\nu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - g_{\mu\nu} (\partial_\kappa \phi^\dagger \partial^\kappa \phi - m^2 \phi^\dagger \phi)$$

spin 1/2 : スピノル場  $\psi$

電荷カレント (0階微分)  $J_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$

エネルギーテンソル (1階微分)

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \bar{\psi} i(\gamma_\mu \partial_\nu + \gamma_\nu \partial_\mu) \psi - g_{\mu\nu} (\bar{\psi} i \gamma^\kappa \partial_\kappa \psi - m \bar{\psi} \psi)$$

spin 1 : ゲージ場  $A_\mu$  と 電磁場  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

電荷カレント (-1階微分)  $J_\mu = A^\kappa F_{\kappa\mu}$  ? ゲージ不変ではない

エネルギーテンソル (0階微分)

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} F_\mu^\kappa F_{\nu\kappa} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\kappa\sigma} F^{\kappa\sigma}$$

ゲージ変換  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$



## 光子位置問題の歴史 2

- Pryce (1948) : 光子の位置演算子を非可換にすれば Maxwell方程式と矛盾しない.

$$[\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0$$

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$$

$$[\hat{x}_j, \hat{x}_k] = i\hbar^2 \frac{\epsilon_{jkl} \hat{p}_l}{\|\hat{\mathbf{p}}\|^3}$$

とくに, 
$$[\hat{x}, \hat{y}] = i\hbar^2 \frac{\hat{p}_z}{\|\hat{\mathbf{p}}\|^3}$$

奇妙な不確定性関係をもたらしてしまう.

# Pryceの非可換位置演算子の解釈

モノポール磁場中の荷電粒子の量子力学の代数と同形：

$$[\hat{p}_x - e\hat{A}_x, \hat{p}_y - e\hat{A}_y] = i\hbar e(\partial_x \hat{A}_y - \partial_y \hat{A}_x)$$

$$= i\hbar e \hat{B}_z$$

$$= i\hbar e \frac{g}{\|\hat{\mathbf{r}}\|^2} \frac{\hat{z}}{\|\hat{\mathbf{r}}\|}$$

Pryceの交換関係

$$[\hat{x}, \hat{y}] = i\hbar^2 \frac{\hat{p}_z}{\|\hat{\mathbf{p}}\|^3}$$

$$= i\hbar^2 \frac{n}{2} \frac{\hat{z}}{\|\hat{\mathbf{r}}\|^3}$$

# 光子位置問題の歴史 3

- Newton-Wigner (1949), Wightman (1962) : 4次元Poincaré群のユニタリ既約表現の理論にもとづいて, 素粒子の局在状態の有無を検討した.
- 4次元Poincaré群 = Lorentz変換と4次元平行移動の合成変換群. 運動量演算子  $\hat{P}_\mu$  と角運動量演算子  $\hat{M}_{\mu\nu}$  で生成される.
- Wignerによる素粒子の分類

質量	スピン	ヘリシティ	例
$m \neq 0$	$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$	$h = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$	パイ中間子, 電子, ロー中間子, Wボソン
$m = 0$	$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$	$h = -j$ または $h = +j$	ニュートリノ, 光子

# Newton-Wignerの問題設定と結果

- 元の状態 $|\psi\rangle$ にゼロでない空間平行移動を施すと直交状態になるような $|\psi\rangle$ を「局在状態」と定める：  
$$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \langle \psi | e^{i\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{a}} | \psi \rangle = 0$$
- 結果：質量  $m \neq 0$  の表現の場合は、局在状態を作れる。
- $m = 0, j \geq \frac{1}{2}$  ですべての  $h = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$  成分を備えていない表現では局在状態が存在しない。
- 光子は  $m = 0, j = 1, h = -1, 1$  しかないので ( $h = 0$  の状態がない) ので局在状態がない。
- Weyl spinor ニュートリノも  $m = 0, j = \frac{1}{2}, h = \frac{-1}{2}$  のみなので局在状態がない。

# Wightmanの問題設定と結果

- 4次元Poincaré群の部分群として3次元Euclid群がある.
- 4次元Poincaré群のユニタリ既約表現から 3次元Euclid群の imprimitivity system (位置についての確率を与える射影演算子の代数) の表現は作れるか? という問題を提起した.
- 質量  $m \neq 0$  の表現の場合は, できる.
- 質量  $m = 0$ , スピン  $j \geq \frac{1}{2}$  の既約表現ではできない.  
光子はmassless, スピン1なので「光子の位置の確率密度」のようなものは定義できないことになる.

# Wightmanの方法

この既約ユニタリ表現は質量とスピんで特徴づけられ、相対論的素粒子を記述する。

4次元Poincaré群

$$SO(3,1)_+^\uparrow \rtimes \mathbb{R}^4$$

位置演算子を伴った代数

3次元Euclid群の imprimitivity system

$$(SO(3) \rtimes \mathbb{R}^3) * \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$$

部分群に落とすことは必ずできる。

3次元Euclid群

$$SO(3) \rtimes \mathbb{R}^3$$

こっちからこっちに持ち上げるのは非自明。

質量  $m = 0$ , スピン  $j \geq \frac{1}{2}$  の既約表現に対しては、この持ち上げができない。

# なぜ光子は局在化できないのか？

Newton-Wigner-Wightmanが証明したことを直観的に理解するのは難しいが、フーリエ積分と、光は横波だという事実を思い出すと、なんとなく理解できる。

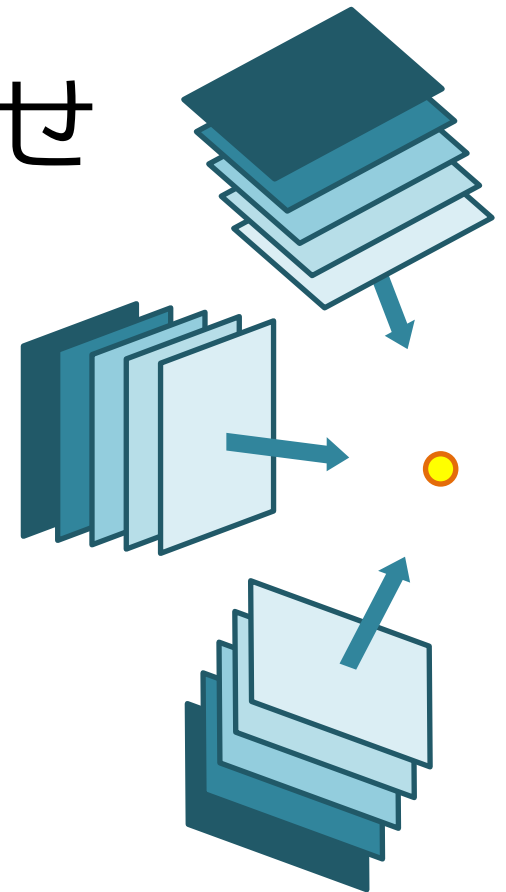
# 平面波の重ね合わせ

- フーリエ積分：すべての波数ベクトルの平面波を等振幅で重ねればデルタ関数になる：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \delta(x)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} d^3 k = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

- これで局在状態を作ればいいのか、と誰しも思うでしょう。



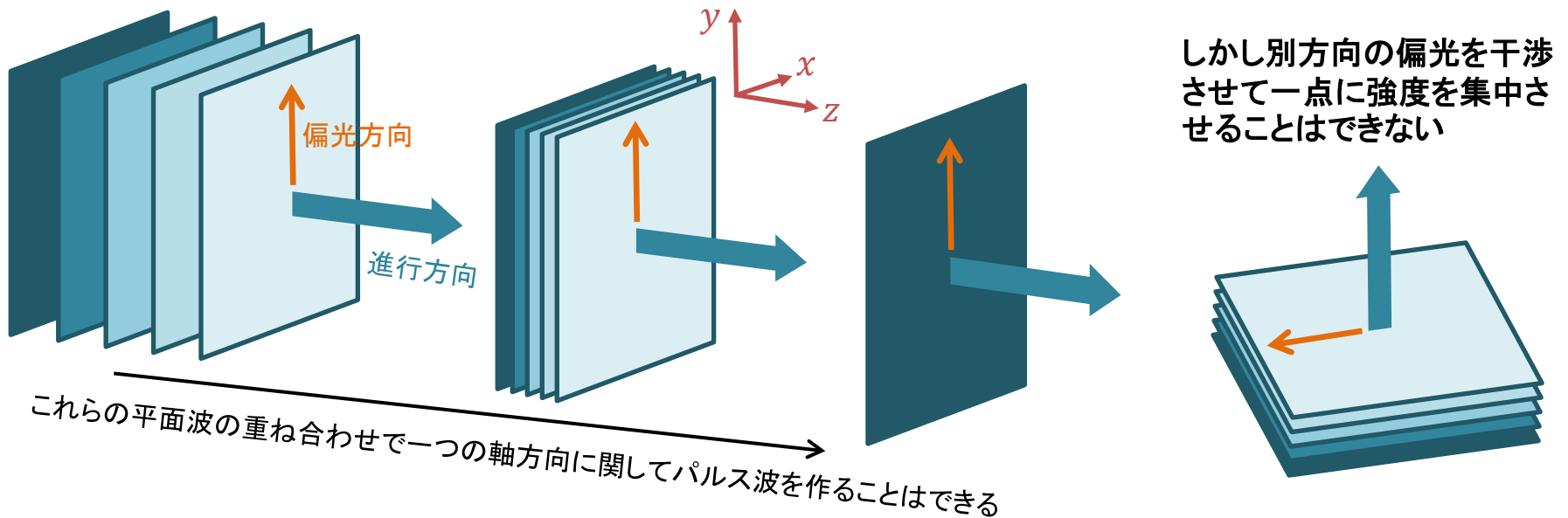


# 横波の重ね合わせでは デルタ関数はいできない

- 光は横波. 進行方向に直交する偏光ベクトルを持つ :

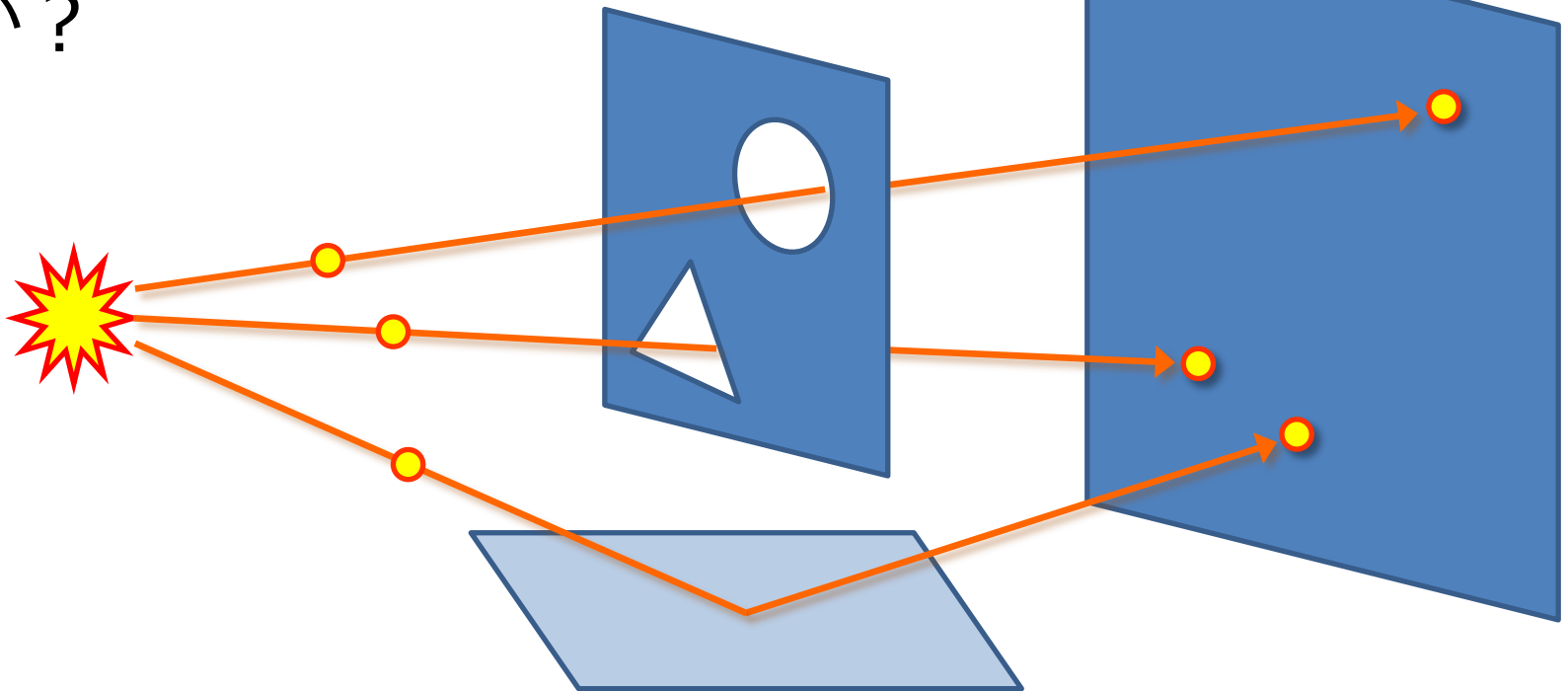
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \sum_{\alpha=1,2} \left( a_{\mathbf{k},\alpha} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k},\alpha} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} + a_{\mathbf{k},\alpha}^* \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k},\alpha}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t} \right) d^3k$$

- z軸方向に進行する平面波偏光を重ねればz軸に関して局在したパルス波は作れるが, どんなに偏光平面波を重ねても3次元的なデルタ関数はいできない.



しかし，日常経験・直観では，光には  
位置という属性があるように見える

光の発射点・通過点・到着点，光線の反射・屈折・影といった幾何学的概念は現実には機能している．  
どうにか光の位置概念を理論記述できないか？



# 光子の波動関数？

- 量子力学によれば、電子の存在確率密度は

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$$

で与えられる。

- 光子の存在確率密度を与える式は？

1.  $\rho(\mathbf{r}, t) \propto |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2$

2.  $\rho(\mathbf{r}, t) \propto |\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)|^2$

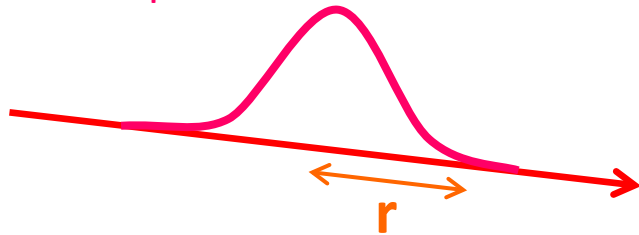
3.  $\rho(\mathbf{r}, t) \propto |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 + |\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)|^2$

我々が「光子」として検出しているものは電場なのか磁場なのか？

# 古典場の「局在光子」

古典Maxwell方程式にもとづいて、電磁場のエネルギー密度がなるべく狭い範囲に局在している解を探す。

photon wavepacket



energy density  $\varepsilon(r) \sim \frac{1}{r^\alpha}$

Pike, Sarkar (1987) : Newton-Wigner関数は $\alpha = 7$  .

Hellwarth, Nouchi (1996) :  $\alpha = 10$ の解を見つけた.

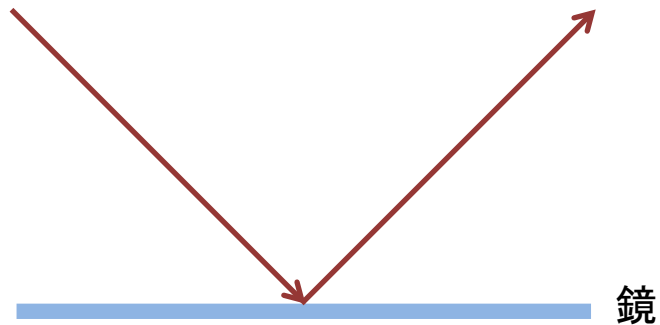
Adlard, Pike, Sarkar (1997) : 任意のベキの解を見つけた.

しかし、エネルギー密度の局在が「光子の局在」という概念を適切に表しているか？

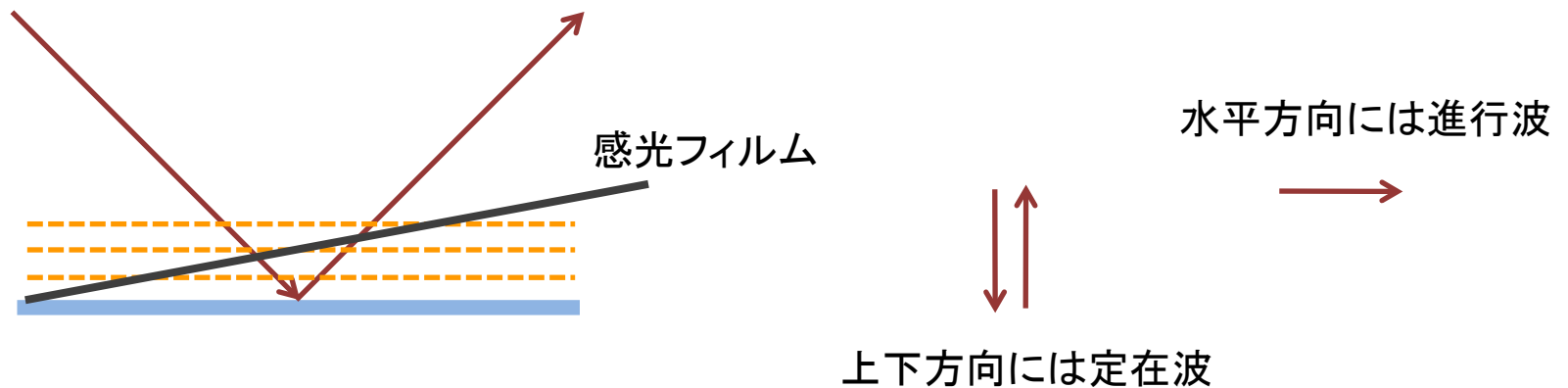
光は電場か磁場かという問いを考えるために

# Otto Wienerの実験 (1890年頃)

光を平面鏡に45度の入射角で当てて、反射させる。

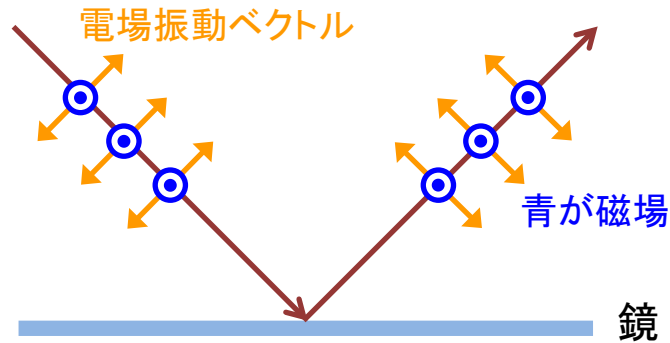


入射光と反射光が干渉して定在波ができる。それを感光フィルムで撮影する。



# Otto Wienerの実験

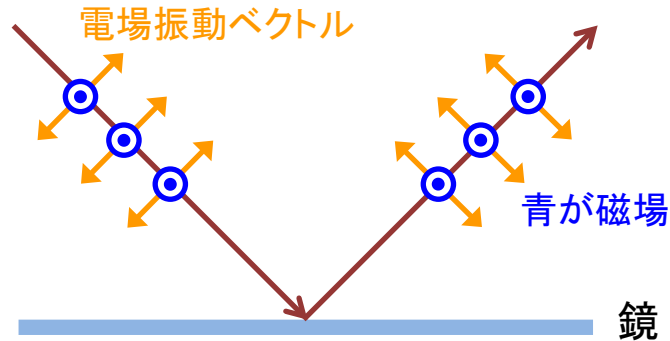
直線偏光を平面鏡に45度の入射角で当てて、入射光と反射光を干渉させる。



(a) P偏光: 電場ベクトルが入射面に平行

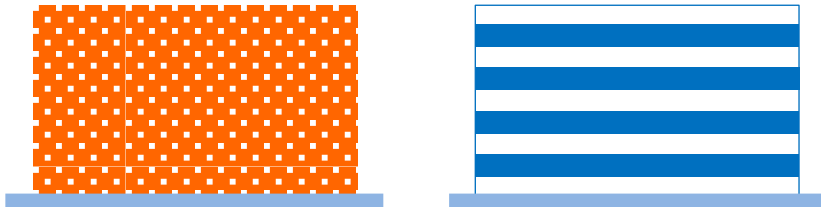
# Otto Wienerの実験

直線偏光を平面鏡に45度の入射角で当てて、入射光と反射光を干渉させる。



(a) P偏光: 電場ベクトルが入射面に平行

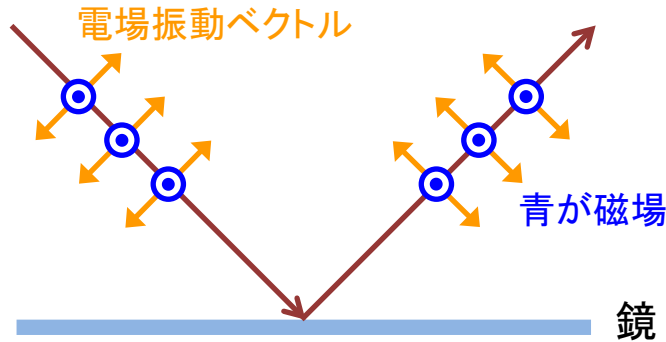
(a)における電場強度分布 (a)における磁場強度分布



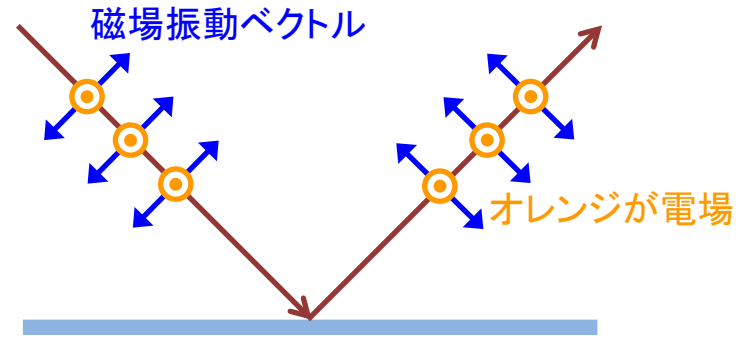
(a) では磁場の定在波ができる。

# Otto Wienerの実験

直線偏光を平面鏡に45度の入射角で当てて、入射光と反射光を干渉させる。

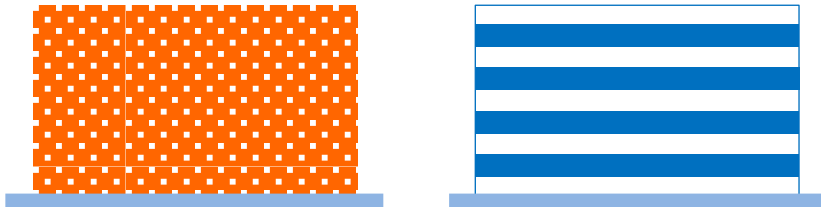


(a) P偏光: 電場ベクトルが入射面に平行



(b) S偏光: 電場ベクトルが入射面に垂直

(a)における電場強度分布 (a)における磁場強度分布

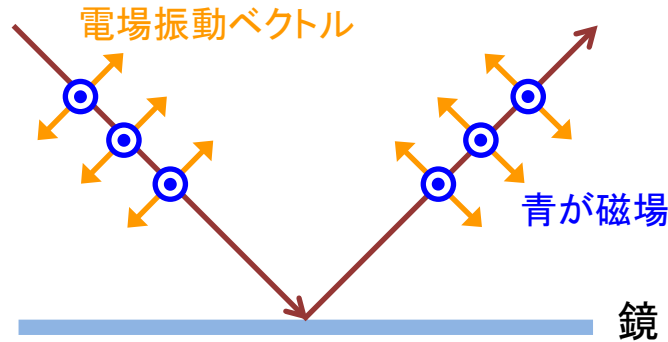


(a) では磁場の定在波ができる。

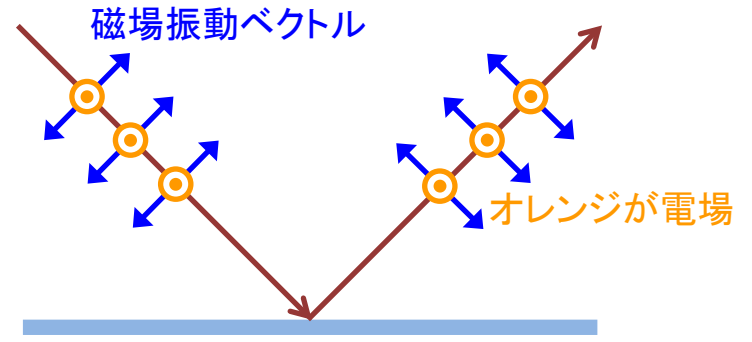


# Otto Wienerの実験

直線偏光を平面鏡に45度の入射角で当てて、入射光と反射光を干渉させる。



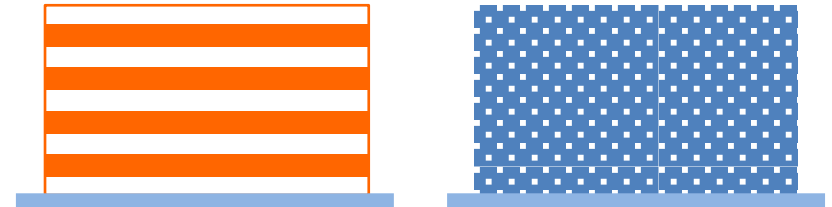
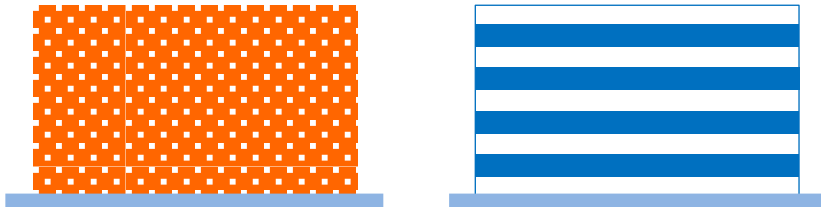
(a) P偏光: 電場ベクトルが入射面に平行



(b) S偏光: 電場ベクトルが入射面に垂直

(a)における電場強度分布 (a)における磁場強度分布

(b)における電場強度分布 (b)における磁場強度分布

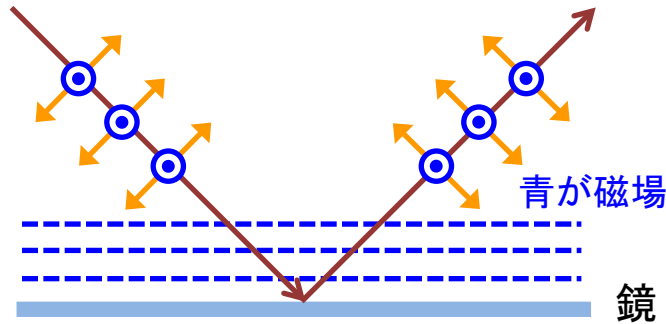


(a) では磁場の定在波ができる。

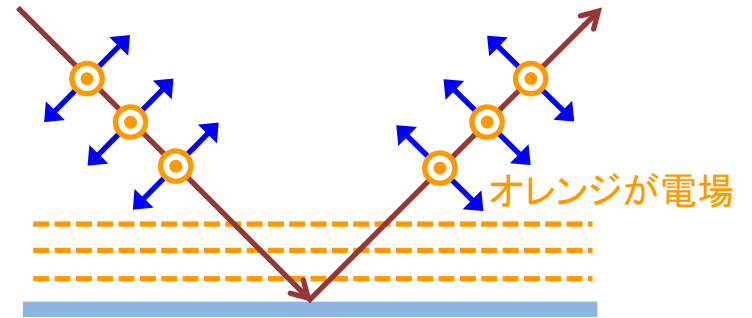
(b) では電場の定在波ができる。

# Otto Wienerの実験

直線偏光を平面鏡に45度の入射角で当てて、入射光と反射光を干渉させる。



(a) 磁場の干渉縞ができる.

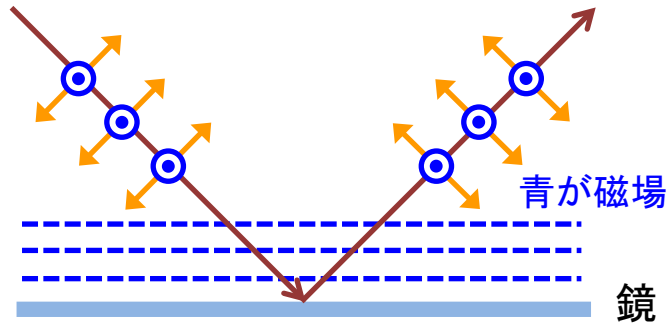


(b) 電場の干渉縞ができる.

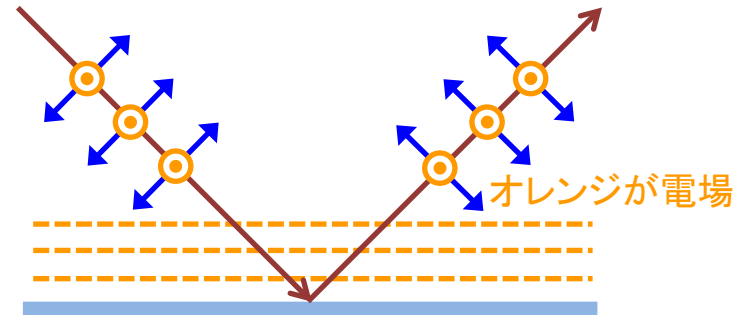
写真フィルムを置いたとき干渉縞が写るのはどちら？

# Otto Wienerの実験

直線偏光を平面鏡に45度の入射角で当てて、入射光と反射光を干渉させる。



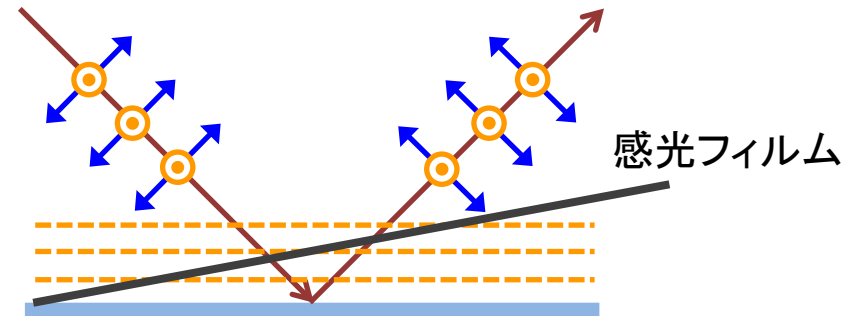
(a) 磁場の干渉縞ができる。



(b) 電場の干渉縞ができる。

(b)の場合だけ、干渉縞がフィルムに写る。

感光作用があるのは電磁波の電場成分。



# 我々は主に電場を「見ている」

- Otto Wiener (1890年頃) : 写真を感光させるのは電磁波の磁場  $B$  ではなく, 電場  $E$  であることを実証.
- 光化学反応や光電効果に主に寄与しているのは, 原子分子の電気モーメントと電場とのカップリング.

# 電子は電場からエネルギーをもらう

電子には電荷があるが磁荷はないので、古典的には、電磁場と電子の間のエネルギーのやりとりは、電場の作用がdominant :


$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = (e\mathbf{E} + \underline{e\mathbf{v} \times \mathbf{B}}) \cdot \mathbf{v}$$

$$= e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} + 0$$

磁場は点電荷に仕事をしない

# 光子の位置は測定器に依存する

- 導波管・ケーブル・共鳴空洞・フォトニック結晶など，一般の電磁波では，電場の節・腹の位置と，磁場の節・腹の位置は，ずれていてもおかしくない。
- 一般の電磁波に対して，電場に  sensitiveな検出器が感応する場所と，磁場検出器が感応する場所は，異なる。
- 「これこれの検出器をこの場所に置いた場合の光子の検出確率」なら語れる。

cf. 節腹の問題：京大と阪大の入試。音が大きく聞こえるのは粗密振幅が最大になる場所か，圧力勾配が最大になる場所か？

# 我々は結局、ゲージ場を見ている

原則として、光子は吸収というプロセスによってのみ、観測される。

ゲージ相互作用がそうになっている。

$$S_{int} = \int A_\mu J^\mu d^4x$$

光子の生成・消滅演算子  $A_\mu$       測定系の保存電荷・電流  $J^\mu$

「飛んでいる光子の位置」は仮想的・便宜的な観念に過ぎず、「光子と測定器が相互作用した時刻と場所」が定義・記述できればよい。

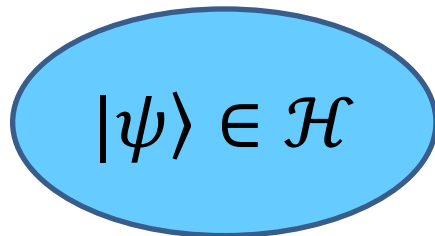
# 間接測定理論

- $\mathcal{H}$ : 対象系(photons)のヒルベルト空間
- $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ : 対象系の初期状態
- $\mathcal{L}$ : 測定器のヒルベルト空間
- $|\xi\rangle \in \mathcal{L}$ : 測定器の初期状態
- $\hat{U}$ :  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}$ 上のユニタリ時間発展演算子
- $\hat{M}$ : メーター物理量 ( $\mathcal{L}$ 上のエルミート演算子)
- $\hat{M} = \sum_m m \hat{\Pi}_m$ :  $M$ のスペクトル分解

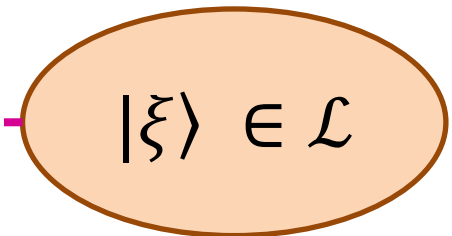


# 間接測定モデル

対象系



測定器



測定過程  $\hat{U}$

初期状態  $|\psi \otimes \xi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}$



終状態  $\hat{U}|\psi \otimes \xi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}$

$\hat{M}$ の値を読み取る

$$\hat{M} = \sum_m m \hat{\Pi}_m$$

$\hat{M}$ の固有値 $m$ に対する射影演算子  $\hat{\Pi}_m$

(値  $m$  を読み取る確率) =  $\langle \psi \otimes \xi | \hat{U}^\dagger \hat{\Pi}_m \hat{U} | \psi \otimes \xi \rangle = \langle \psi | \hat{P}_m | \psi \rangle$

# POVM

probability-operator valued measure

- POMV  $\{\hat{P}_m\}_m$  : メーターの読み取り値  $m$  でラベル付けられた, ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上のエルミート演算子の集合.
- $\hat{P}_m \geq 0$
- $\sum_m \hat{P}_m = I_{\mathcal{H}}$
- 測定値  $m$  を得る確率  
=  $\langle \psi | \hat{P}_m | \psi \rangle = \langle \psi \otimes \xi | \hat{U}^\dagger (\hat{I}_{\mathcal{H}} \otimes \hat{\Pi}_m) \hat{U} | \psi \otimes \xi \rangle$

# 光子と検出器のゲージ相互作用

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \int \hat{H} dt} |photon\rangle \otimes |detector\rangle = |vac\rangle \otimes |click@detector\rangle$$

光子と測定器の相互作用ハミルトニアン

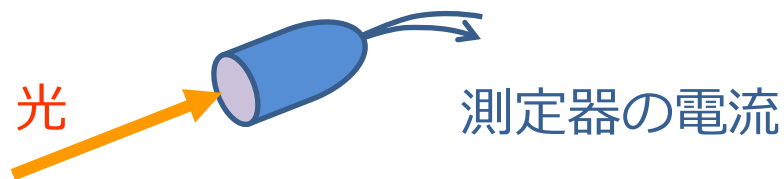
光子が吸収され, 測定系が励起される

$$\hat{H} = \hat{H}_{photon} + \hat{H}_{detector} + \hat{H}_{int}$$

$$\int \hat{H}_{int} dt = \int \hat{A}_\mu \hat{j}^\mu d^4x$$

光子のゲージ場

測定系の電流



# ゲージ不変な相互作用

光子のゲージ場  $\int A_\mu J^\mu d^4x$  測定系の保存電荷・電流  $\partial_\mu J^\mu = 0$

ゲージ変換：  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$

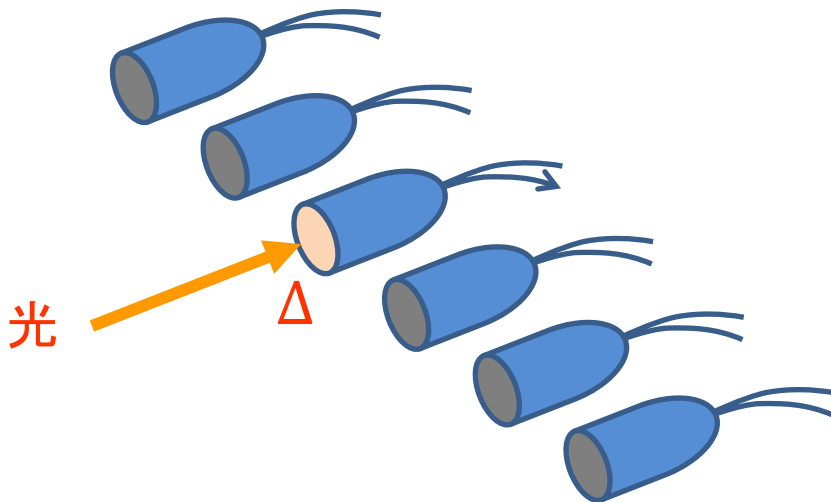
$$\begin{aligned} \int A_\mu J^\mu d^4x &\rightarrow \int (A_\mu + \partial_\mu \lambda) J^\mu d^4x \\ &= \int A_\mu J^\mu d^4x - \int \lambda \partial_\mu J^\mu d^4x \\ &= \int A_\mu J^\mu d^4x - 0 \end{aligned}$$

# ゲージ相互作用から POVMへ

$\Pi(\Delta)$  検出確率を記述する POVM (probability operator-valued measure)

$$\langle \text{photon} | \Pi(\Delta) | \text{photon} \rangle =$$

$$\langle \text{photon} | \otimes \langle \text{detctors} | U^\dagger (1 \otimes P(\Delta)) U | \text{photon} \rangle \otimes | \text{detectors} \rangle$$



$$U = e^{-\frac{i}{\hbar} \int H dt}$$

$$\int H_{int} dt = \int A_\mu J^\mu d^4x$$

$$P(\Delta) = |\text{click}@\Delta\rangle\langle\text{click}@\Delta|$$

# 摂動展開計算

- 測定器の初期状態  $|\xi\rangle = |ground\ state\rangle$
- 測定器の終状態  $\hat{\Pi}_m = |excited\rangle\langle excited|$
- POMV  $\langle\psi|\hat{P}_m|\psi\rangle = \langle\psi\otimes\xi|\hat{U}^\dagger(\hat{I}_{\mathcal{H}}\otimes\hat{\Pi}_m)\hat{U}|\psi\otimes\xi\rangle$  は  
 $\langle excited\ atom|e^{-i\int\hat{A}_\mu\hat{j}^\mu dt}|ground\ state\rangle$

を含み, その展開項 (ただし

$$\hat{j}^\mu(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{j}^\mu(0)e^{-i\hat{H}t}$$

$$\int\hat{A}_\mu\langle ex|\hat{j}^\mu(t)|gr\rangle dt = \int\hat{A}_\mu e^{i(E_1-E_0)t}\langle ex|\hat{j}^\mu(0)|gr\rangle dt$$

は, ゲージ場の正振動数成分 (消滅演算子成分) を引き出す. ( $E_1 > E_0$ であることに注意)

# 摂動展開の低次項

- 平面波展開 (クーロンゲージ)

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \int \sum_{\alpha=1,2} (\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k},\alpha} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} + \hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k},\alpha}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t}) d^3k$$

- 指数関数展開  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 1 + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \dots$  により,

$$\int (\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}}) dt = \int (\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{B}} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}) + \dots) dt$$

electric dipole coupling  
(E1 transition)

magnetic dipole coupling  
(M1 transition)

- 光子は電氣的結合でも吸収されるし、磁氣的結合でも吸収される。つまり、ものによっては光の磁場成分を見ることができる。

# 半古典近似：点電荷群

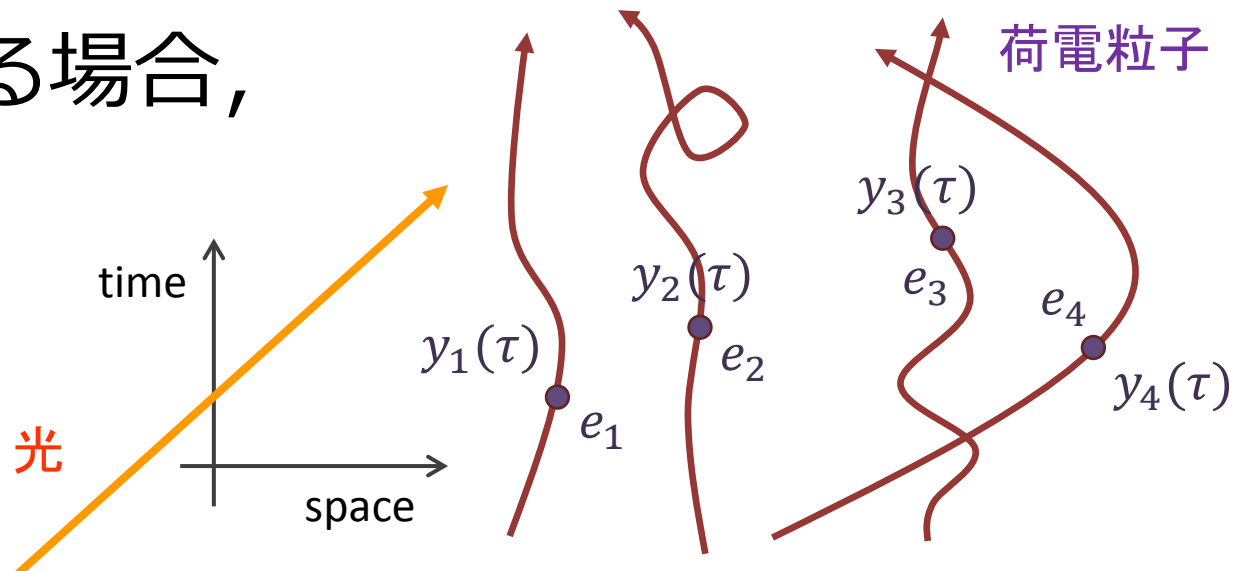
電流が

Aharonov の weak value に相当

$$\langle \text{click@}\Delta | J^\mu(x) | \text{detector} \rangle$$

$$= \sum_{\alpha=1}^n e_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy_\alpha^\mu(\tau)}{d\tau} \delta^4(x - y_\alpha(\tau)) d\tau$$

となっている場合,





# 点電荷対と電磁場のカップリング

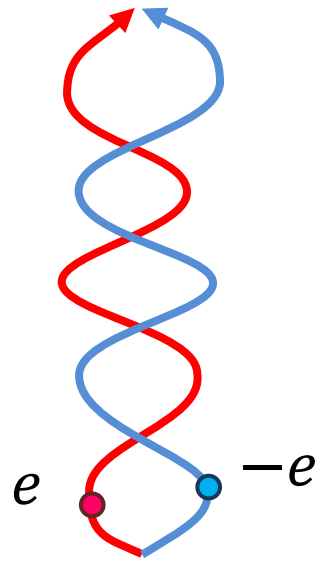
とくに電気双極子  $e_1 = -e_2 = e$  の場合,

$$\int A_\mu(x) \langle click@\Delta | J^\mu(x) | detector \rangle d^4x$$

$$= \sum_{\alpha=1,2} e_\alpha \int A_\mu(y_\alpha(\tau)) \frac{dy_\alpha^\mu(\tau)}{d\tau} d\tau$$

$$= e \int_{C_1} A_\mu dy^\mu - e \int_{C_2} A_\mu dy^\mu = e \oint_{C_1-C_2} A_\mu dy^\mu$$

$$= e \int_S F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = e \int_S F_{k0} dx^k dx^0 = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{p} dt$$



電場・電気双極子結合

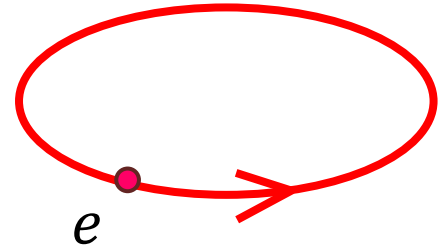
# 環電流と電磁場のカップリング

荷電粒子が単位時間あたり  $n$  回転運動している場合,

$$\int A_\mu(x) \langle \text{click@}\Delta | J^\mu(x) | \text{detector} \rangle d^4x$$

$$= en \int dt \int A_\mu(y(\tau)) \frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau} d\tau$$

$$= en \int dt \int_C A_\mu dy^\mu$$



$$= en \int dt \int_S F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = en \int dt \int_S F_{ij} dx^i dx^j = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{M} dt$$

磁場・磁気モーメント結合

# ちよつとまとめ

- 光子と測定器のゲージ相互作用から光子の位置の検出確率を記述する POVM  $\Pi(\Delta)$  が構成できた.

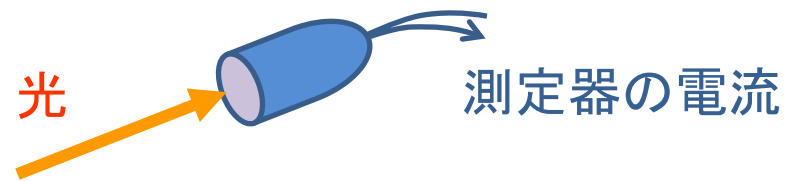
$$\langle photon | \Pi(\Delta) | photon \rangle$$

$$= \langle photon | \otimes \langle detectors | U^\dagger (1 \otimes P(\Delta)) U | photon \rangle \otimes | detectors \rangle$$

$$P(\Delta) = |click@\Delta\rangle \langle click@\Delta|$$

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar} \int H dt}$$

$$\int H_{int} dt = \int A_\mu J^\mu d^4x$$



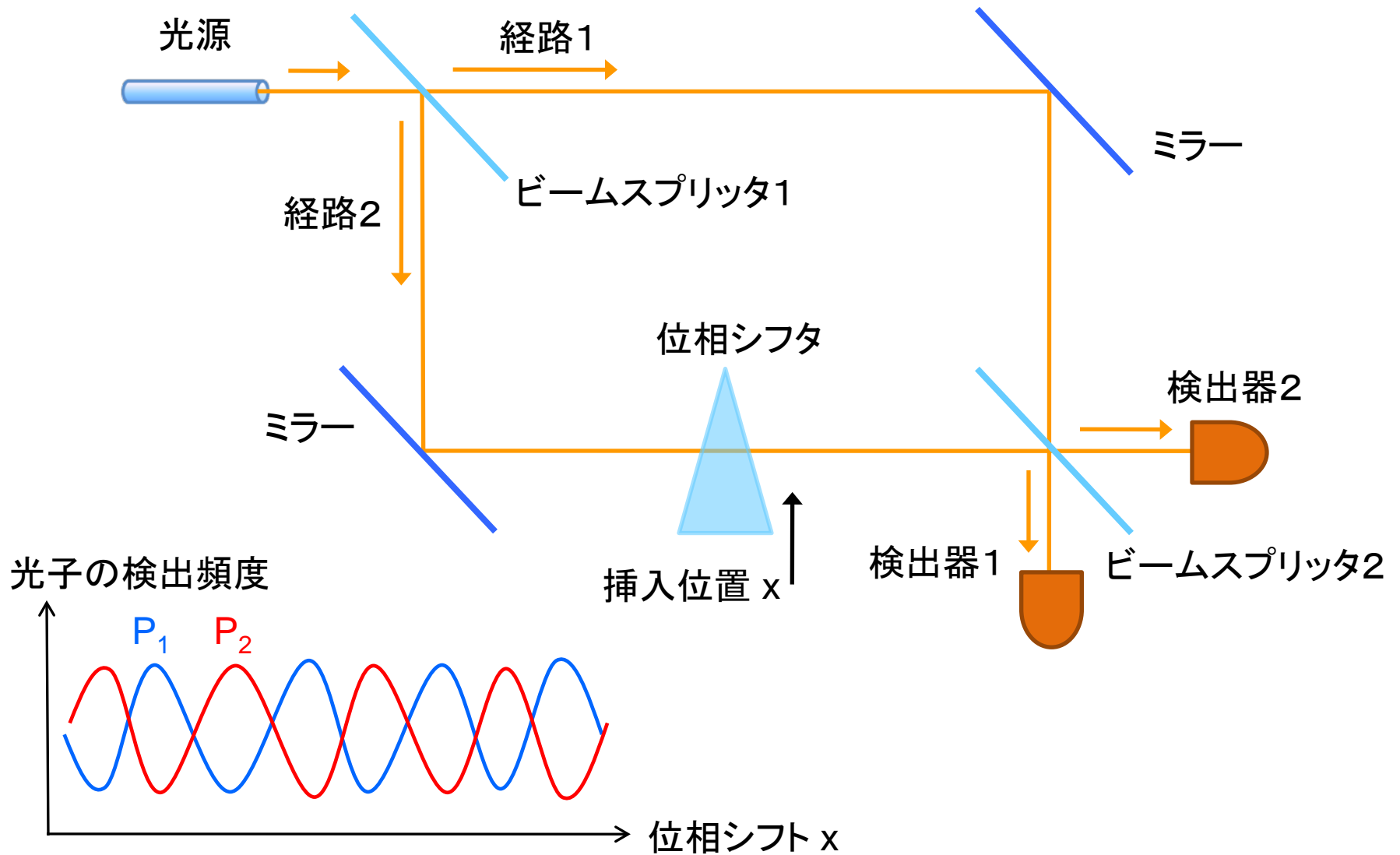
- このPOVMは光子の実測の状況を忠実に記述している。  
とくに電場・電気双極子結合を正しく捉えている。

# 光の電波成分も磁場成分も観測可能

- (ここに至る理論を省略しましたが) 光子は**電氣的結合**でも吸収されるし, **磁氣的結合(スピンなど)**でも吸収されうる. つまり, ものによっては光の磁場成分を見ることもできる.
- 電波で測る光子の位置と, 磁波で測る光子の位置は異なる可能性がある.
- そのことがどんな結論をもたらすのか?

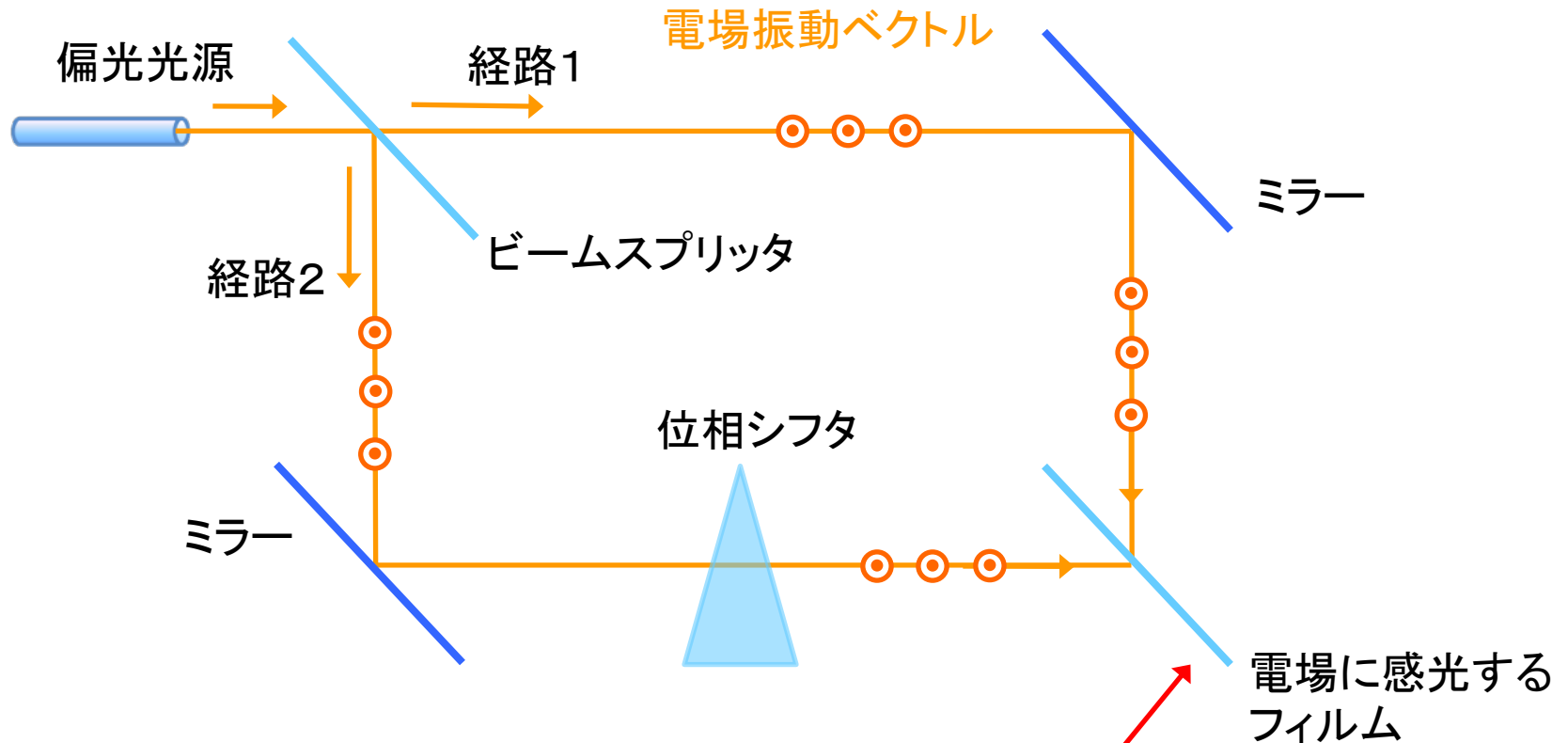
# 新しい実験の提案に向けて

マツハ・ツェンダー干渉計



# 測定器の配置を変える

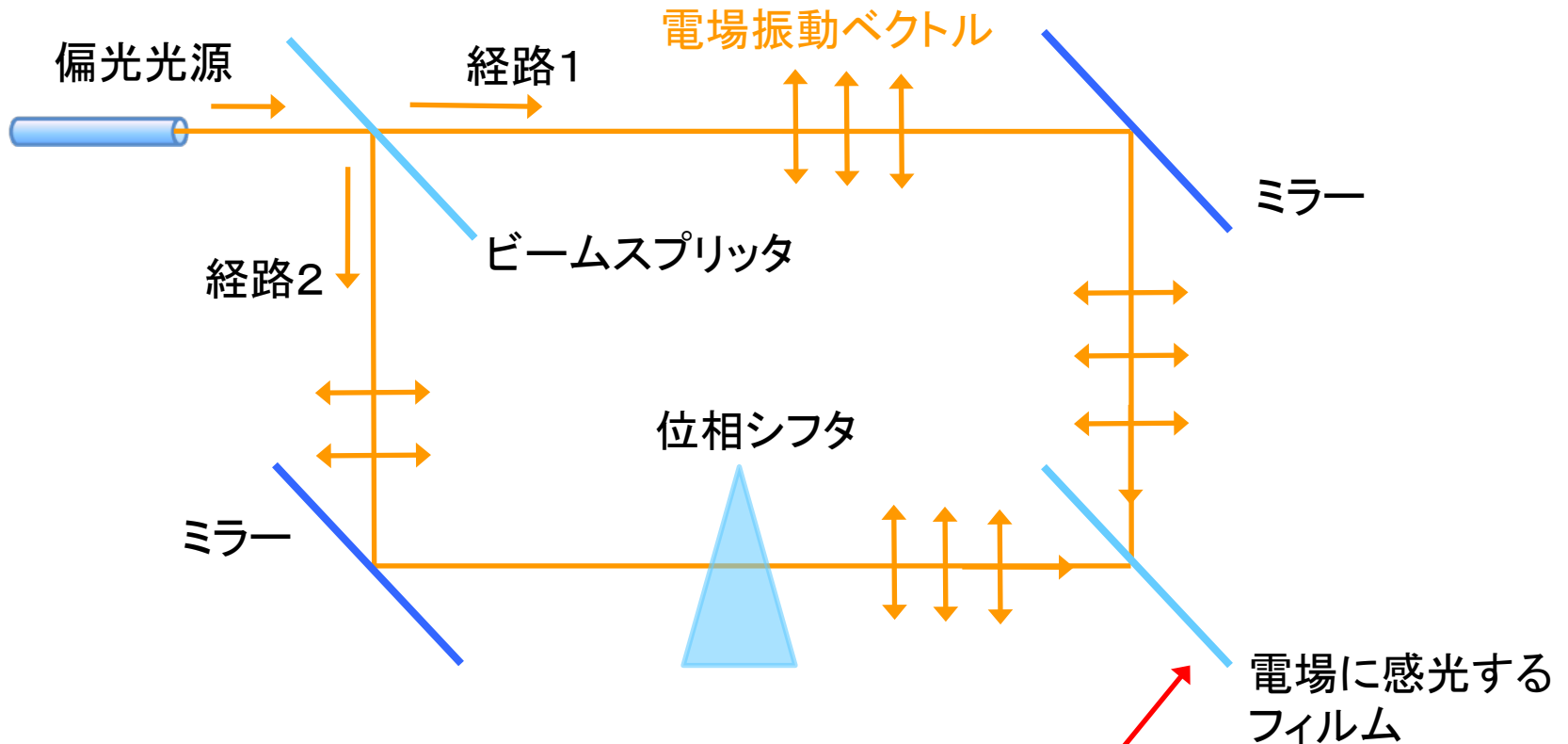
マツハ・ツェンダーぽい干渉計



これなら干渉縞を生じるであろう。

# 光源の偏光を変える

マツハ・ツェンダーぽい干渉計

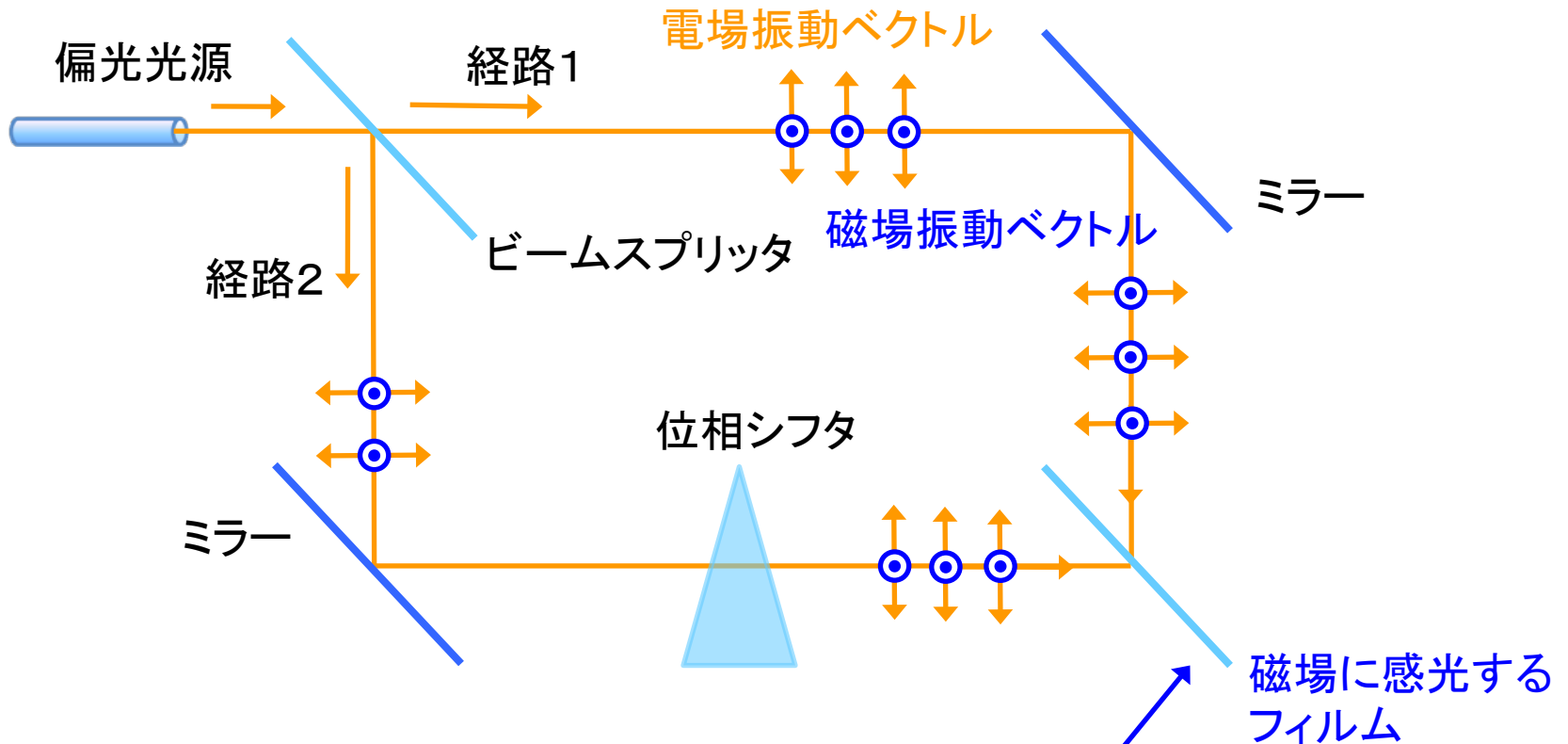


遅延選択する余地もある。

これだと干渉縞を生じないであろう。

# 測定器の特性を変える

マツハ・ツェンダーぽい干渉計



これなら干渉縞を生じるであろう。



# 相補性

Complementarity

- 粒子性 vs. 波動性
- 経路識別 vs. 干渉効果
- 図地反転のトリックアート

ルビンの壺

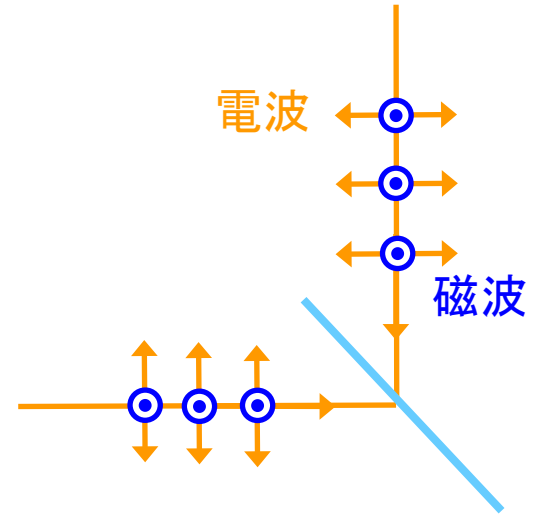
<http://blog-imgs-61-origin.fc2.com/s/h/i/shironekoan/20130903154201ecb.jpg>



- 相補性とは：同時には顕在化しない両面性。一方が顕在化するとき，他方は潜在化する。それでいて，どちらも本質的。

# 相補性と不確定性

- この配置の場合，電場感光原子では干渉は見えないが，光子の経路は識別できる。
- 磁場感光原子では，干渉は見えるが，経路は区別できない。



- 電場と磁場は非可換で，同時測定不可能。

$$[\hat{E}_j(\mathbf{x}), \hat{B}_k(\mathbf{y})] = ic\hbar\varepsilon_{jkl}\partial_l\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

- 経路識別と干渉の相補性は守られている。

# Take-home messages

- 光子は、砂粒のように位置を持った粒子ではない。光子の位置概念は数学的には定まらない。
- そうなってしまふのは、光子がmasslessかつ spin 1であるから。
- 光の平面波の重ね合わせ一軸方向に関してパルス状の光を作ることにはできるが、3次元的な局在光子はできない。

# Take-home messages 2

- 光子と検出器との相互作用が生起する場所・時刻・確率なら定義できるが、検出器の種類に依存した概念になる。
- 電場に感応する装置が定める光子位置と、磁場に感応する装置が定める光子位置は異なりうる。
- 電場と磁場の間に不確定性関係があるため、両者の測定は両立しないし、結果的に相補性を擁護している。

# Proposal

- 電磁波の電場成分に感応する・磁場に感応する, を切り替え可能な装置はあるか？
- 電場と磁場の相補性を利用した量子暗号システムは作れるか？

# エピソード

- 「光子の存在確率は電場の2乗に比例する」というアイデアをアインシュタインは唱えていたらしい。
- それにヒントを得て1926年にボルンは「電子の存在確率は波動関数の絶対値2乗に比例する」という解釈を思いついた、とノーベル賞講演（1954年）で語っている。
- 一方で、アインシュタインとラップ(Emil Rupp)は光は**エネルギー粒子と確率波**からなるという仮説を唱え、実験物理学者であったラップは1926年にこれを実証したという論文を発表した (van Dongen, [arXiv 0709.3226](https://arxiv.org/abs/0709.3226))
- 1935年にゲルラツハらはラップの実験結果がねつ造であったことを暴き、ラップは論文を取り下げ、学界から姿を消した。ついでにアインシュタインの「光子の存在確率説」も忘れられてしまったらしい。

# 教訓

- 研究は、新しく正しい知識を生み出すためにすること。
- わからないことは研究のチャンスと捉え、さらに研究すればよい。
- 科学者は信用が第一。嘘をついたらおしまい。

時間がないので紹介だけ

# アブラハム・ミンコフスキー論争

電磁場の運動量密度の定義式：

- Minkowski (1908)

$$\mathbf{G}_M = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$$

- Abraham (1909)



$$\mathbf{G}_A = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

<http://caltech.discoverygarden.ca/islandora/object/ct1%3A3146>



<http://scienceworld.wolfram.com/biography/MinkowskiHermann.html>



# アブラハム・ミンコフスキー論争

電磁場の運動量密度の定義式：

- Minkowski (1908)

$$\mathbf{G}_M = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$$

- Abraham (1909)

$$\mathbf{G}_A = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

真空中では両者は一致するが，物質中では異なる．

屈折率  $n$  の物質中の光子運動量：

$$p_M = \frac{nh\nu}{c}, \quad p_A = \frac{h\nu}{nc}$$

# アブラハム・ミンコフスキー論争

- どちらの定義式が正しいかという論争.
- ミンコフスキーは1909年に亡くなり（44歳），アブラハムは1922年に亡くなった（47歳）.
- 1950年にラウエがミンコフスキーが正しいと結論して，以後注目されなくなったが，ラウエの論証が間違っていたことが後に判明.
- あまりにも長く続いているため論争の全貌を把握することすら困難.
- 実験もなされているが，決定打はない.

Peter Bowyer, "The momentum of light in media: the Abraham-Minkowski controversy".  
(ネット検索すると見つかる)

# アブラハム・ミンコフスキー論争

- 谷村の見解：おそらく物質中の平均場の考え方からして間違っている。

例：交流電圧の平均仕事率：

$$\text{(正)} \quad P = \langle VI \rangle = \langle V_0 \cos \omega t \cdot I_0 \cos \omega t \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0$$

$$\text{(誤)} \quad P = \langle V \rangle \langle I \rangle = 0$$

$$\mathbf{G}_M = \langle \mathbf{D} \times \mathbf{B} \rangle \neq \langle \mathbf{D} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle$$

- 普遍的に正しい式を書こうとするよりも，測定状況における momentum transfer を正確に予測できればよしとする。

# アブラハム・ミンコフスキー論争

- 時間平均と空間平均の取り方が問題だと思う。
- しかも時間遅れや空間相関もあって、一筋縄にはいかない。
- すみません、私も未解決です。

**Thank you for your attention**

