

第9回 QUATUO研究会, QuLMa Chapter in 熊本, 崇城大学にて  
2020.01.11

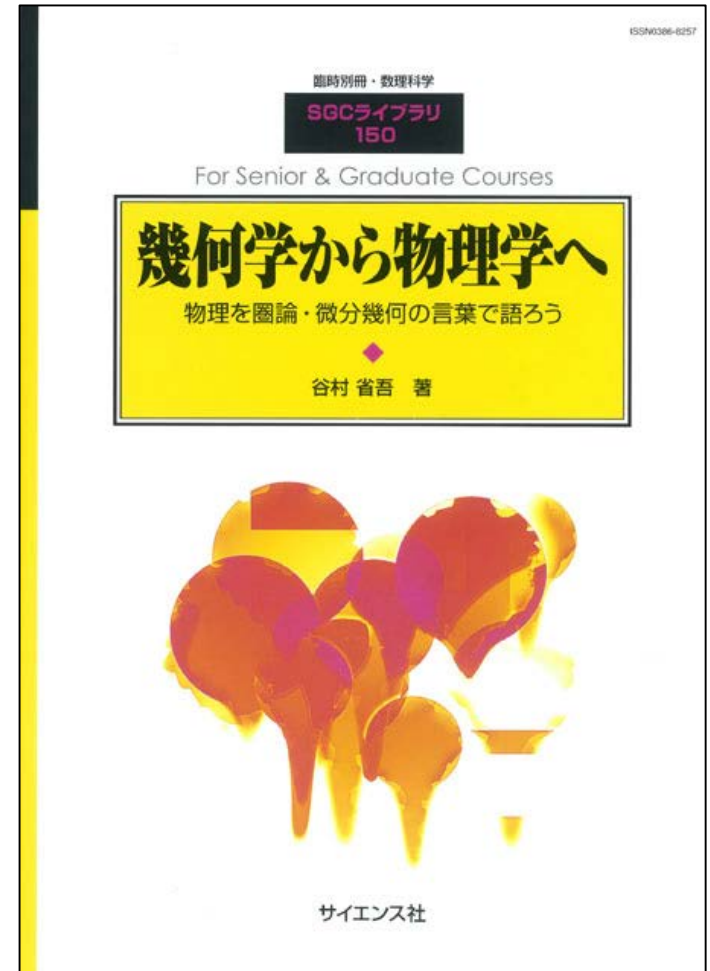
# 弱値はいかにして 負の確率を誘導するか— 擬確率の幾何学的描像

谷村 省吾

名古屋大学 大学院 情報学研究科

# 宣伝

- 『幾何学から物理学へ』  
(サイエンス社, 2019年)
- 今年こそは単行本出版  
『21世紀の量子論入門』  
(現代数学社, 雑誌連載終了)
- 私のウェブページで日経サイエンス・数理科学などの記事の情報や補足解説を公開しています。



<https://www.saiensu.co.jp/search/?isbn=4910054700695&y=2019>

# これも宣伝

## 『〈現在〉という謎』

(勁草書房, 2019年)

物理学者3人（細谷暁夫・筒井泉・谷村）と哲学者7人との討論形式の本。ここで言う〈現在〉とは絶対的・客観的現在のこと。『一物理学者が観た哲学』と題する補足ノート（通称 谷村ノート）が本編よりも力作。



<http://www.keisoshobo.co.jp/book/b477659.html>

# 弱値 weak value

- 1988年に Aharonov, Albert, Vaidman が提唱した量子力学中の概念.
- 弱測定 weak measurement で測られる値だから weak value と名付けられた.
- 意味的には「事後条件付き期待値」「未来と過去に挟まれて定められる期待値」とでも呼んだ方がよい.



Yakir Aharonov

<https://history.aip.org/phn/11408012.html>

# 物理量と値を区別しよう

- 物理量 observable
  - 和・差・積・スカラー倍の演算ができる
  - 測れば値を出力する
- $L_1 + L_2 = L_3$
- $L = 2\pi r, S = \pi r^2, S = \frac{1}{2}ab$
- $E = mc^2, E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mgz$
- $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2$
- $S_n = S_x + S_y$

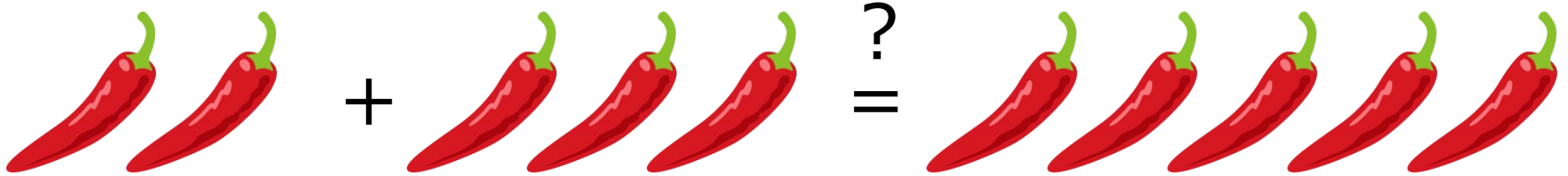
# 物理量と値を区別しよう

- 値 value  
単位系を定めれば実数値になるもの.
- $\varepsilon(M) = 55 \text{ kg}$  ( $\varepsilon$  : evaluation map)
- $M = 55 \text{ kg}$  と書いてもよい.
- でも気持ち的には  $M \rightarrow 55 \text{ kg}$  あるいは  $M \leftarrow 55 \text{ kg}$
- $\varepsilon(L) = 1.67 \text{ m}$
- 測定は物理量を値に変える.

# 物理量や値ではない例

「辛さ」

「中辛」 + 「辛口」 = 「激辛」という和が意味を持たない。物理量に代数的関係を要請する。



# 量子論の微妙さ

(物理量の和) の値 = (物理量の値) の和  
は成り立たない。

- $H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k q^2$ 
  - 運動量  $p$  を測れば  $-\infty \leq p \leq \infty$  の連続値
  - 位置  $q$  を測れば  $-\infty \leq q \leq \infty$  の連続値
  - だけど  $H$  を測れば  $\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$  の離散値
- $S_n = S_x + S_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 
  - $S_x, S_z$  を別々に測れば値はそれぞれ  $\pm 1$
  - $S_n$  を測れば値は  $\pm\sqrt{2}$



# 量子論における三種の値

## 1. 固有値 eigenvalue

$$\hat{A}|\varphi_i\rangle = a_i|\varphi_i\rangle$$

$\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  スペクトル値ともいう。

一回一回の測定で得られる値. snapshot

## 2. 期待値 expectation value

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \varepsilon_\psi(\hat{A}) = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

統計的平均値. accumulated and averaged

## 3. 弱値 weak value

$$w(\hat{A}) = \frac{\langle \psi_{\text{fin}} | \hat{A} | \psi_{\text{ini}} \rangle}{\langle \psi_{\text{fin}} | \psi_{\text{ini}} \rangle}$$

# 弱値の定義式

弱値 weak value

$$w(\hat{A}) = \frac{\langle \psi_{\text{fin}} | \hat{A} | \psi_{\text{ini}} \rangle}{\langle \psi_{\text{fin}} | \psi_{\text{ini}} \rangle}$$

もちろん一番気になることは、どうやってこんなものを実測するかということですが、まずは数学的性質を調べましょう。

# 弱値の性質

弱値 weak value

$$w(\hat{A}) = \frac{\langle \psi_{\text{fin}} | \hat{A} | \psi_{\text{ini}} \rangle}{\langle \psi_{\text{fin}} | \psi_{\text{ini}} \rangle}$$

1. 一般に複素数値である（実部と虚部が別々に測れる）。
2. 状態ベクトルの位相変換  $|\psi_a\rangle \rightarrow e^{i\theta_a} |\psi_a\rangle$  のもとで不変
3.  $\hat{A}$  の最大固有値  $a_{\text{max}}$  と最小固有値  $a_{\text{min}}$  があっても

$$a_{\text{min}} \leq \mathbf{Re} w(\hat{A}) \leq a_{\text{max}}$$

は一般には成り立たない（弱値の増幅作用）

# 弱値の計算例

スピン  $\frac{1}{2}$  (2状態系)  $|\psi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle$

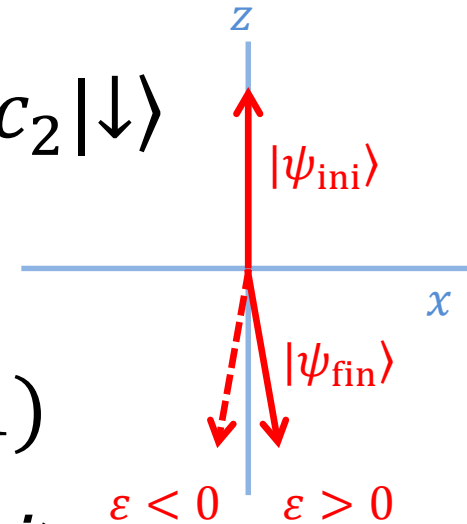
$$|\psi_{\text{ini}}\rangle = |\uparrow\rangle$$

$$|\psi_{\text{fin}}\rangle = \varepsilon|\uparrow\rangle + \sqrt{1 - \varepsilon^2}|\downarrow\rangle \quad (|\varepsilon| \ll 1)$$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$w(\hat{\sigma}_x) = \frac{\langle \psi_{\text{fin}} | \hat{\sigma}_x | \psi_{\text{ini}} \rangle}{\langle \psi_{\text{fin}} | \psi_{\text{ini}} \rangle} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \rightarrow \pm\infty$$

( $\varepsilon \rightarrow \pm 0$ )



# ふつうの期待値の性質

$\hat{A}$ の最大固有値 $a_{\max}$ と最小固有値 $a_{\min}$ があれば

$$a_{\min} \leq \langle \hat{A} \rangle \leq a_{\max}$$

が成り立つ。

なぜなら

$$a_{\min} \leq a_i \leq a_{\max}$$

確率 $p_i$ は  $0 \leq p_i \leq 1$ ,  $\sum_i p_i = 1$ を満たすので,

$$p_i a_{\min} \leq p_i a_i \leq p_i a_{\max}$$

$$a_{\min} = \sum_i p_i a_{\min} \leq \sum_i p_i a_i \leq \sum_i p_i a_{\max} = a_{\max}$$

# 弱値の確率解釈

弱値を確率解釈するなら、

$$w(\hat{A}) = \frac{\langle \psi_{\text{fin}} | \hat{A} | \psi_{\text{ini}} \rangle}{\langle \psi_{\text{fin}} | \psi_{\text{ini}} \rangle} = \sum_i p_i a_i$$

にあてはまる $p_i$ は  $0 \leq p_i \leq 1$ ,  $\sum_i p_i = 1$ の少なくとも一方を破っている。ところで

$$w(\hat{1}) = \frac{\langle \psi_{\text{fin}} | \hat{1} | \psi_{\text{ini}} \rangle}{\langle \psi_{\text{fin}} | \psi_{\text{ini}} \rangle} = 1 = \sum_i p_i$$

は成立するので、放棄すべきは  $0 \leq p_i \leq 1$

# 弱値の測定モデル

測定される系  $|\psi\rangle \in \mathcal{S}$ ,  $\hat{A}, \hat{B}$

測定器  $|\lambda\rangle \in \mathcal{L}$ ,  $\hat{M}$  (meter observable)

複合系の状態  $|\psi\rangle \otimes |\lambda\rangle \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{L}$

相互作用  $|\psi\rangle \otimes |\lambda\rangle \mapsto \hat{U}|\psi\rangle \otimes |\lambda\rangle$

$\hat{A}$  の値を知りたくて  $\hat{M}$  の値を読み取る.

初期状態  $|\psi_{\text{ini}}\rangle$  だけでなく, 終状態  $|\psi_{\text{fin}}\rangle$  も指定して  $\hat{M}$  の条件付き期待値を求める.

結合定数  $g \rightarrow 0$  の極限で  $\hat{M}$  の読み取り値が弱値に近づく.

# 弱値の測定モデル (もう少し詳しく)

対象系 :  $|\psi\rangle \in \mathcal{S}$     $\hat{A} = \sum_a a \hat{\Pi}_a$     $\hat{B} = \sum_b b \hat{\Pi}_b$

測定器 :  $|\lambda\rangle \in \mathcal{L}$ ,    $\hat{M}$  (meter observable)

相互作用 :  $|\psi\rangle \otimes |\lambda\rangle \mapsto \hat{U}_g |\psi\rangle \otimes |\lambda\rangle$    ( $g$ : 結合定数)

途中の  $\hat{A}$  の値を知りたくて最終的に  $\hat{M}$  の値を読み取る (これは弱く測る)

終状態  $|\psi_{\text{fin}}\rangle$  は固有状態に射影する (これは強く測る)

仮定 : 弱極限  $g \rightarrow 0$  で

$$\hat{U}_g \rightarrow \hat{1} - \frac{i}{\hbar} g \hat{A} \otimes \hat{P}_M, \quad [\hat{M}, \hat{P}_M] = i\hbar \hat{1}$$

とすると,

$$\frac{d}{dg} \hat{U}_g^\dagger (\hat{1} \otimes \hat{M}) \hat{U}_g \rightarrow \hat{A} \otimes \hat{1}$$



# 李・筒井の公式

終状態 ( $\hat{B} = b$ ) で条件付けられた  $\hat{M}$  の期待値 :

$$\mathbf{E}[\hat{M}|\hat{B} = b] := \frac{\langle \psi \otimes \lambda | \hat{U}^\dagger (\hat{\Pi}_b \otimes \hat{M}) \hat{U} | \psi \otimes \lambda \rangle}{\langle \psi \otimes \lambda | \hat{U}^\dagger (\hat{\Pi}_b \otimes \hat{1}) \hat{U} | \psi \otimes \lambda \rangle}$$

メータの微分感度 :

$$\lim_{g \rightarrow 0} \frac{d}{dg} \mathbf{E}[\hat{M}|\hat{B} = b] = \mathbf{Re} \frac{\langle \psi | \hat{\Pi}_b \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \hat{\Pi}_b | \psi \rangle} + \mathbf{Im} \left( \frac{\langle \psi | \hat{\Pi}_b \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \hat{\Pi}_b | \psi \rangle} \right) \frac{1}{\hbar} \left\{ \frac{1}{2} \langle \psi | (\hat{M} \hat{P}_M + \hat{P}_M \hat{M}) | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{M} | \psi \rangle \langle \psi | \hat{P}_M | \psi \rangle \right\}$$

# 条件付き期待値の主要項

終状態を定義する固有値は縮退がなかったとする：

$\hat{\Pi}_b = |b\rangle\langle b|$ . このとき

$$\frac{\langle \psi | \hat{\Pi}_b \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \hat{\Pi}_b | \psi \rangle} = \frac{\langle \psi | b \rangle \langle b | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | b \rangle \langle b | \psi \rangle} = \frac{\langle b | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle b | \psi \rangle} = \frac{\langle \psi_{\text{fin}} | \hat{A} | \psi_{\text{ini}} \rangle}{\langle \psi_{\text{fin}} | \psi_{\text{ini}} \rangle}$$

李・筒井の式は, Aharanov-Albert-Vaidmanの弱値の式に帰着する.

# 一般化された結合確率

$\hat{A} = \sum_a a \hat{\Pi}_a$  を入れると, 李・筒井の式は

$$\frac{\langle \psi | \hat{\Pi}_b \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \hat{\Pi}_b | \psi \rangle} = \sum_a a \frac{\langle \psi | \hat{\Pi}_b \hat{\Pi}_a | \psi \rangle}{\langle \psi | \hat{\Pi}_b | \psi \rangle}$$

Born の確率公式

$$\mathbf{P}[\hat{B} = b] := \langle \psi | \hat{\Pi}_b | \psi \rangle$$

Kirkwood-Dirac の擬確率 (一般には複素数値)

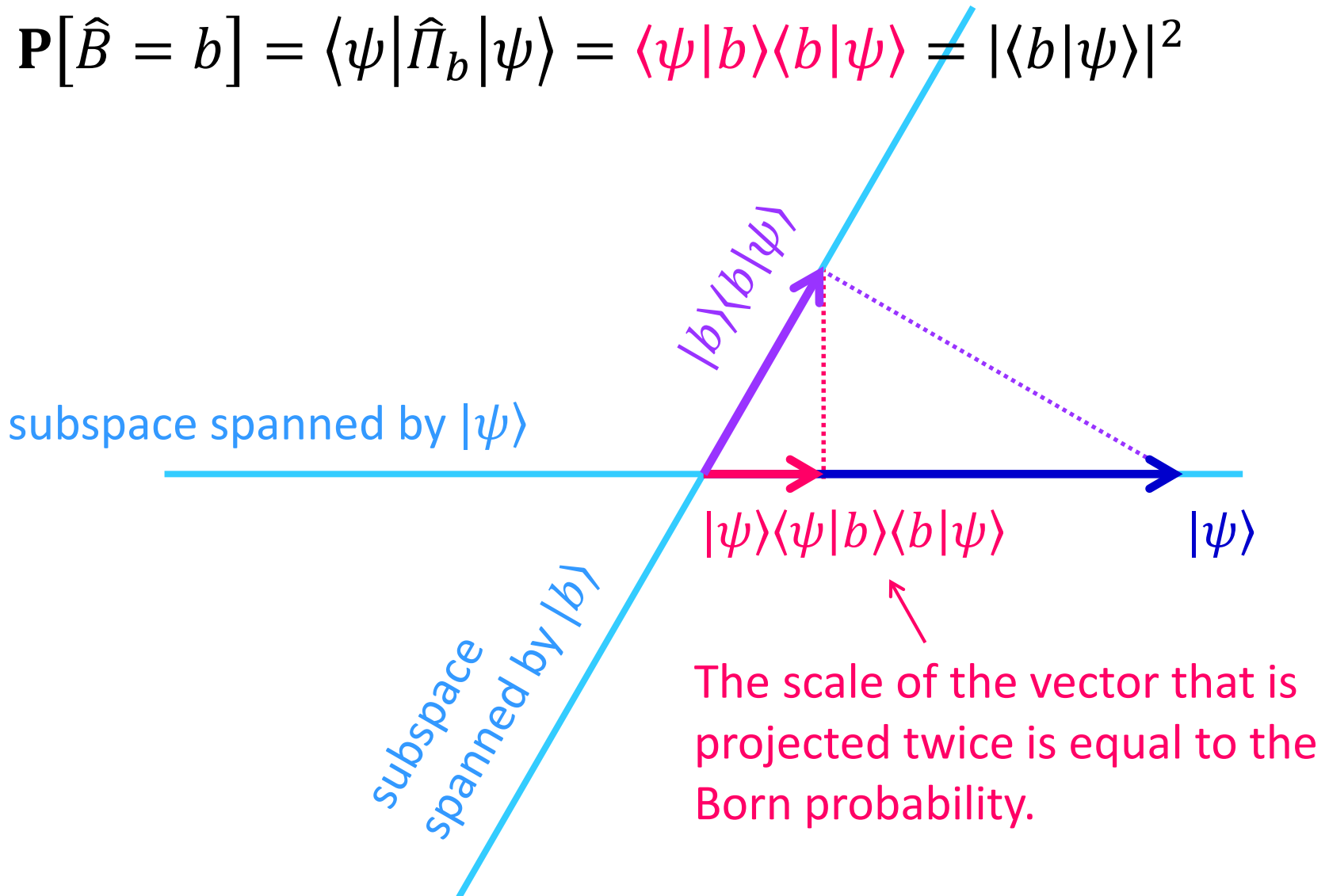
$$\mathbf{P}[\hat{A} = a, \hat{B} = b] := \langle \psi | \hat{\Pi}_b \hat{\Pi}_a | \psi \rangle$$

無理やり条件付き確率

$$\mathbf{P}[\hat{A} = a | \hat{B} = b] := \frac{\mathbf{P}[\hat{A} = a, \hat{B} = b]}{\mathbf{P}[\hat{B} = b]} = \frac{\langle \psi | \hat{\Pi}_b \hat{\Pi}_a | \psi \rangle}{\langle \psi | \hat{\Pi}_b | \psi \rangle}$$

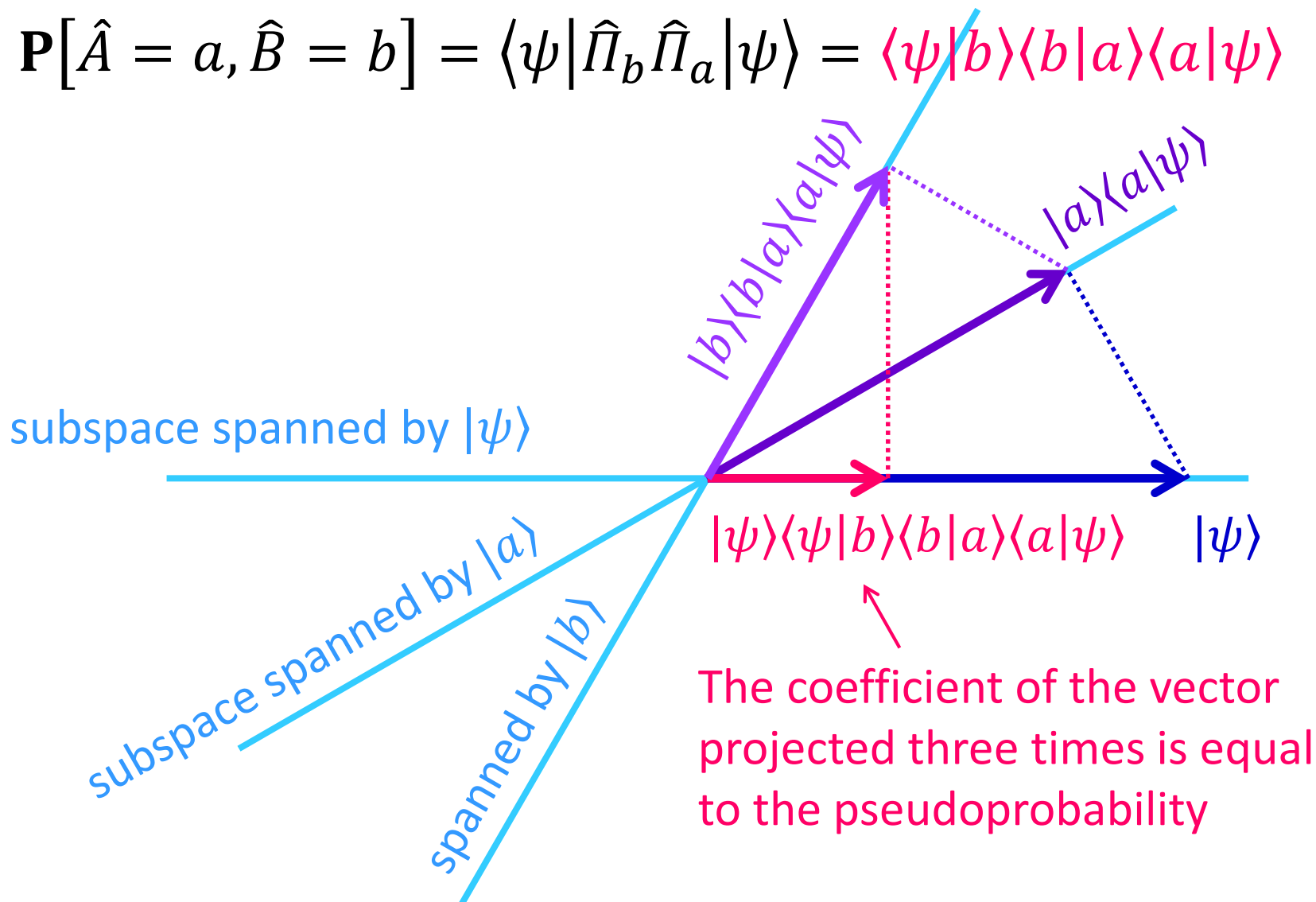
# Bornの確率公式の幾何学的解釈

$$\mathbf{P}[\hat{B} = b] = \langle \psi | \hat{\Pi}_b | \psi \rangle = \langle \psi | b \rangle \langle b | \psi \rangle = |\langle b | \psi \rangle|^2$$



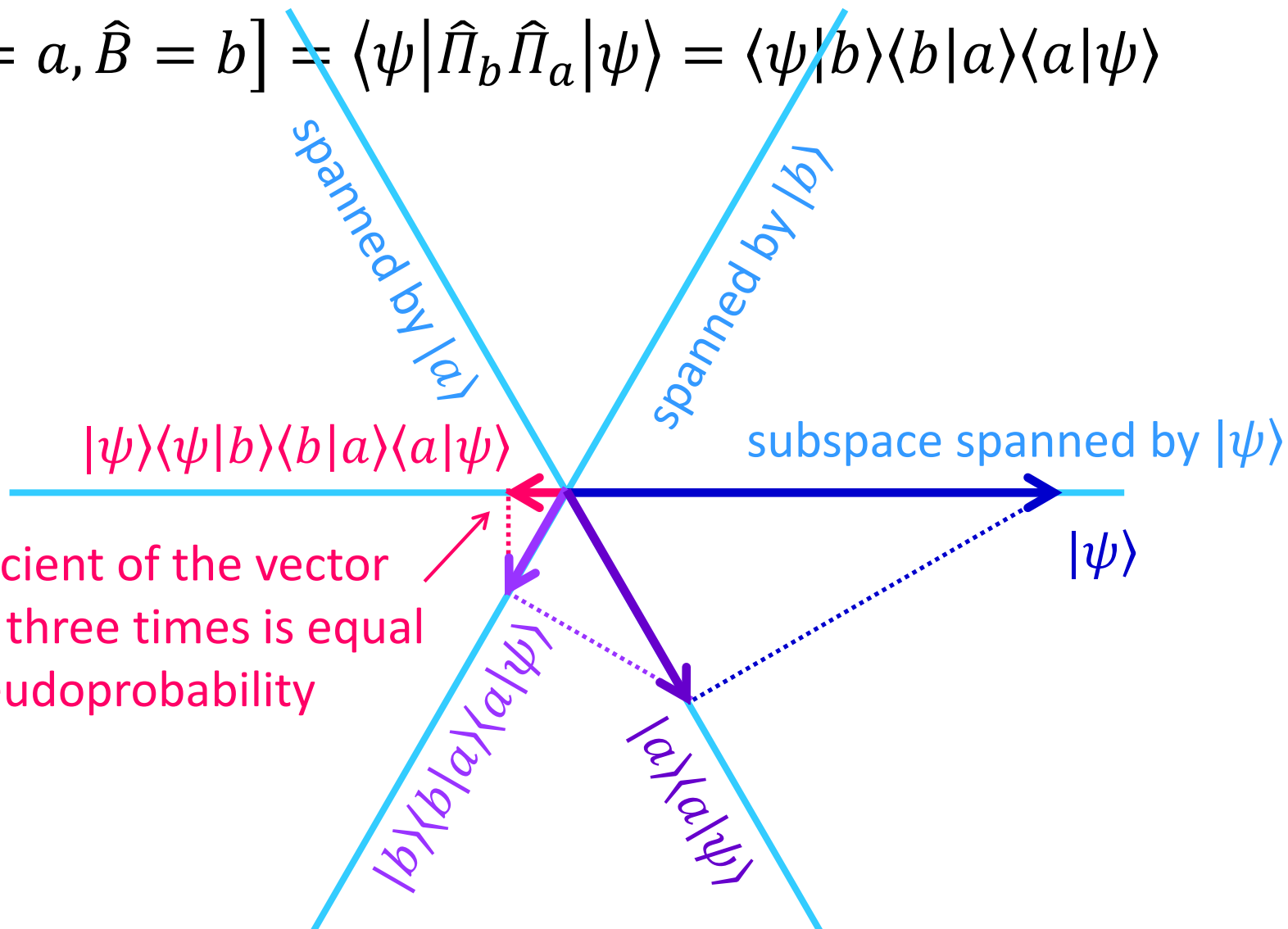
# Kirkwood-Dirac の擬確率の幾何学的解釈

$$\mathbf{P}[\hat{A} = a, \hat{B} = b] = \langle \psi | \hat{\Pi}_b \hat{\Pi}_a | \psi \rangle = \langle \psi | b \rangle \langle b | a \rangle \langle a | \psi \rangle$$



# 擬確率が負になる状況

$$\mathbf{P}[\hat{A} = a, \hat{B} = b] = \langle \psi | \hat{\Pi}_b \hat{\Pi}_a | \psi \rangle = \langle \psi | b \rangle \langle b | a \rangle \langle a | \psi \rangle$$



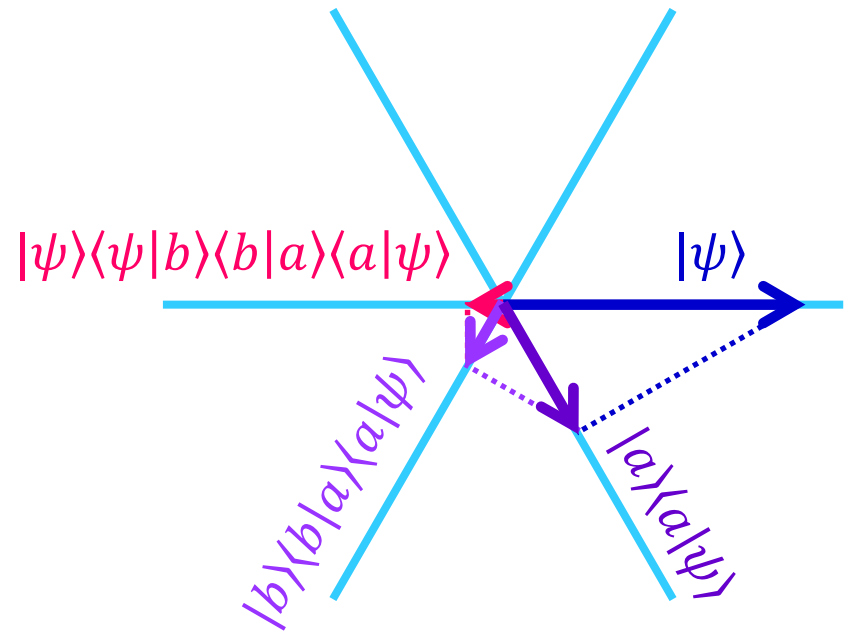
The coefficient of the vector projected three times is equal to the pseudoprobability

# 結合確率が正になる場合

- **可換**な自己共役演算子は同時対角化可能.
- それらの固有空間は互いに平行であるか直交するかのどちらか.
- 可換な自己共役演算子のスペクトル分解に現れる射影演算子も互いに可換. そのような射影演算子の積はまた射影演算子.
- 結合確率  $\mathbf{P}[\hat{A} = a, \hat{B} = b] = \langle \psi | \hat{\Pi}_b \hat{\Pi}_a | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{\Pi}_a \hat{\Pi}_b | \psi \rangle$  は実であり非負.

# 擬結合確率が負になる場合

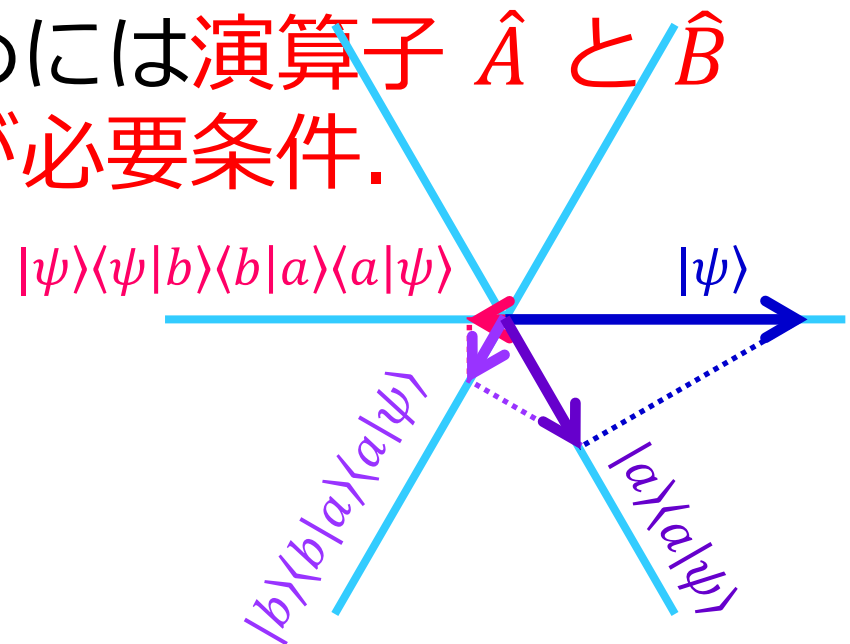
- **非可換**な自己共役演算子は同時対角化できない。
- それらの固有空間は互いに平行でも直交でもない。
- 3本の斜め射線について射影を繰り返せばベクトルの向きを反転させることができる。これが負の擬確率の発生状況。





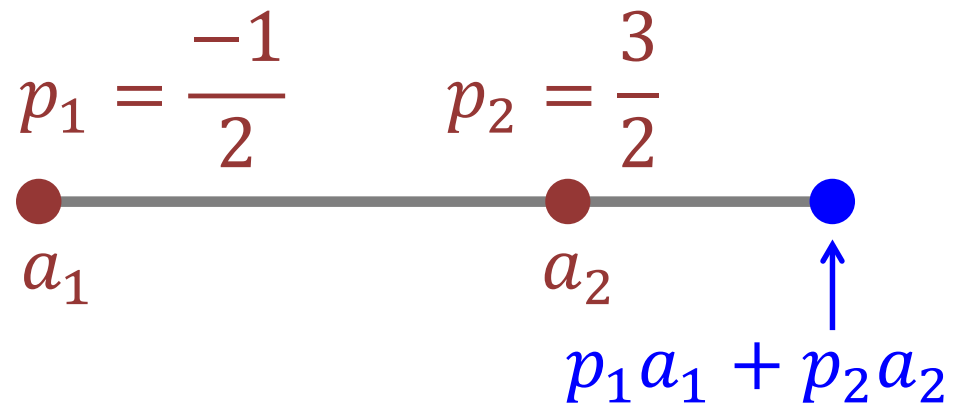
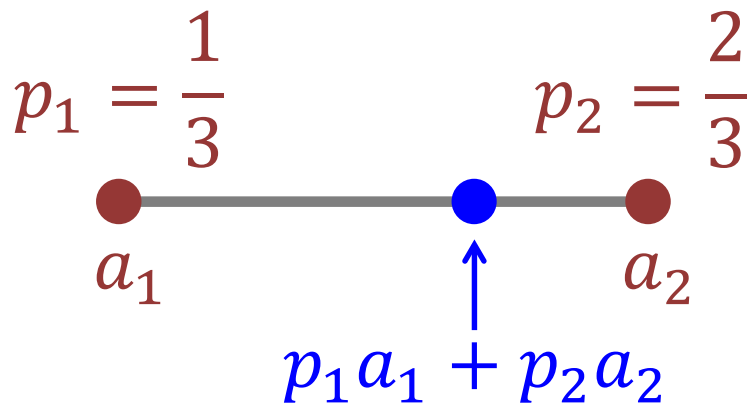
# 負の擬確率を得るための必要条件

- 対象系の物理量  $\hat{A}$  を中間状態において弱く測る（メーター物理量に値を写し取る）。
- 対象系の物理量  $\hat{B}$  を終状態において強く測る（直接射影測定する）。
- 負の擬確率を得るためには演算子  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  が非可換であることが必要条件。
- 固有空間の射影の合成が反転になることが十分条件。



# 負の擬確率があると弱値増幅が起こる

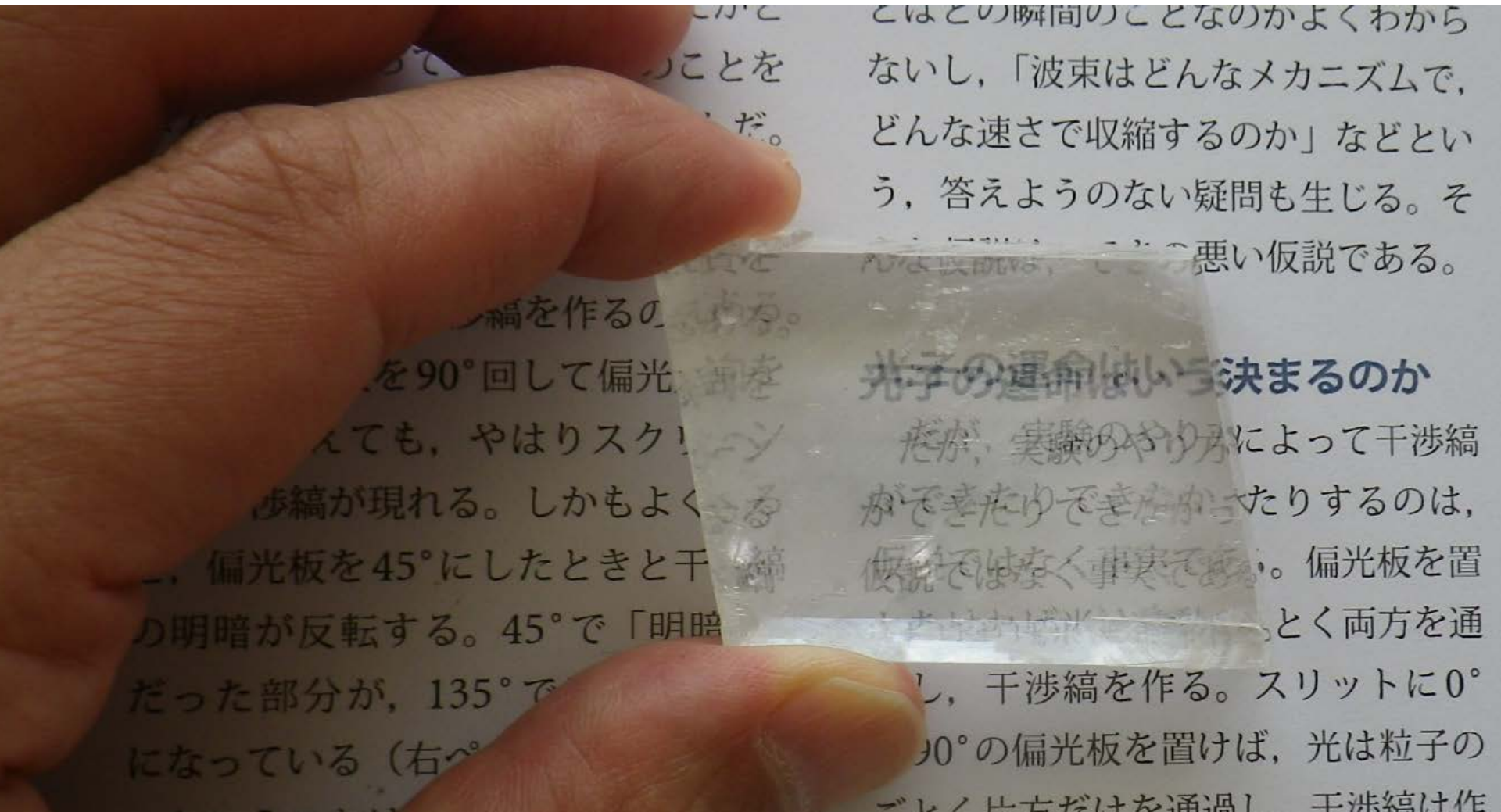
- 期待値 = 固有値の重みづけ平均値 (重心)
- もし重みづけが正なら, 平均値は内分点.
- もしも負の重みづけもあったら, 平均値は外分点 → これが増幅効果



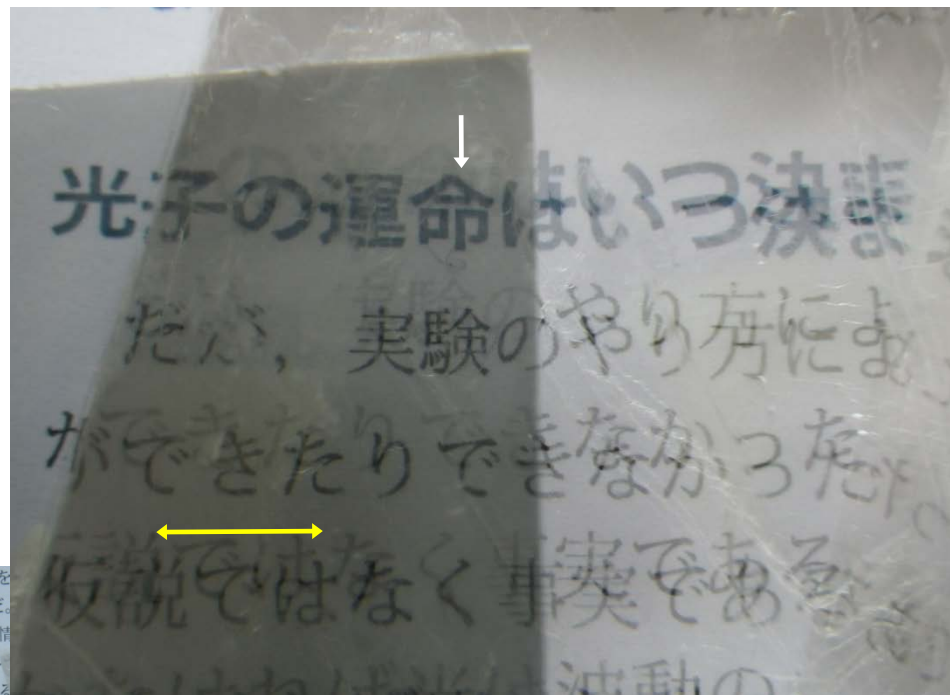
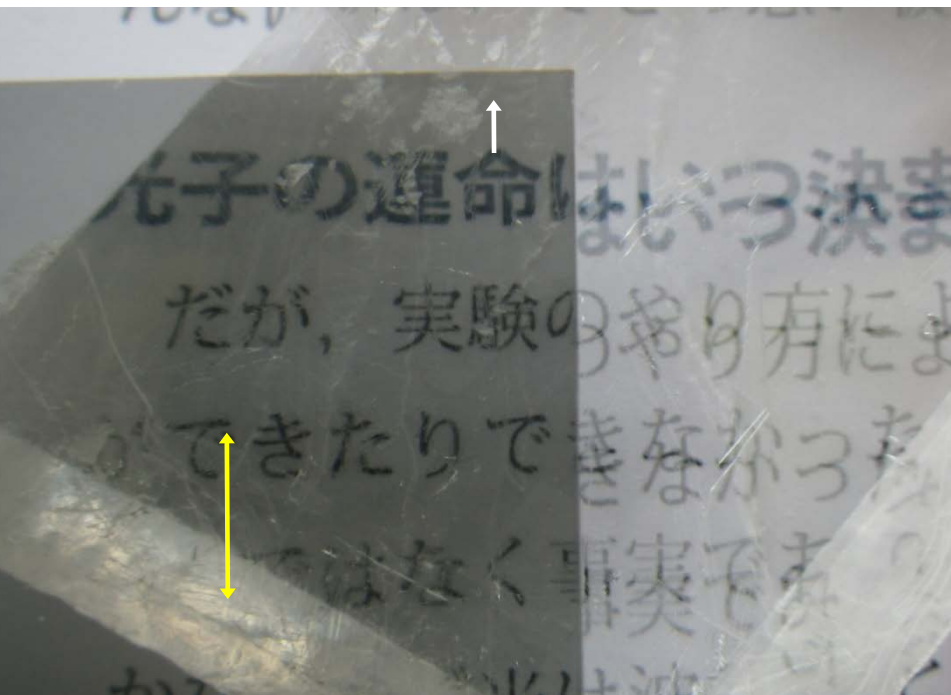
# 弱値増幅のデモ：複屈折

## 方解石の複屈折

photo by S. Tanimura



# 偏光フィルタを通して複屈折を見る



この偏光板を90°回して偏光方向を135°に変えても、やはりスクリーンには干涉縞が現れる。しかもよく見ると、偏光板を45°にしたときと干涉縞の明暗が反転する。45°で「明暗明」だった部分が、135°では「暗明暗」になっている（右ページの図下段）。

ということは、0°と90°の偏光板に比べて、45°の偏光板は、単に埋め込むだけでなく、実際に光を通過させて干涉縞を作ったのではないか。実験のやり方次第で光が粒子のように行動し

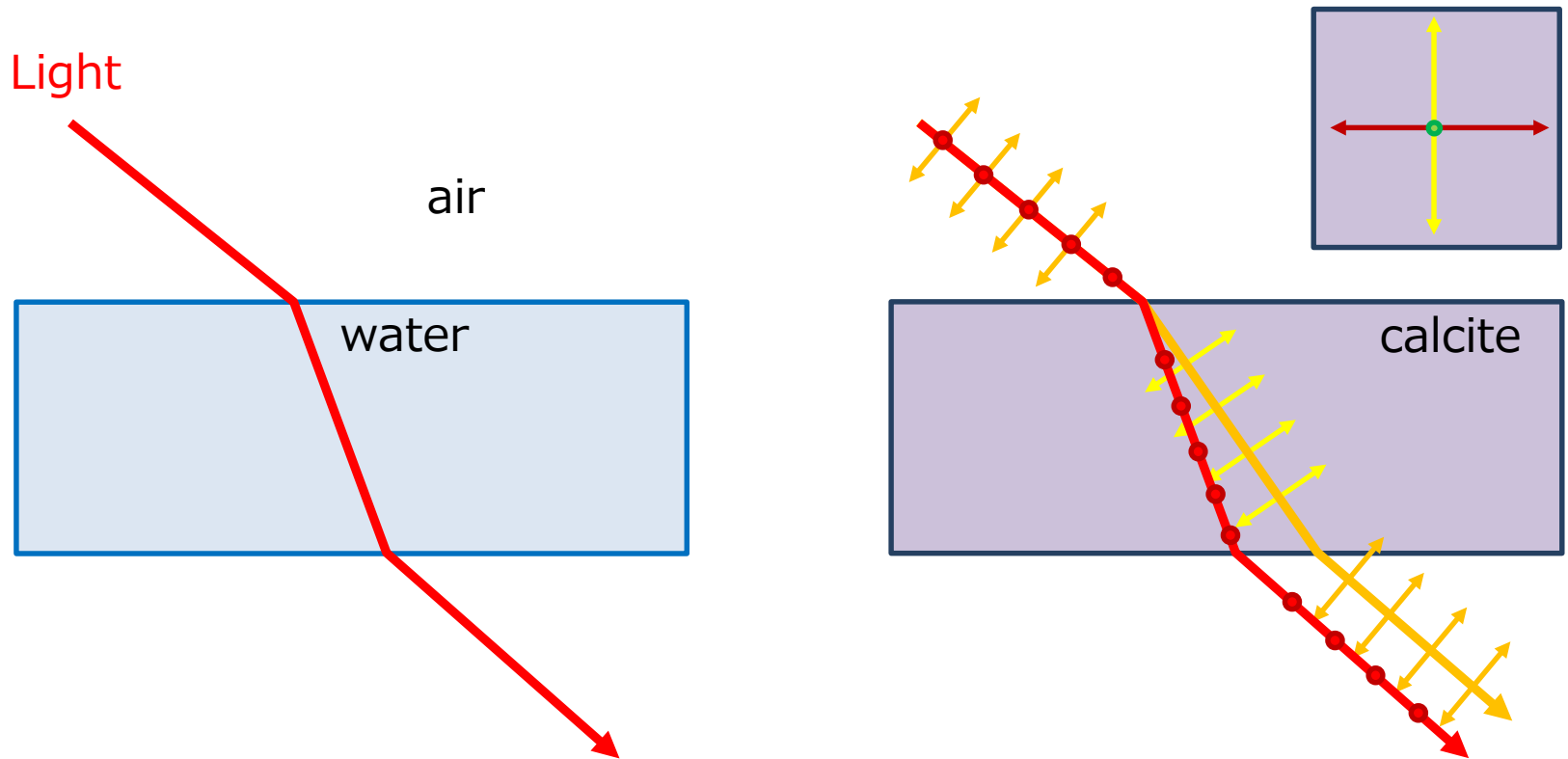
光子の運命はいづ決まのか  
だが、実験のやり方によって干涉縞ができてきたりできなかったりするのは、波動ではなく事実である。偏光板を置くと、光は粒子のごとく片方だけを通り、干涉縞を作らない（右ページの図上段）。さらにその先に45°の偏光板を置くと、やっぱり波動として両方のスリットを通過して干涉縞を作る（同下段）。実験のやり方次第で光が粒子のように行動し

討ちにする実と呼ぶ。いわゆる「波粒二重性」である。実際には必ずダブルスリットを通過し、左右のスクリーンに落ちる。これは干涉縞を作らずである。偏光板を通過した光子はど

# 複屈折の原理

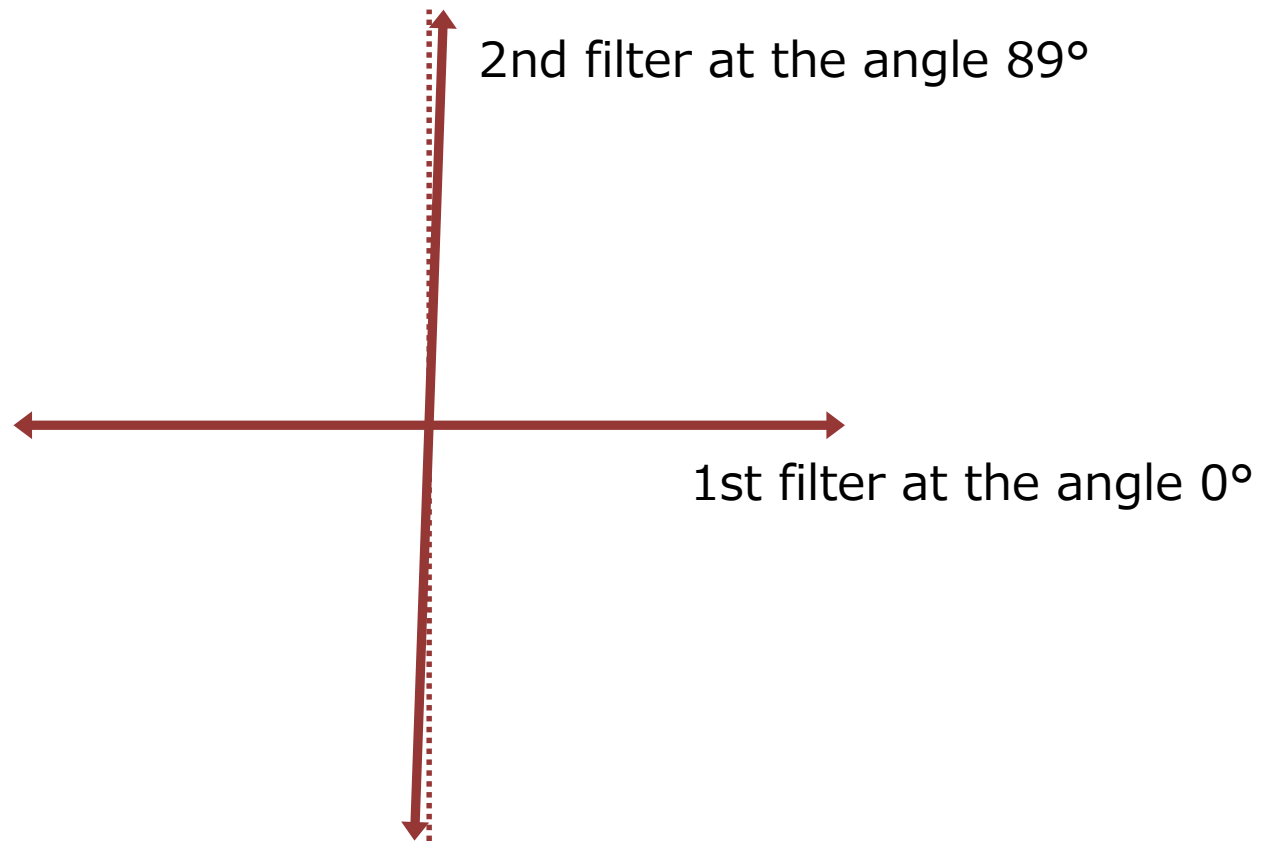
偏光方向によって屈折率が異なる。

偏光状態が，進行方向状態によって測られる。



# 弱値増幅のデモ 1/3

始状態と終状態をほぼ直交させる



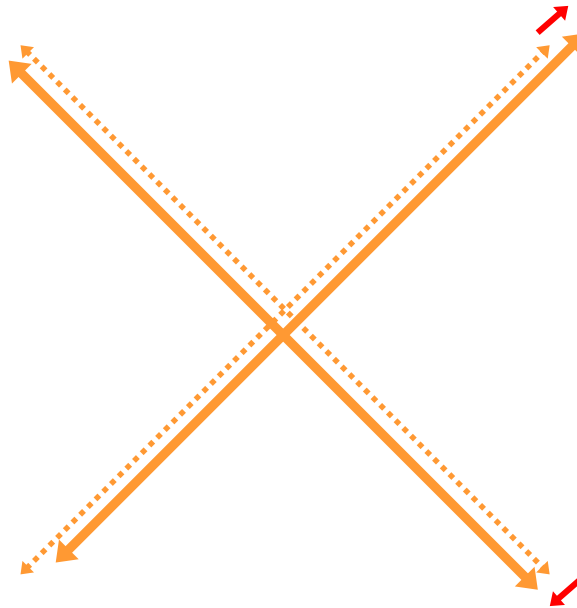
theory : [Duck, Stevenson, Sudarshan: Phys. Rev. D \(1989\)](#)

experiment : [Ritchie, Story, G. Hulet: Phys. Rev. Lett. \(1991\)](#)

# 弱値増幅のデモ 2/3

## 複屈折素子の配置

45°-polarized light is refracted by 1mm



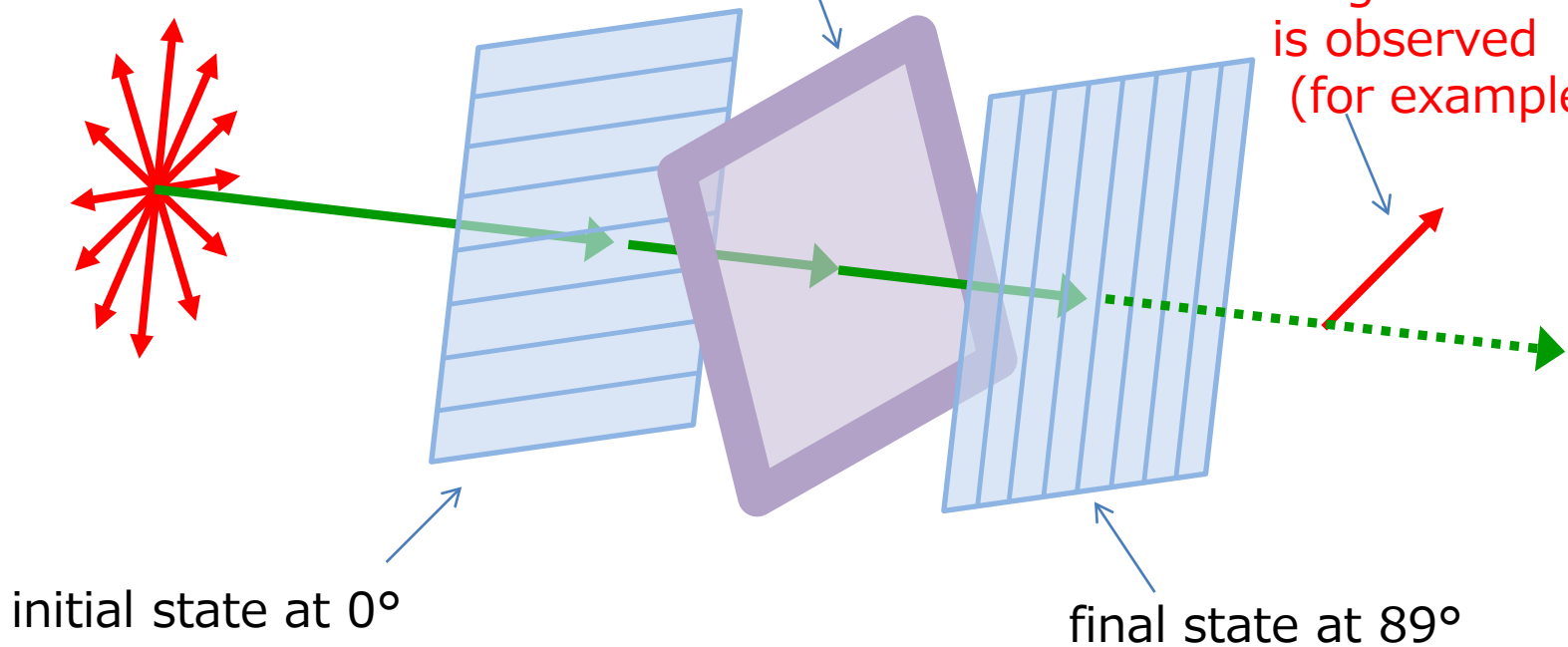
135°-polarized light is refracted by 1mm  
in the opposite direction

# 弱値増幅のデモ 3/3

ほぼ直交している偏光フィルタの間に複屈折素子を挿入すると、異常に大きな屈折

intermediate states are  $45^\circ$  and  $135^\circ$

Large refraction is observed  
(for example 10mm)





# 負の擬確率も許容することによって 理解できること

- Bellの不等式の破れの必要十分条件 (Fine's theorem)
- 複素数の擬確率は Pancharatnam phase.
- 弱値はそんなに大した謎ではないことが理解できる.

# References

1. [谷村省吾「アインシュタインの夢ついでる」](#) (ベルの不等式の破れの検証実験の解説記事) 日経サイエンス 2019年2月号の[ウェブ補足解説](#).
2. Lee and Tsutsui, "Quasi-probabilities in conditioned quantum measurement and a geometric/statistical interpretation of Aharonov's weak value", [PTEP \(2017\)](#).
3. Tamate, Kobayashi, Nakanishi, Sugiyama, Kitano, "Geometrical aspects of weak measurements and quantum erasers", [NJP \(2009\)](#).

**Thank you for your attention**