

量子と古典の物理と幾何 研究会

東大先端研にて

2019.8.2

れい

振形式の定義・描像・応用

谷村 省吾

名古屋大学 大学院 情報学研究科

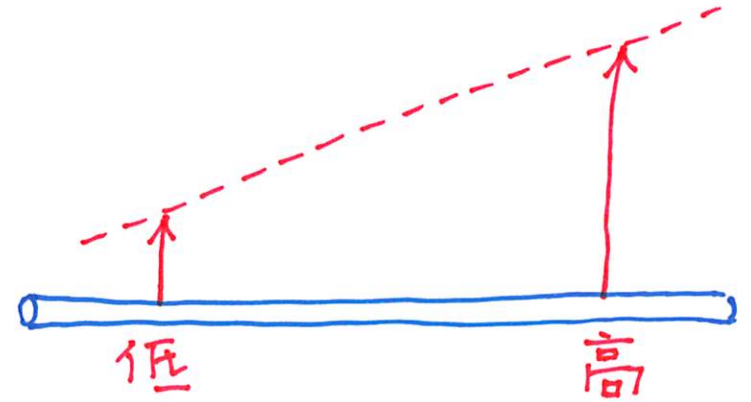
twitter @tanigs

向きと量

密度量 ... 単位長さあたりの〇〇, 単位体積あたりの〇〇

- 向きあり. 例. 温度勾配

$10^{\circ}\text{C}/\text{右向き}1\text{m}$



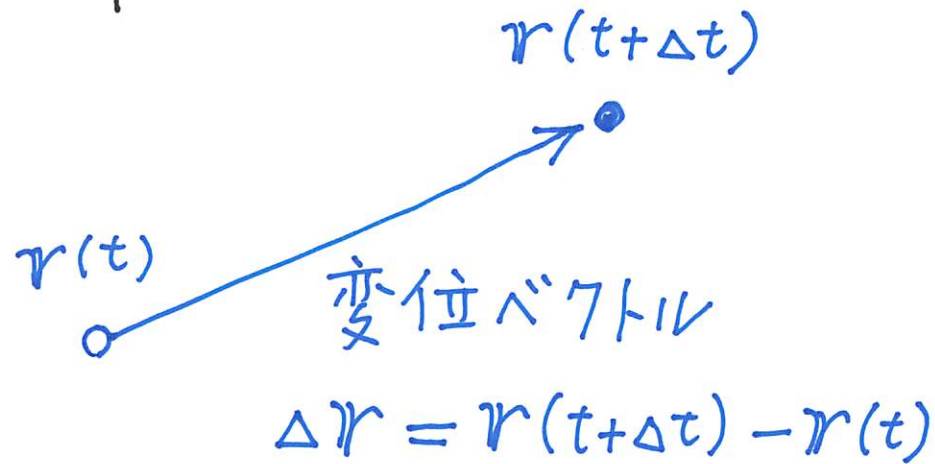
- 向きなし. 例. 質量密度

$10\text{g}/\text{m}$



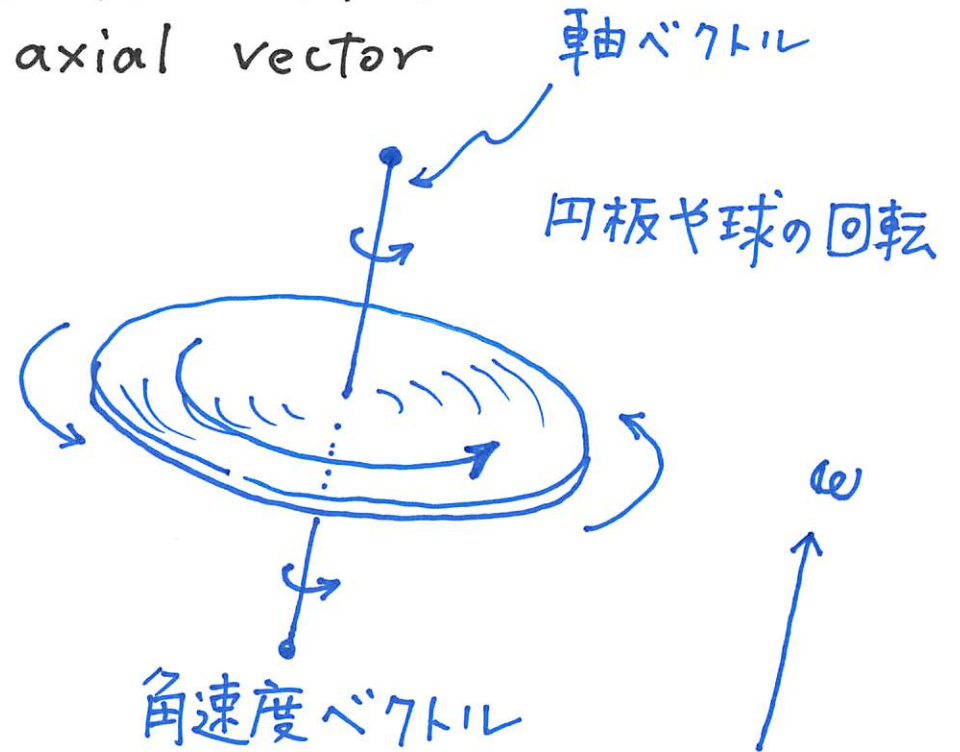
“向き”のありようは 2種類

極性ベクトル
polar vector



始点と終点, 頭と尾の区別がある。

軸性ベクトル
axial vector

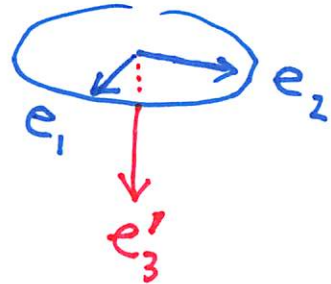


本質的に頭と尾の区別がない。

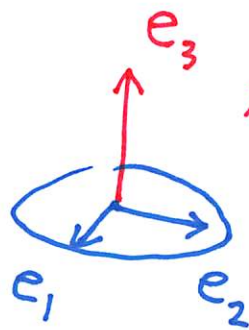
軸そのものの向きよりも、軸の周りの(軸に直交する平面上の)回転の向きに意味がある。

“左手系”か“右手系”を選ぶは回転面に対する法線の向きが定まるが、選択は恣意的である。

左手系



右手系



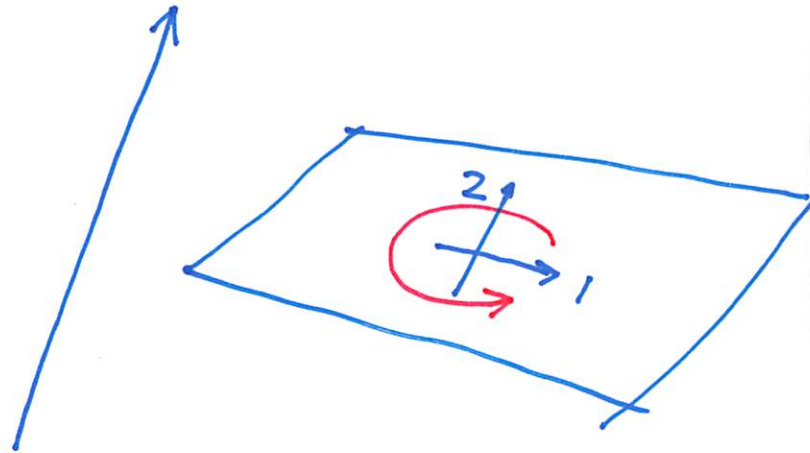
2種類の向き

接的向き

沿う向き
内側で

1次元

2次元



数学的には

常形式
normal form

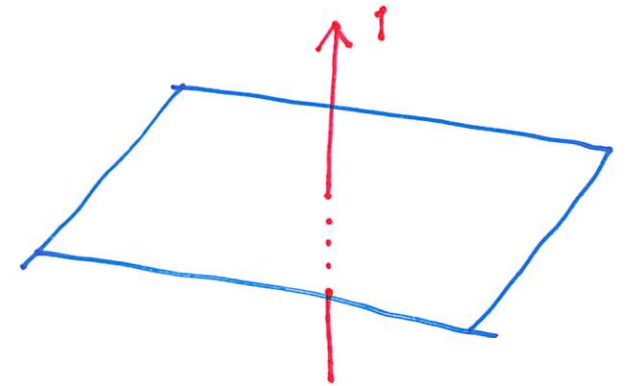
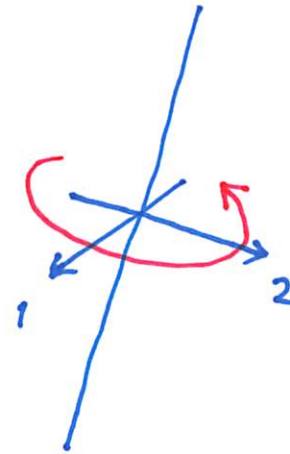
偶種の量

横断的向き

外から横切る向き

3次元空間中の
1次元図形

3次元空間中の
2次元図形

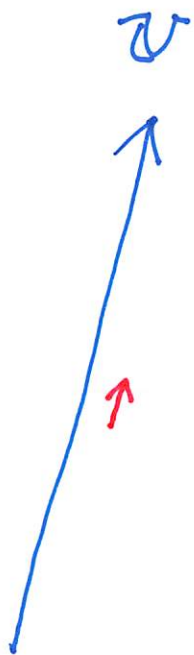


振形式
twisted form

奇種の量

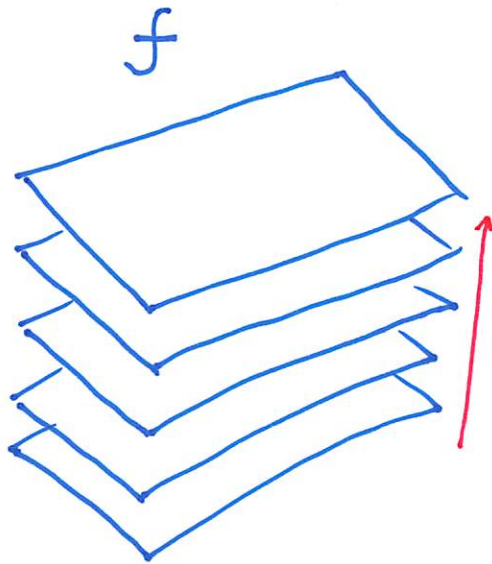
Zoo of Schouten diagrams スハウテン図形表示

1-vector



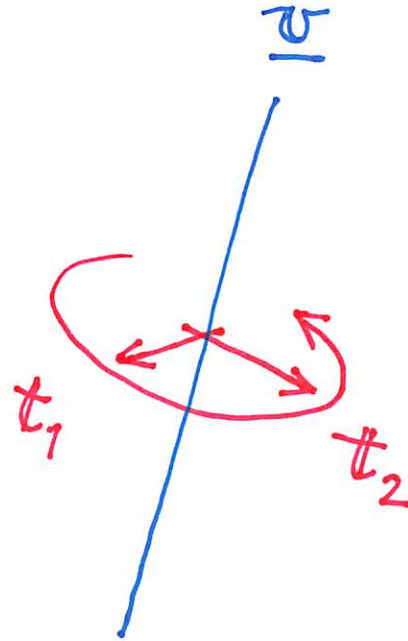
along

1-covector



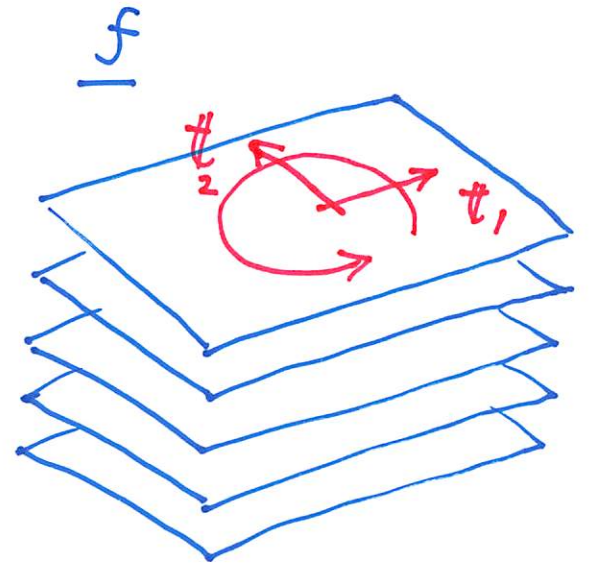
across

twisted 1-vector



across

twisted 1-covector

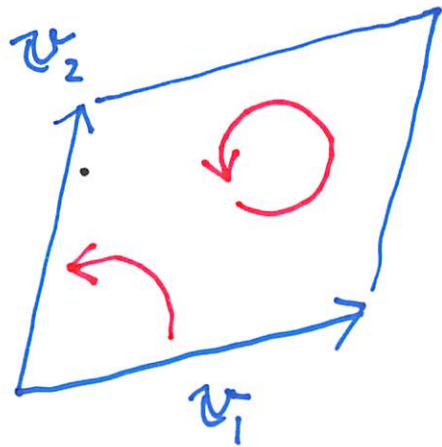


along

in 3-dim space

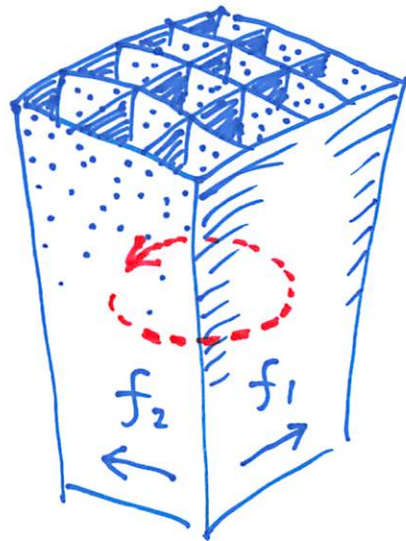
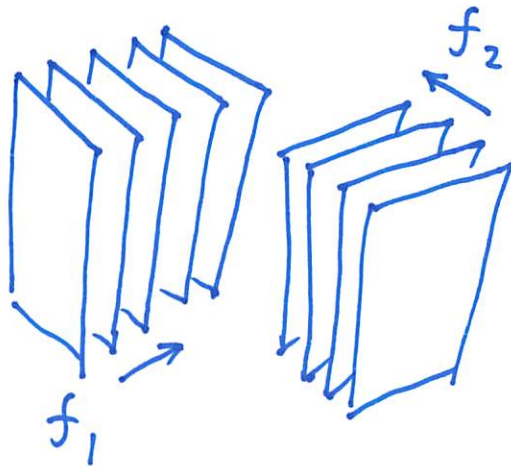
Zoo of Schouten diagrams

2-vector



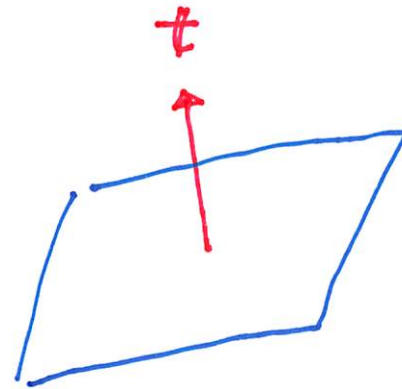
$$v_1 \wedge v_2$$

2-covector



$$f_1 \wedge f_2$$

twisted 2-vector



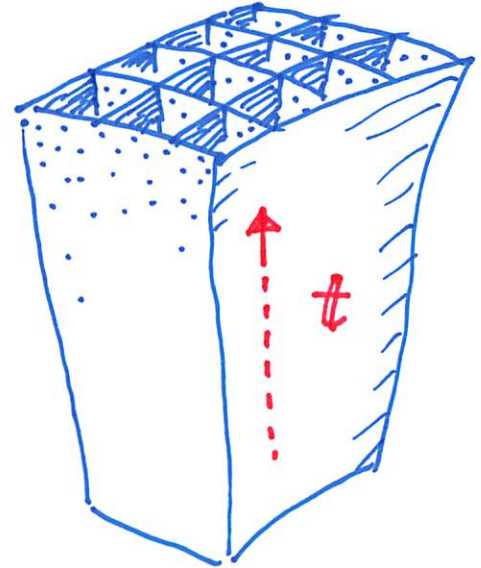
$$\underline{v_1 \wedge v_2}$$

$$= \varepsilon \otimes v_1 \wedge v_2$$

$$= [t \wedge v_1 \wedge v_2]$$

$$\otimes v_1 \wedge v_2$$

twisted 2-covector



$$\underline{f_1 \wedge f_2}$$

$$= \varepsilon \otimes f_1 \wedge f_2$$

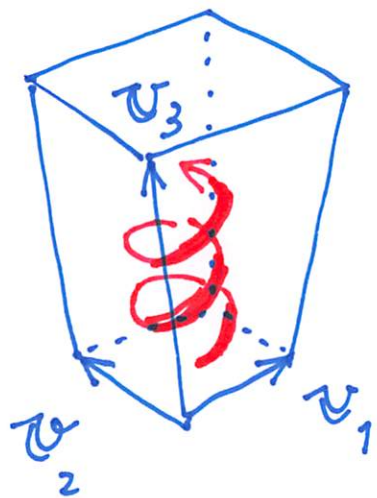
$$= [t \wedge v_1 \wedge v_2]$$

$$\otimes f_1 \wedge f_2$$

in 3-dim space

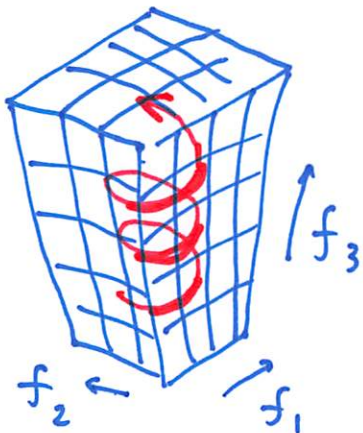
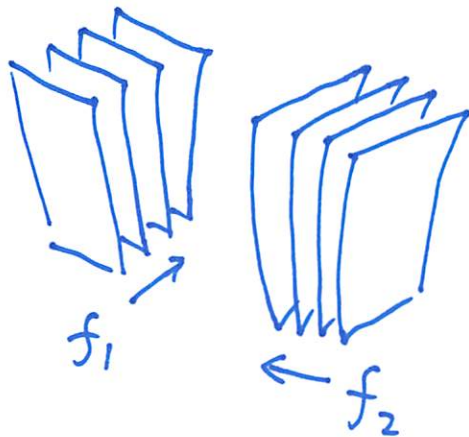
Zoo of Schouten diagrams

3-vector



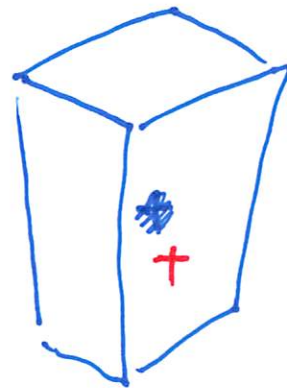
$$v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$$

3-covector



$$f_1 \wedge f_2 \wedge f_3$$

twisted 3-vector



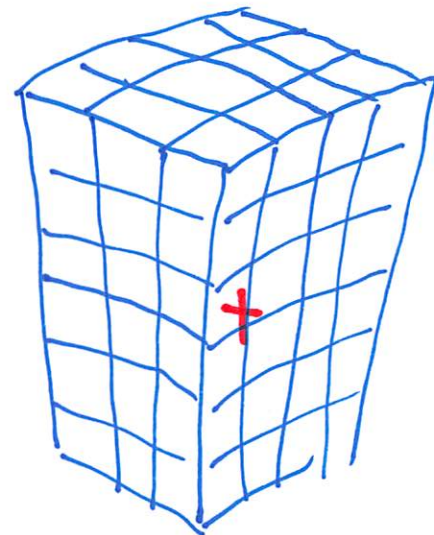
$$\underline{v_1 \wedge v_2 \wedge v_3}$$

$$= \varepsilon \otimes (v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)$$

$$= [v_1 \wedge v_2 \wedge v_3]$$

$$\otimes v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$$

twisted 3-covector



$$\underline{f_1 \wedge f_2 \wedge f_3}$$

$$= \varepsilon \otimes f_1 \wedge f_2 \wedge f_3$$

$$= [f_1 \wedge f_2 \wedge f_3]$$

$$\otimes f_1 \wedge f_2 \wedge f_3$$

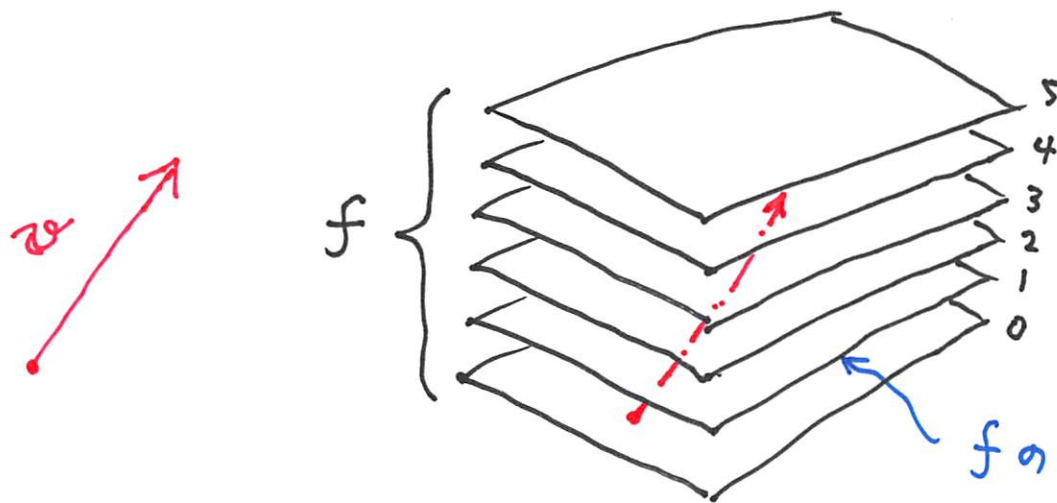
スハウテン \boxtimes 形のなりたち

ベクトル $v \in V$ ベクトル空間 は矢 arrow で表す.

コベクトル $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ 実数値, 線形関数
(1-7オ-4) $v \mapsto f(v)$ $f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v)$
 $f(v+v') = f(v) + f(v')$

$V^* := \{f: V \rightarrow \mathbb{R}\}$ V の双対空間 = 線形関数全体

ペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle: V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 関数と引数も
 $(f, v) \mapsto \langle f, v \rangle := f(v)$ 対等のものとみなす



$$\langle f, v \rangle = 4.6$$

ベクトルが貫く平面数もカウント.

f の等高面 = 等値集合 = level set

測定とは量を数に変換することだ。



この棒の長さはいくら？



単位量 e を決める



e を何倍すれば L に等しくなるか？

$$L = 3.6e$$

$$(L = 3.6m)$$

コベクトル

$$e^{-1}(L) = 3.6$$

= 量をカウントするもの、
量を数える、数値化する

$e^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$ 長さを数値化する写像

= 単位量

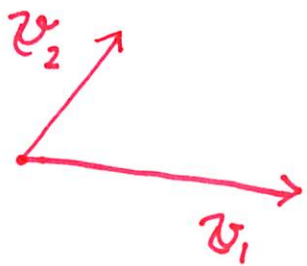
2-ベクトルと2-コベクトルの場合

2-コベクトル $\alpha: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

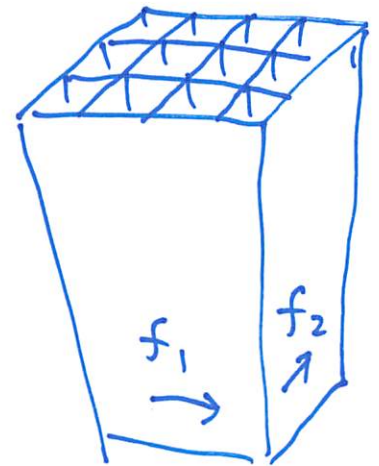
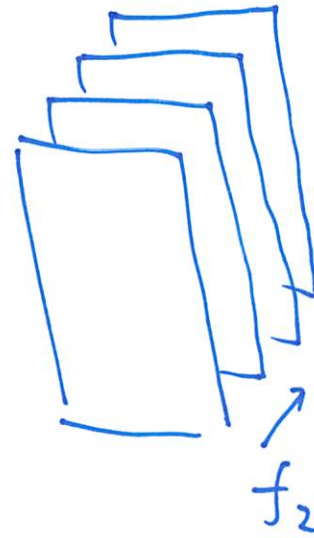
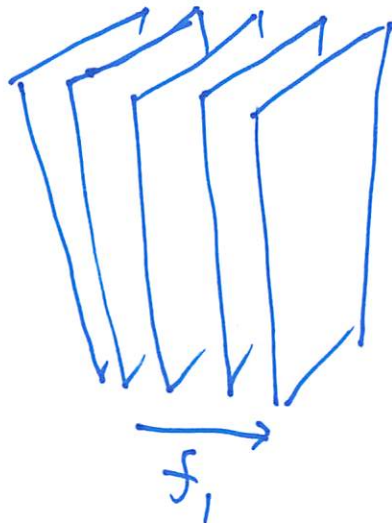
双線形, 反対称

$$(v_1, v_2) \mapsto \alpha(v_1, v_2)$$

2-コベクトル全体の集合 $V^* \wedge V^* = \wedge^2 V^*$



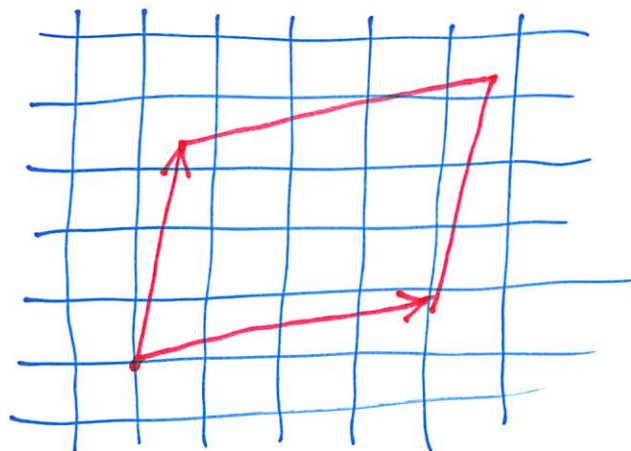
2-ベクトル $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$



$f_1 \wedge f_2$
2-コベクトル

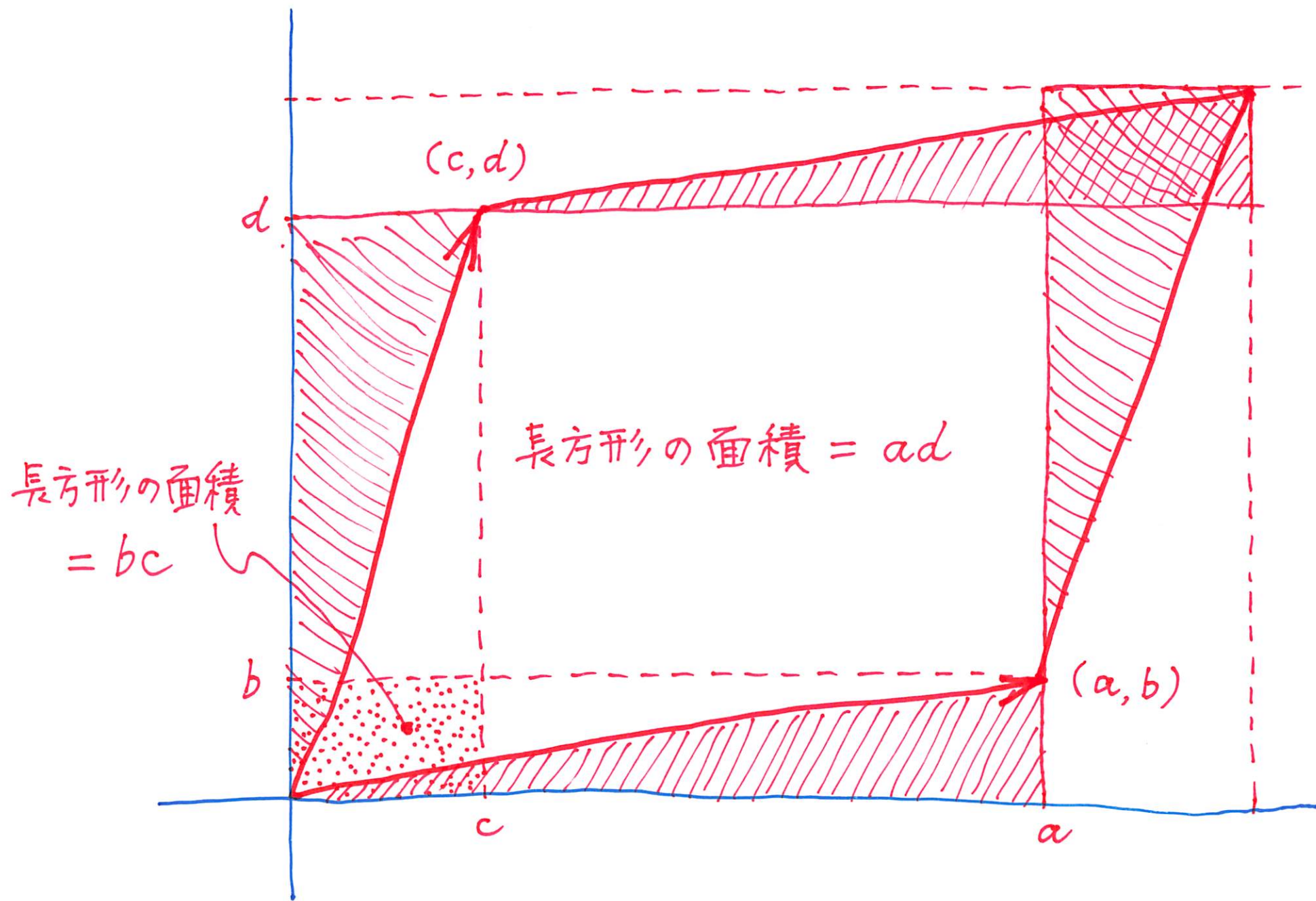
$$(f_1 \wedge f_2)(v_1, v_2)$$

$$= f_1(v_1) \cdot f_2(v_2) - f_2(v_1) \cdot f_1(v_2)$$



2-ベクトルが切り取る
マスをカウントする.

$f_x(v_1) \cdot f_y(v_2) - f_y(v_1) \cdot f_x(v_2) = ad - bc$ が平行四辺形の面積であることの初等的証明.



数学的定式化へ — 向きを定める

U : 1次元ベクトル空間 (\mathbb{R} 上の)

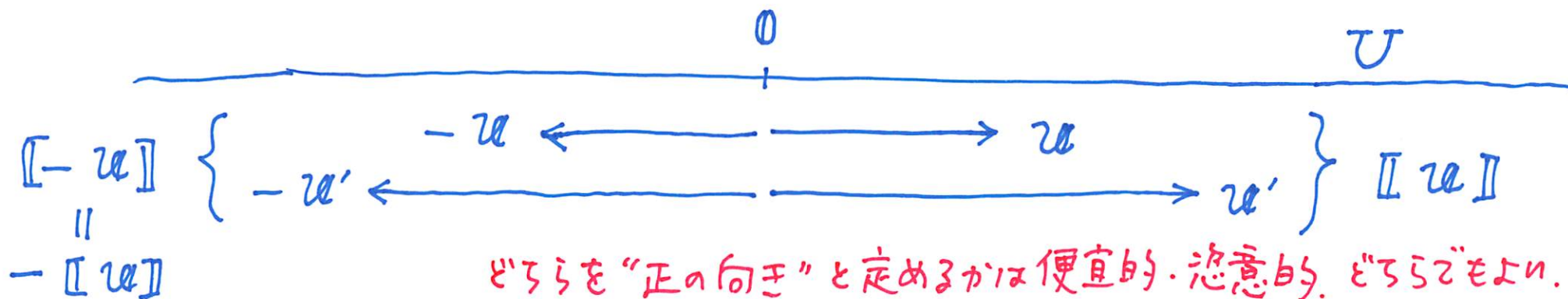
$\mathbb{R}_+ := \{h \in \mathbb{R} \mid h > 0\}$ 正の実数全体の集合

$u, u' (\neq 0) \in U$

u と u' が "同じ向き" $u \sim u' : \iff \exists h \in \mathbb{R}_+, hu = u'$

\sim は $U - \{0\}$ において同値関係になる。
 u を代表元とする同値類を $[[u]]$ と書く。

$O(U) := (U - \{0\}) / \sim = \{[[u]], [[-u]]\}$ U の向き集合。



n 次元空間の向き

V : \mathbb{R} 上の n 次元ベクトル空間. 基底 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$$V \wedge V = \text{span} \{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, \dots, e_1 \wedge e_n, e_2 \wedge e_3, \dots, e_{n-1} \wedge e_n\}$$

$$\dim(V \wedge V) = {}_n C_2 = \frac{1}{2} n(n-1)$$

$$\wedge^p V = V \wedge V \wedge \dots \wedge V \quad (V \text{ が } p \text{ 個})$$

$$\dim(\wedge^p V) = {}_n C_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\dim(\wedge^n V) = {}_n C_n = 1.$$

$$\wedge^n V = \text{span} \{e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n\} = U \quad 1\text{-次元空間}$$

$$O(V) := O(\wedge^n V) = \{ [e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n], -[e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n] \}$$

\uparrow V の向きの集合

一方を正の向きに選ぶは、
右手系
他方は負の向き。
と 左手系

向きのある集合の双対 — 向き関数

V : n 次元ベクトル空間

$$\begin{aligned} \text{向き関数 } \varepsilon : \wedge^n V &\longrightarrow \{+1, 0, -1\} & X \neq 0 \text{ なら } \varepsilon(X) \neq 0 \\ X &\longmapsto \varepsilon(X) & \forall h \in \mathbb{R}_+, \varepsilon(hX) = \varepsilon(X) \end{aligned}$$

向き関数全体の集合 $O^*(V) = \{\varepsilon, -\varepsilon\}$

$X (\neq 0) \in \wedge^n V$ に対し、

$$\begin{aligned} \varepsilon_X : \wedge^n V &\longrightarrow \{+1, 0, -1\} \\ X' &\longmapsto \varepsilon_X(X') := \begin{cases} +1 & X' \sim X \\ 0 & X' = 0 \\ -1 & X' \sim -X \end{cases} \end{aligned}$$

$O(V)$ と $O^*(V)$ は同一視できる。

振形式登場!!

p -コベクトル $\omega: \overbrace{V \times V \times \dots \times V}^p \rightarrow \mathbb{R}$ 多重線形, 反対称

p -コベクトル全体集合 $\wedge^p V^* = (\wedge^p V)^*$

振 p -コベクトル
twisted p -covector

$$\underline{\omega}: \mathcal{O}(V) \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\varepsilon, v_1, \dots, v_p) \mapsto \underline{\omega}(\varepsilon, v_1, \dots, v_p)$$

v_1, \dots, v_p により 多重線形, 反対称

かつ, ε により 奇関数

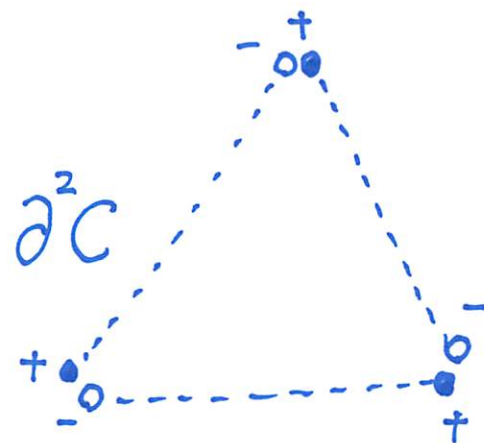
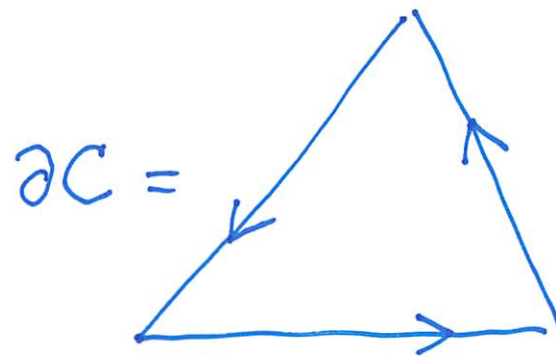
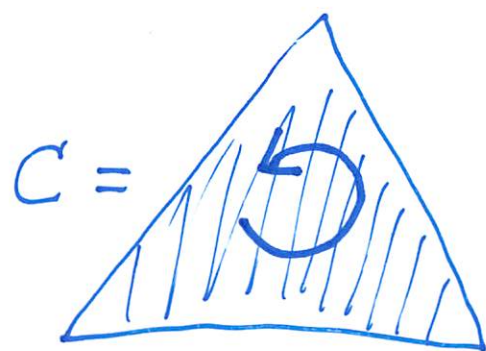
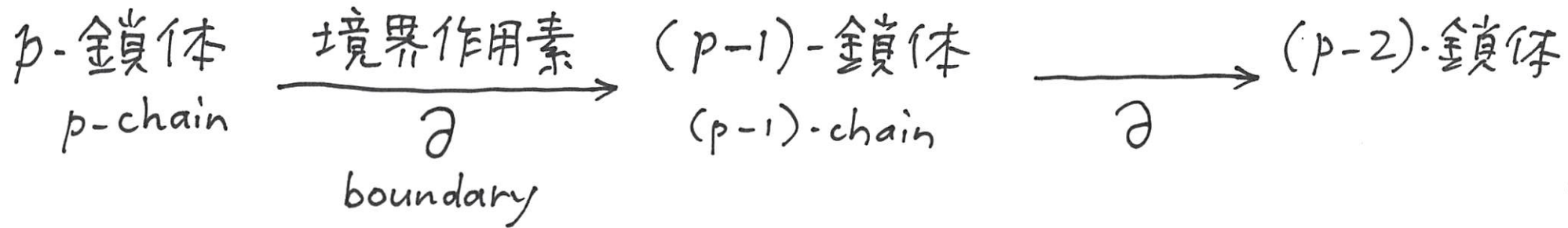
$$\underline{\omega}(-\varepsilon, v_1, \dots, v_p) = -\underline{\omega}(\varepsilon, v_1, \dots, v_p)$$

振 p -コベクトル 全体の集合: $\mathcal{O}(V) \otimes \wedge^p V^*$

p - \wedge ベクトル 全体集合 $\wedge^p V = \{ X: \overbrace{V^* \times \dots \times V^*}^p \rightarrow \mathbb{R} \text{ 多重線形, 反対称} \}$

振 p - \wedge ベクトル $\mathcal{O}(V) \otimes \wedge^p V = \{ \underline{X}: \mathcal{O}(V) \times V^* \times \dots \times V^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ 奇関数} \}$

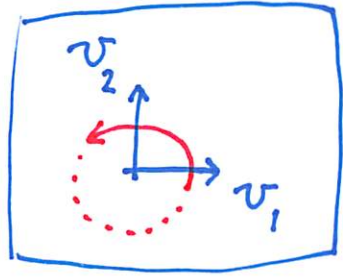
ホモロジー



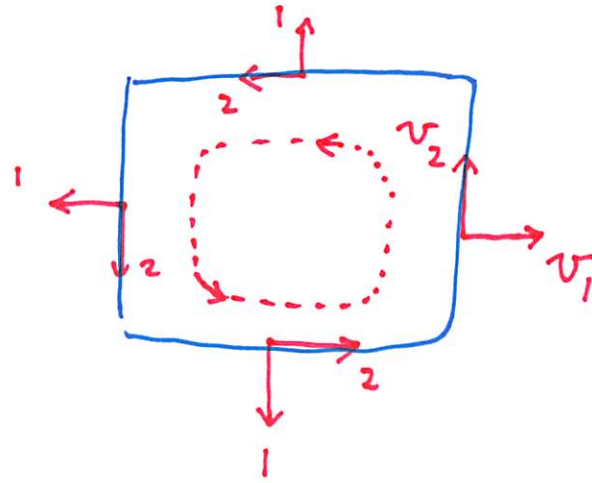
$\partial^2 C = 0$

鎖体の境界の向き

2-chain C の向き $\xrightarrow{\partial}$ 1-chain ∂C の向き

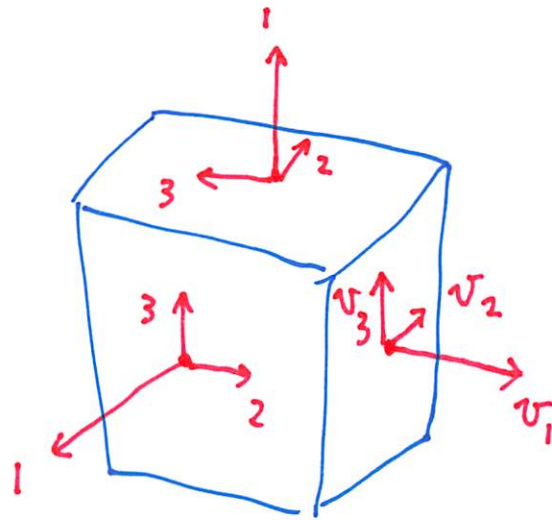
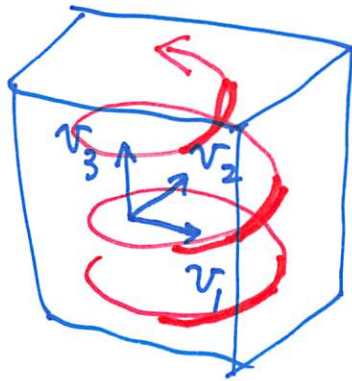


v_1, v_2 とともに接的.

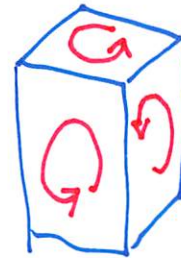


(接的だ、 v_1 が境界では)
 v_1 が横断的になる
 (内から外に向かう).
 v_2 が接的に残る.

3-chain D の向き $\xrightarrow{\partial}$ 2-chain ∂D の向き

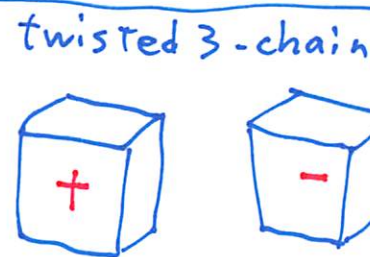
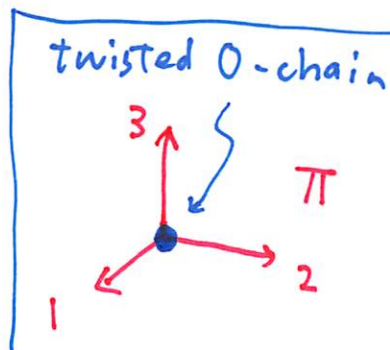
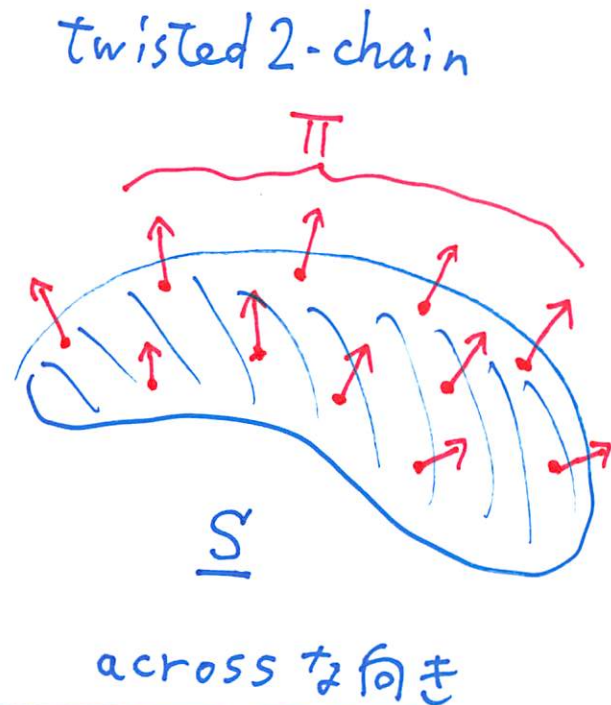
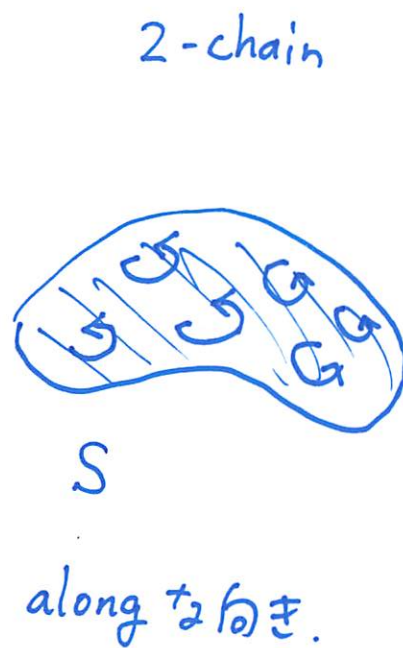
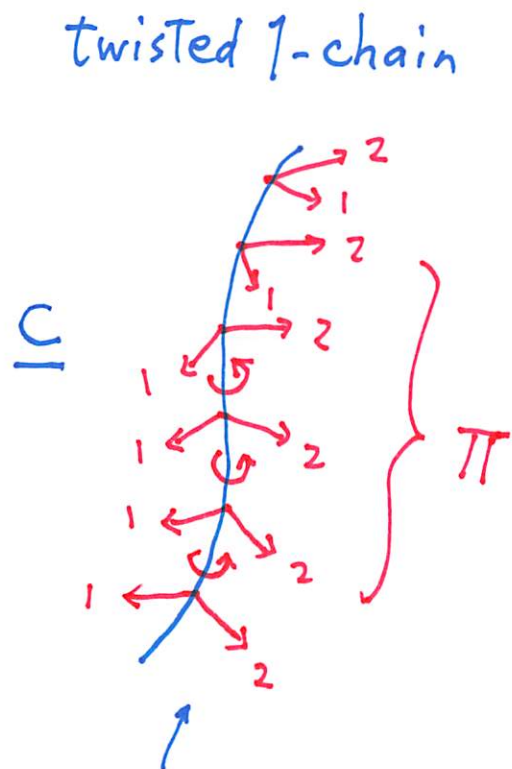
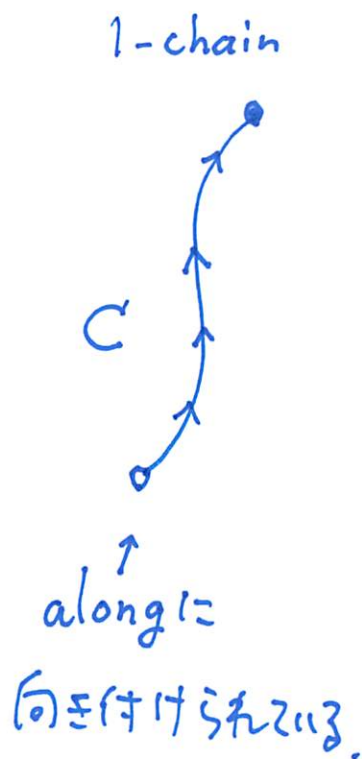


v_1 が横断的になる
 (内から外に).
 v_2, v_3 が境界面で接的にとどまる.
 これらが境界面の向きを定める.



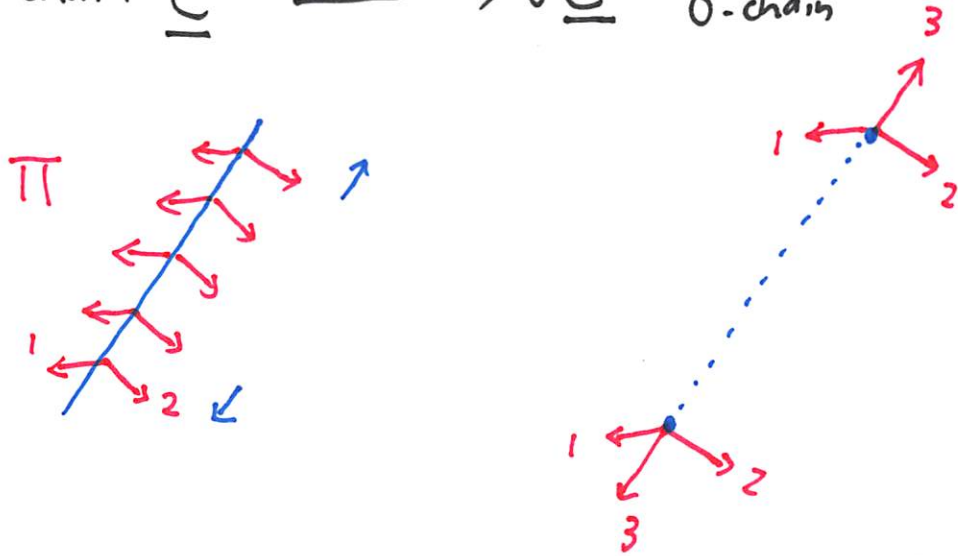
振鎖体 twisted chain

振 p -鎖体 : n 次元多様体中にはめ込まれた p 次元多様体で、
 $(n-p)$ 次元の横断的ベクトル場 Π を備えたもの。



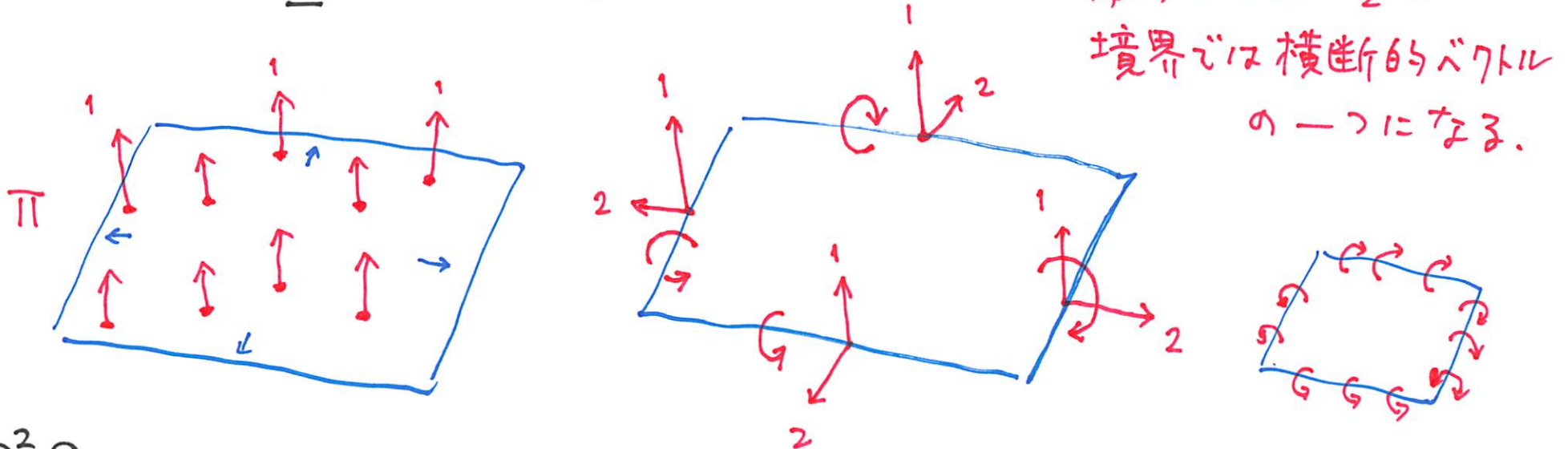
振鎖体の境界の向き

twisted 1-chain $\underline{C} \xrightarrow{\partial} \partial \underline{C}$ tw. 0-chain



接的だ、た σ_3 が
横断的ベクトルに仲間入り。

twisted 2-chain $\underline{S} \xrightarrow{\partial} \partial \underline{S}$ Tw. 1-chain



接的だ、た σ_2 が
境界では横断的ベクトル
の仲間になる。

$\partial^2 \underline{S} = 0$ になる。振ホモロジーができる。

積分：p-form と p-chain のペアリング

積分されるもの

積分する場所

p-form
p-ベクトルの

p-chain
p-ベクトルの

$$\langle \omega, C \rangle = \int_C \omega$$

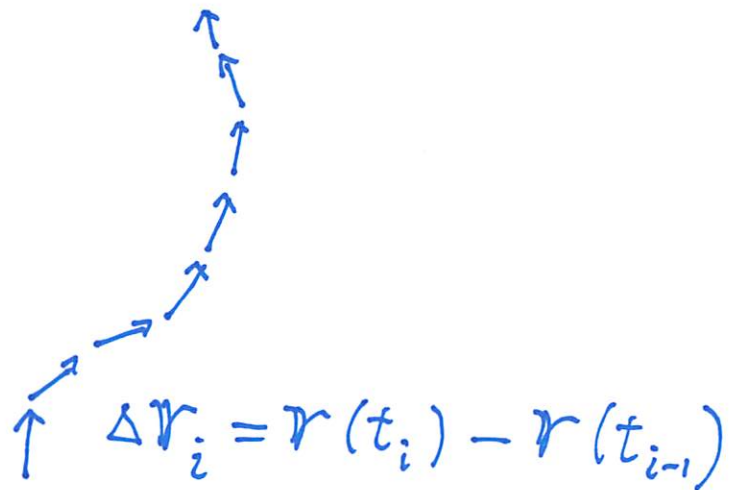
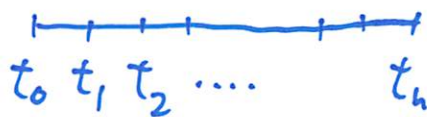
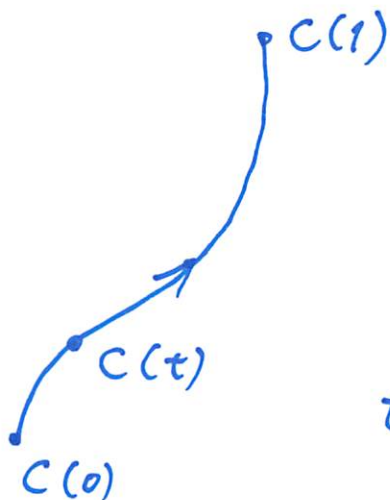
例. 1-form ω と 1-chain C のペアリング = リーマン積分

$$\omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz$$

$$C: [0, 1] \rightarrow M$$

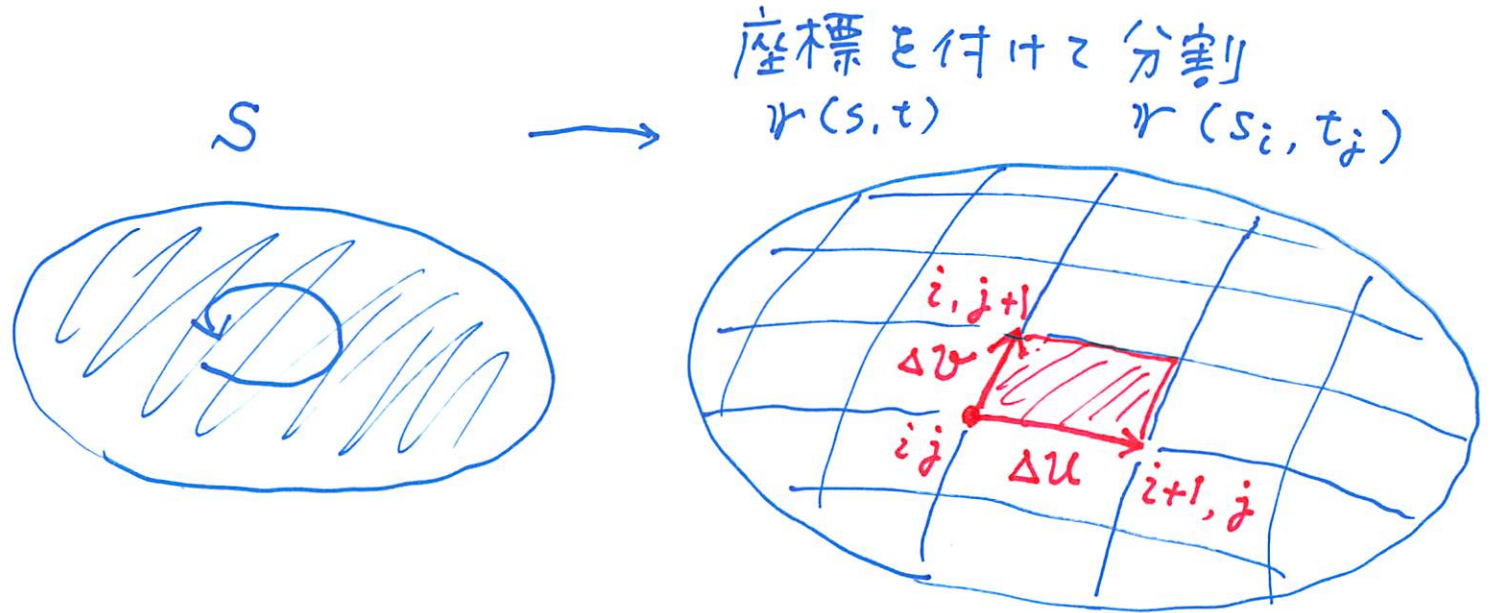
$t \mapsto c(t)$

$$\int_C \omega := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \omega(\Delta r_i)$$



別の例: 2-form と 2-chain のペアリング"

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_x dy \wedge dz \\ &+ \omega_y dz \wedge dx \\ &+ \omega_z dx \wedge dy. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Delta u_{ij} &= r(s_{i+1}, t_j) - r(s_i, t_j) \\ \Delta v_{ij} &= r(s_i, t_{j+1}) - r(s_i, t_j) \end{aligned}$$

リーマン積分

$$\int_S \omega := \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega(\Delta u_{ij}, \Delta v_{ij})$$

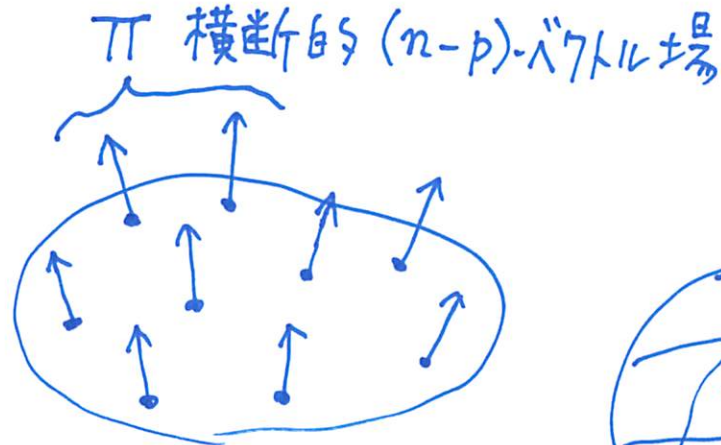
積分: ω と \underline{C} のペアリング

M : n 次元多様体 (向き付け不可能でもかまわない)

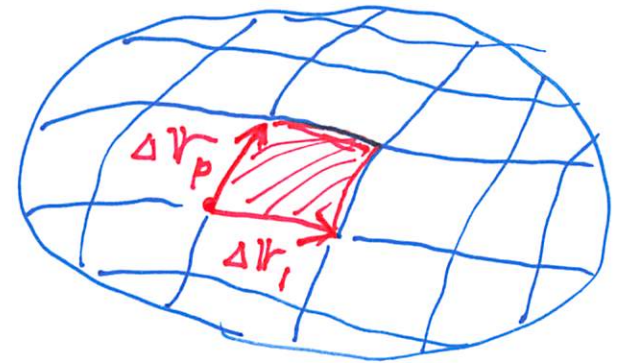
$$\underline{\omega} = \varepsilon \otimes \omega$$

$$x \in M, \varepsilon_x \in \mathcal{O}(\wedge^n T_x^* M)$$

$$\omega_x \in \wedge^p T_x^* M$$



\underline{C} : M に は め こ ま れ た p -次元多様体



$$\langle \underline{\omega}, \underline{C} \rangle = \int_{\underline{C}} \underline{\omega} = \lim_{\text{分割} \rightarrow \text{細分化}} \sum \varepsilon \left(\pi \lrcorner \Delta r_1 \wedge \dots \wedge \Delta r_p \right) \times \omega(\Delta r_1, \dots, \Delta r_p).$$

振ホモロジー と 振コホモロジー

振鎖体の境界作用素 $\partial: \underline{C}_p \rightarrow \underline{C}_{p-1}$ $\partial \cdot \partial = 0$

振微分形式の外微分 $d: \underline{\Omega}^{p-1} \rightarrow \underline{\Omega}^p$ $d \cdot d = 0$

ストークスの定理 $\int_{\underline{C}} d\underline{\omega} = \int_{\partial \underline{C}} \underline{\omega}$.

リーマン計量も導入すると、

ホッジ変換 $\begin{cases} * : \Omega^p \rightarrow \underline{\Omega}^{n-p} \\ * : \underline{\Omega}^p \rightarrow \Omega^{n-p} \end{cases}$

電磁気学への応用

電場 1-form $\underline{E} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$

磁場 2-form $\underline{B} = B_x dy \wedge dz + \dots$

電束 tw. 2-form $\underline{D} = (D_x dy \wedge dz + \dots) \otimes \epsilon$

磁歪 tw. 1-form $\underline{H} = (H_x dx + \dots) \otimes \epsilon$

電荷密度 tw. 3-form

$$\underline{\rho} = \rho dx \wedge dy \wedge dz \otimes \epsilon$$


電流密度 tw. 2-form

$$\underline{j} = (j_x dy \wedge dz + \dots) \otimes \epsilon$$

マクスウェル方程式


$$\int_{\partial S} \underline{E} = - \int_S \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$S: 2\text{-chain}$



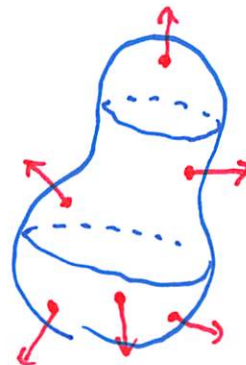
$$\int_{\partial V} \underline{B} = 0$$

$V: 3\text{-chain}$



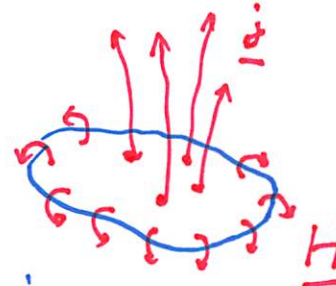
$$\int_{\partial V} \underline{D} = \int_V \underline{\rho}$$

$V: \text{tw. } 3\text{-chain}$



$$\int_{\partial S} \underline{H} = \int_S \left(\underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right)$$

$S: \text{tw. } 2\text{-chain}$



電磁気学

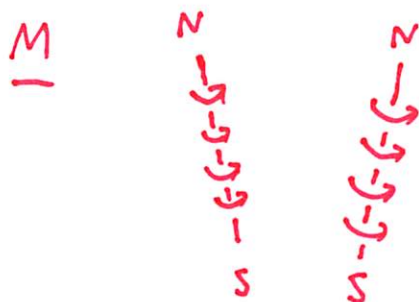
ホッジスター

真空中の構成方程式: $\underline{D}^{(2)} = \epsilon_0 * \underline{E}^{(1)}$, $\underline{H}^{(1)} = \frac{1}{\mu_0} * \underline{B}^{(2)}$

物質中では、

電気的分極場 tw. 2-form $\underline{P} = (P_x dy \wedge dz + \dots) \otimes \epsilon$

磁化場 tw. 1-form $\underline{M} = (M_x dx + \dots) \otimes \epsilon$



スピン状の電流
が作る磁気モーメント

$$\underline{D}_{\text{mat}}^{(2)} = \epsilon_0 * \underline{E}^{(1)} + \underline{P}^{(2)},$$

$$\underline{H}_{\text{mat}}^{(1)} = \frac{1}{\mu_0} * \underline{B}^{(2)} - \underline{M}^{(1)}.$$

歴史的には、

n 次元多様体上の振 n 形式的なものを意識したのは Weyl.
(密度テンソル)

振形式を明確に導入 ... de Rham

超函数にも拡張 (カレント: ティラックのデルタ関数の微分形式バージョン)
... L. Schwartz

いまや

『幾何学から物理学へ』

谷村省吾

(サイエンス社, SGCライブラリ)

が オススメ !!

失礼

失礼しました

ご清聴ありがとうございました

質問(概要): twisted p-vector と twisted q-vector を wedge 積したものは何になるのか?

答え: 定義どおりに計算すると

$$\begin{aligned}
 (\text{normal } p\text{-vector}) \wedge (\text{normal } q\text{-vector}) &= (\text{normal } (p+q)\text{-vector}) \\
 (\text{normal } p\text{-vector}) \wedge (\text{twisted } q\text{-vector}) &= (\text{twisted } (p+q)\text{-vector}) \\
 (\text{twisted } p\text{-vector}) \wedge (\text{twisted } q\text{-vector}) &= (\text{normal } (p+q)\text{-vector})
 \end{aligned}$$

となります。

例: 3次元空間において、

$$\begin{array}{c}
 1\text{-vector} \\
 e_x
 \end{array}
 \wedge
 \begin{array}{c}
 1\text{-vector} \\
 e_y
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 2\text{-vector} \\
 e_x \wedge e_y
 \end{array}$$



$$\begin{array}{c}
 \text{tw. } 1\text{-vector} \\
 [e_x \wedge e_y \wedge e_z] \otimes e_x
 \end{array}
 \wedge
 \begin{array}{c}
 1\text{-vector} \\
 e_y
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \text{tw. } 2\text{-vector}
 \end{array}$$



$$\begin{array}{c}
 \text{tw. } 1\text{-vector} \\
 [e_x \wedge e_y \wedge e_z] \otimes e_x
 \end{array}
 \wedge
 \begin{array}{c}
 \text{tw. } 1\text{-vector} \\
 [e_x \wedge e_y \wedge e_z] \otimes e_y
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 2\text{-vector} \\
 e_x \wedge e_y
 \end{array}$$

