「量子と古典の物理と幾何」研究会@オンライン

2022年4月28,29日

保存量の一般化：関数から微分形式へ

谷村 省吾

名古屋大学　情報学研究科

微分方程式で定められる力学系~~の保存量~~

力学変数 $\mathbb{X} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$t \mapsto \mathbb{X}(t) = \left(x^1(t), x^2(t), \cdots, x^n(t)\right)$$

ベクトル場 $\mathbb{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{X} \mapsto \mathbb{V}(\mathbb{X}) = \left(V^1(\mathbb{X}), V^2(\mathbb{X}), \cdots, V^n(\mathbb{X})\right)$$

運動方程式 $\dfrac{d\mathbb{X}}{dt} = \mathbb{V}(\mathbb{X}(t))$

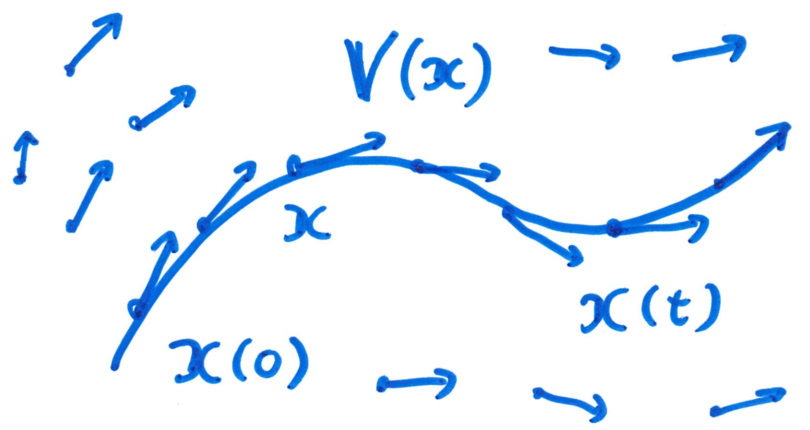
$$\frac{dx^i}{dt} = V^i(x^1(t), \cdots, x^n(t))$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

初期値問題の解 (flow)

$$\mathbb{X}(t) = \mathbb{F}(\mathbb{X}(0), t)$$

$$= \phi_t(\mathbb{X}(0))$$



関数（物理量, observable）$A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto A(x)$$

Aの時間変化

$$\frac{d}{dt}A(x(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}$$

$$= \sum_i \frac{\partial A}{\partial x^i} V^i$$

$$= \mathbb{V} \cdot \mathrm{grad}\, A$$

$$= \langle dA, \mathbb{V} \rangle$$

← 1-formと1-vectorのpairing.

$$= i_{\mathbb{V}}\, dA$$

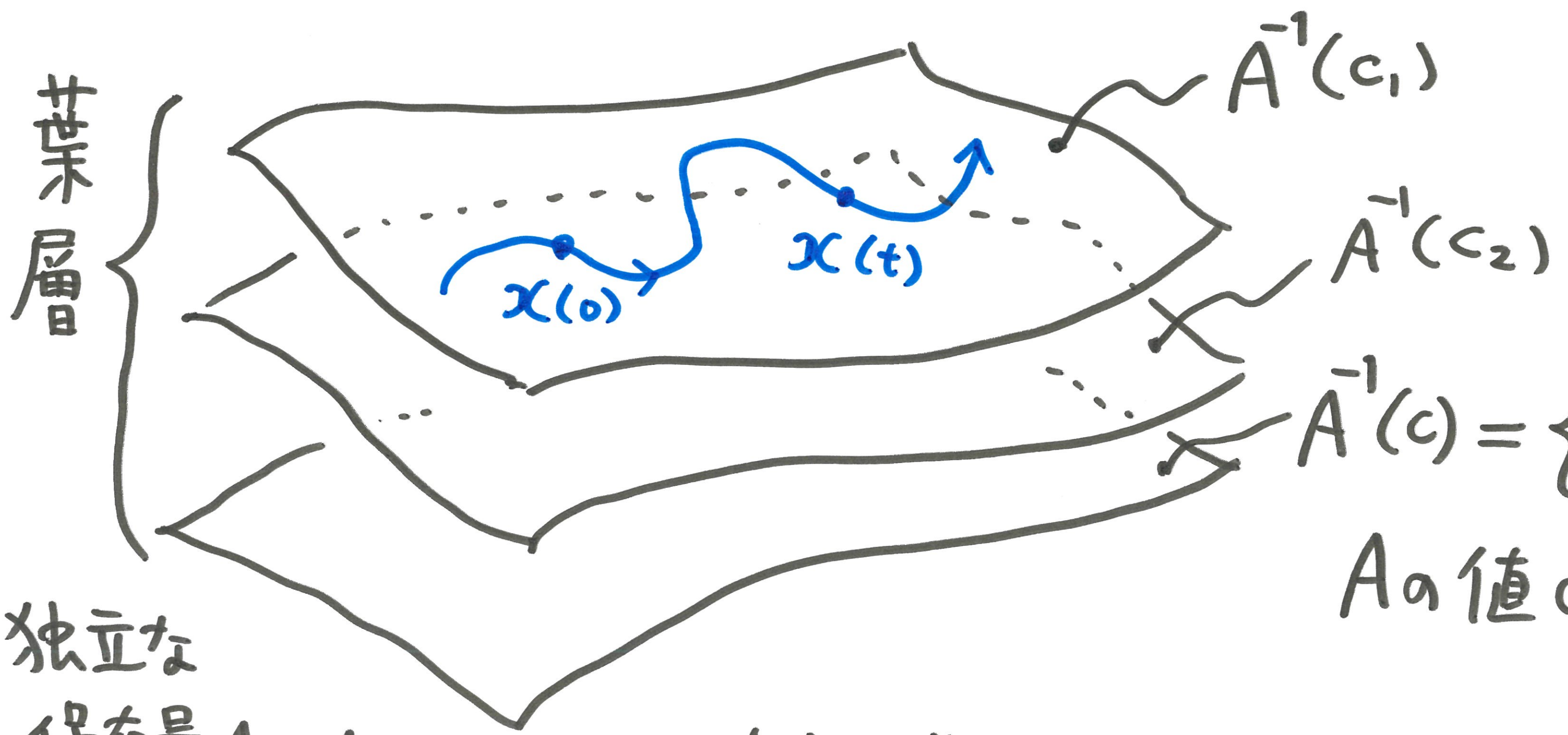
保存量 $\frac{dA}{dt} = 0$

$$A(x(t)) = A(x(0)).$$

$$dA = \sum_i \frac{\partial A}{\partial x^i} dx^i$$

$$\mathbb{V} = \sum_j V^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

保存量Aがあると、解軌道は保存量の定値面に限定される.



$$A^{-1}(c) = \{x \mid A(x) = c\}$$

Aの値cの等値集合

等高面

level set

独立な保存量 $A_1, A_2, \dots, A_k$ があれば

解軌道の存在領域を $(n-k)$ 次元に下げられる.

$k = n-1$ 個の保存量が見つかれば 1次元的な解軌道が決まる：超可積分.

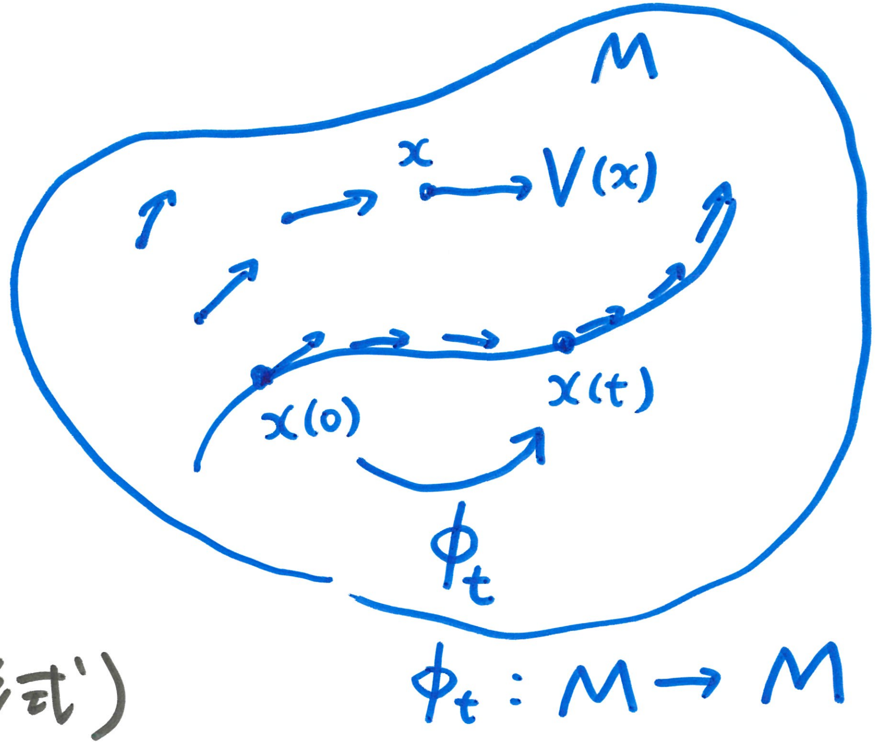
多様体上の力学系

M : n次元多様体 　 $x \in M$

$\mathbb{V}$: M上のベクトル場

運動方程式 $\dfrac{dx}{dt} = \mathbb{V}(x)$

解としてのフロー $x(t) = \phi_t(x(0))$



ω : M上の p-form (p次微分形式)

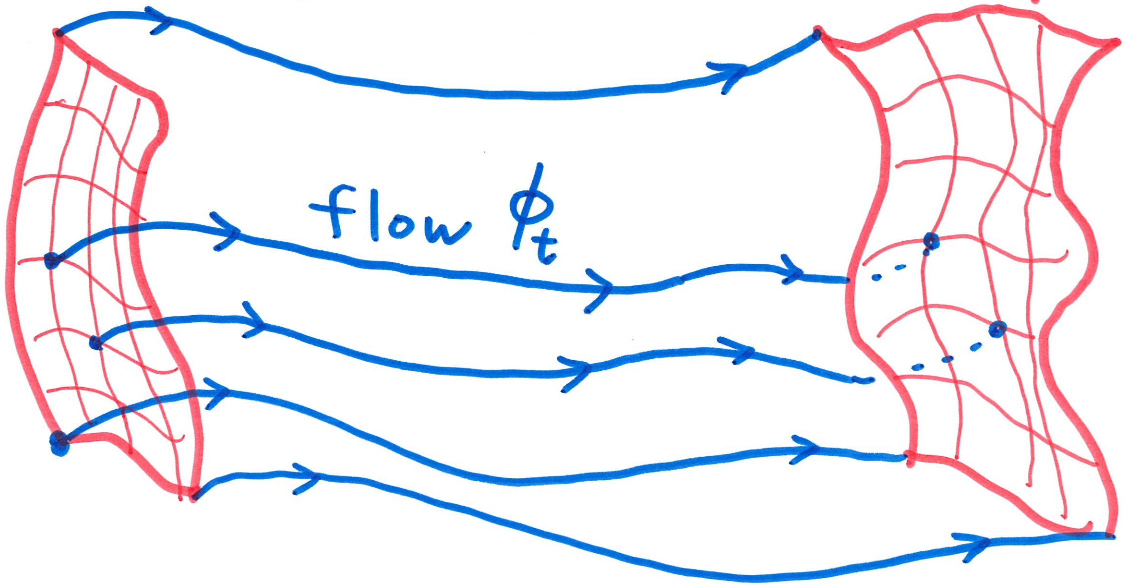
$\phi_t^* \omega$: ϕ_t による ω の pullback

リー微分(ベクトル場$\mathbb{V}$に沿ったωの時間変化) $\left.\dfrac{d}{dt}\phi_t^*\omega\right|_{t=0} =: \mathcal{L}_V \omega$

例1. 1-form $\omega = \omega_i dx^i$ 　 $\mathbb{V} = V^k \dfrac{\partial}{\partial x^k}$ であれば、

$$\mathcal{L}_V \omega = V^k \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} dx^i + \omega_k \frac{\partial V^k}{\partial x^i} dx^i$$

保存微分形式 $\mathcal{L}_V\omega = 0$ を満たす ω のこと.



$$\mathcal{L}_V\omega = 0 \iff \phi_t^*\omega = \omega \iff \underbrace{\int_{C(t)}\omega = \int_{\phi_t C(0)}\omega = \int_{C(0)}\phi_t^*\omega}_{} = \int_{C(0)}\omega$$

この意味で保存量

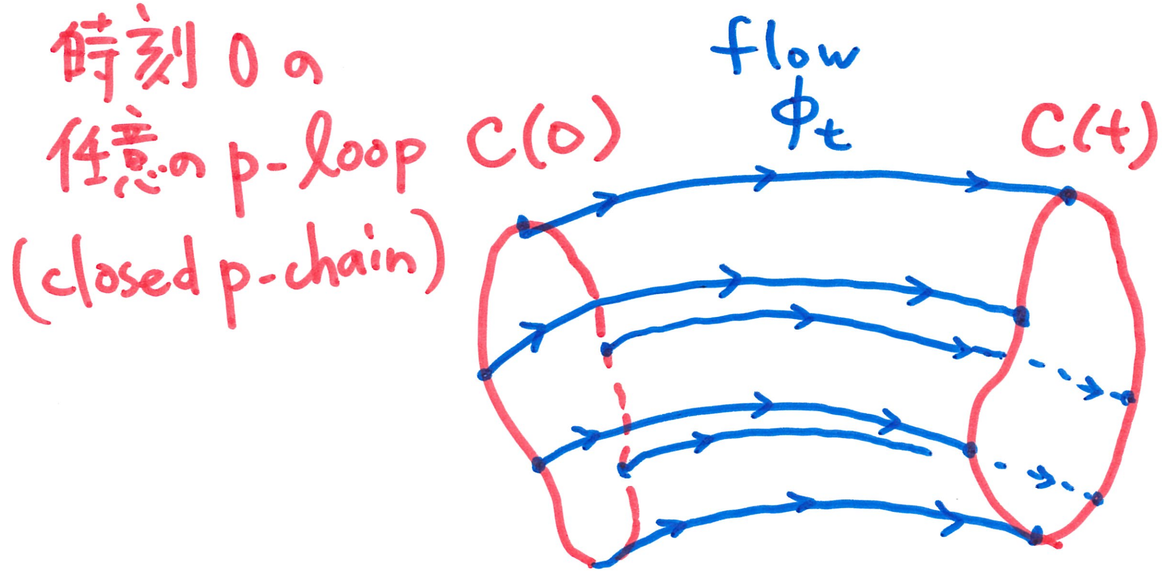
とくに $p=0$ の場合が…

$$A(x(t)) = A(x(0))$$

コホモロジー保存量 (conserved form upto exact form)

p-form ω が closed $(d\omega = 0)$ かつ $\mathcal{L}_v \omega = d\alpha$ なる (p-1)form α が存在.

この場合, $\phi_t^* \omega - \omega = d\beta$ なる (p-1)-form β が存在.



$$\int_{C(t)} \omega = \int_{\phi_t C(0)} \omega$$

$$= \int_{C(0)} \phi_t^* \omega$$

$$= \int_{C(0)} (\omega + d\beta)$$

$$= \int_{C(0)} \omega + \int_{\partial C(0)} \beta$$

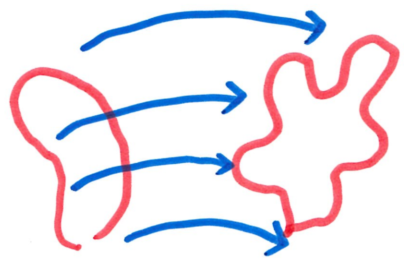
$$= \int_{C(0)} \omega + 0.$$

保存微分形式 $\Longrightarrow$ 積分保存量、保存積分

$$\mathcal{L}_v \omega = 0$$

$$\phi_t^* \omega = \omega$$

$$\int_{C(t)} \omega = \int_{C(0)} \omega$$



p-form ω

とくに 0-form A の場合

$$A(x(t)) = A(x(0))$$

1本の解軌道に関する保存量ではなく、無数の解軌道族に対する保存量になっている。

ただ、このような保存量があったからと言って、

解軌道の絞り込み・決定に役立つか？

レベルセットみたいなものはないか？ cotangent bundle にはあると言えるか？

ハミルトン力学系の場合.

M : 2n次元 manifold

ω : symplectic form …… $\left\{\begin{array}{l} M\text{上の 2-form} \\ d\omega = 0 \\ \text{nondegenerated} \end{array}\right.$

ダルブー座標系では

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$$

$H : M \to \mathbb{R}$ Hamiltonian

$\mathbb{V}_H$: Hamilton vector field

$$dH = \omega(\cdot, \mathbb{V}_H) = -\omega(\mathbb{V}_H, \cdot)$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$$

$$\mathbb{V}_H = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

$$\mathcal{L}_{V_H} \omega = d i_{V_H} \omega + i_{V_H} d\omega$$

$$= d(-dH) + 0$$

$$= 0$$

なので ω 自体が保存微分形式.

$\alpha = \sum_i p_i dq^i$

また, 局所的には $\omega = d\alpha$ と書けて,

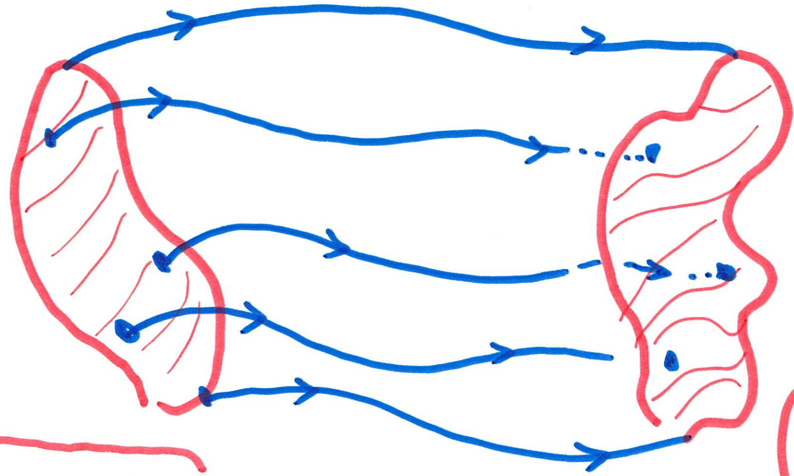
$$0 = \mathcal{L}_{V_H} \omega = \mathcal{L}_{V_H} d\alpha$$

$$= d(\mathcal{L}_{V_H} \alpha)$$

なので, $\mathcal{L}_{V_H} \alpha = d\gamma$ と書ける.

α も upto exact form で保存量.

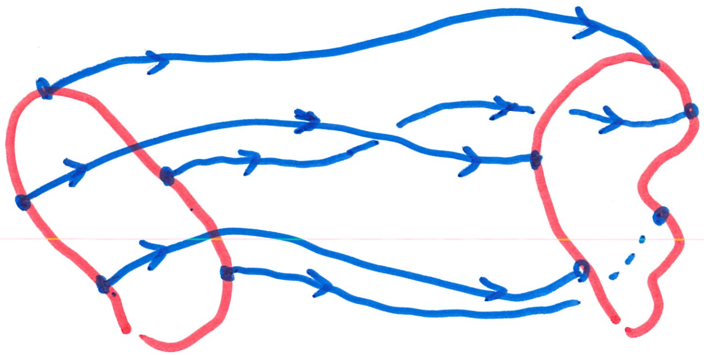
時刻 0 における
任意の 2k - chain $C(0)$



時刻 t $C(t)$

$$\int_{C(0)} \overbrace{\omega\wedge\omega\wedge\cdots\wedge\omega}^{k\text{コ}} = \int_{C(t)} \omega\wedge\omega\wedge\cdots\wedge\omega$$

時刻 0 における
任意の $(2k+1)$-exact chain
$C(0)$



$C(t)$

$C=\partial S$
となるような
$(2k+2)$ chain
S
が存在.

$$\int_{C(0)} \overbrace{\omega\wedge\cdots\wedge\omega}^{k\text{コ}}\wedge\alpha = \int_{C(t)} \overbrace{\omega\wedge\cdots\wedge\omega}^{k\text{コ}}\wedge\alpha$$

symplectic form ω 由来の保存量 $Q = \int_C \omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ のよいところは、

Hamiltonian が explicit に time-dependent $H(q, p, \lambda(t))$ であっても保存量であり続けること。

外場や制御変数 $\lambda(t)$ を時間変化させるシステムと言えば…
力学系

↓

熱力学系（熱機関）だ。

純粋力学（古典力学でも たぶん量子力学でも）の 立場から見た熱力学

対象となる系

object system
変数 s

相互作用

エネルギーのやりとり

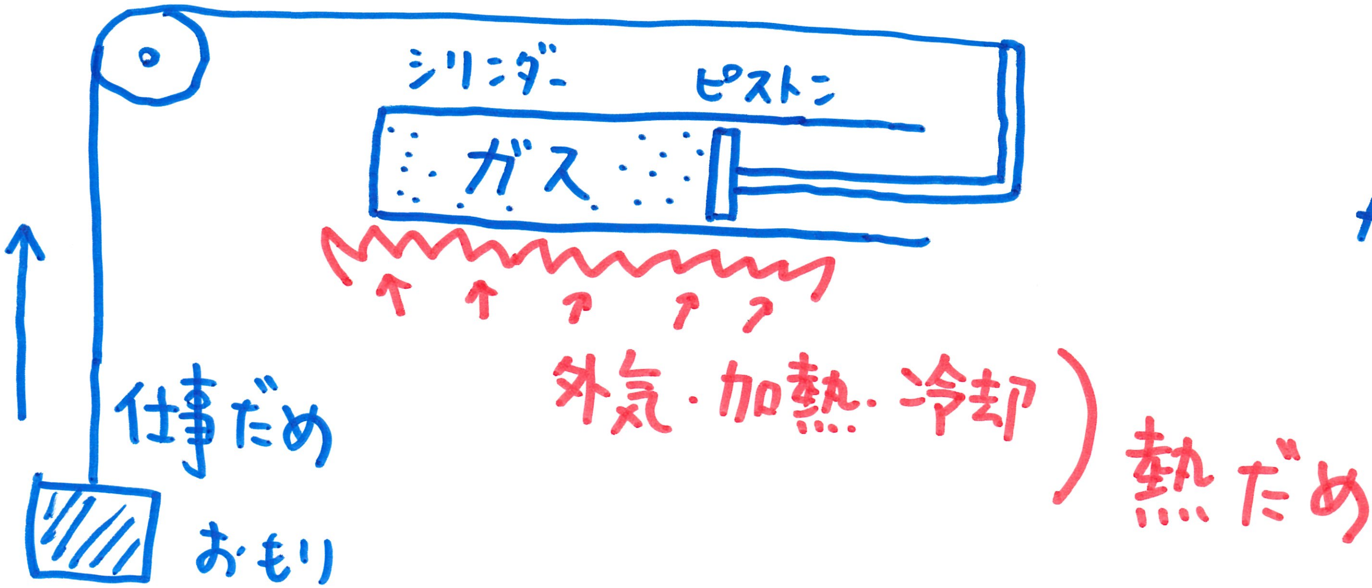
work reservoir 仕事だめ
変数 w

↑少数自由度 シンプル

heat reservoir 熱だめ
変数 h

↑大自由度 複雑 力学的挙動よくわからない

例



ガスが対象系

システムのハミルトニアン　仕事だめのハミルトニアン　熱だめのハミルトニアン

$$H_{TOT} = H_S(S) + H_{work}(w) + H_{heat}(h) + \underbrace{c_1 H^{int}_{s\text{-}w}(S,w)}_{\text{システムと仕事だめの相互作用ハミルトニアン}} + \underbrace{c_2 H^{int}_{s\text{-}h}(S,h)}_{\text{システムと熱だめの相互作用ハミルトニアン}}$$

熱だめは複数あってもよい（温度の異なる熱だめ）

$$H_h^{(1)}(h_1) + H_h^{(2)}(h_2) + \cdots + c^{(1)} H^{int}(S,h_1) + c^{(2)} H^{int}(S,h_2) + \cdots$$

係数 c たちは coupling constant

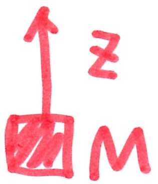
$$c\, H^{int}_{s\text{-}h}(S,h)$$

↓

この係数をゼロにすると断熱

理想的な仕事だめ

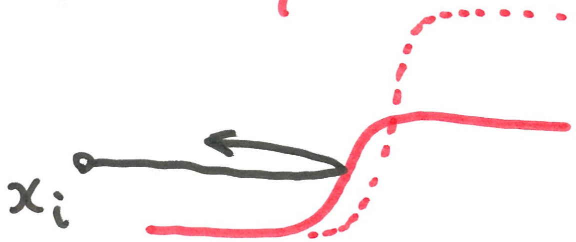
$$H_{work} = \frac{1}{2M}P^2 + MgZ \to 0 + MgZ$$



$$\left.\begin{array}{l} M \to \infty \\ P \to 0 \end{array}\right\}$$ 慣性項を持たない.

理想的なピストン壁

$$H^{int}_{s\text{-}w} = c \sum_i \theta(z+L-x_i)$$



断熱系 $$H_s(\$) + H_w(w) + H^{int}_{s\text{-}w}(\$, w)$$

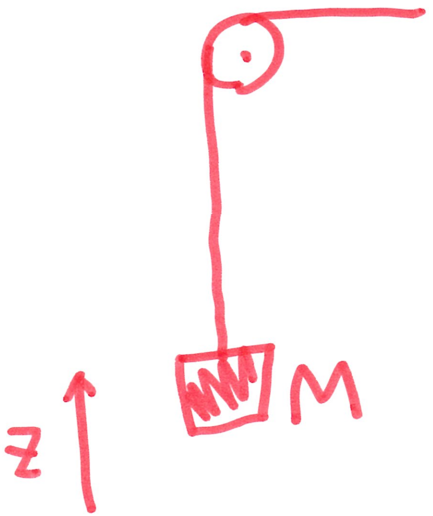
↓ 極端化

$$\underbrace{H_s(\$) + H_w(w) + H^{int}_{s\text{-}w}(\$, w)}_{} = H_T(\$, w)$$

被制御系 $$H_s(\$) + 0 + H^{int}_{s\text{-}w}(\$, \underline{w(t)}) \quad \cancel{H_T(\$, w)}$$

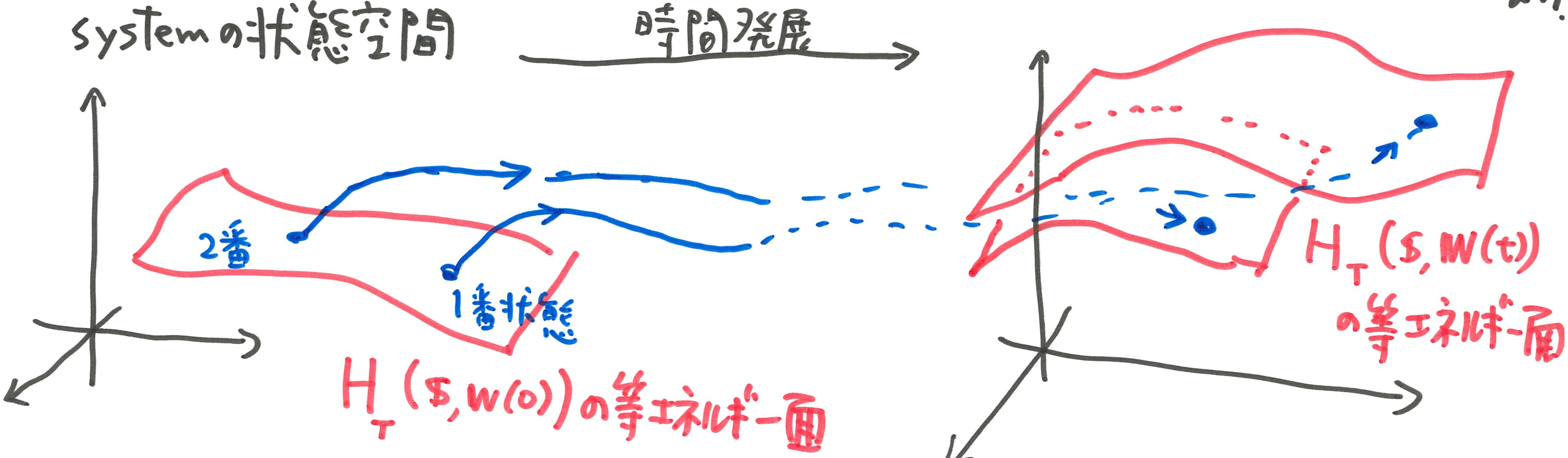
仕事ための
自律的な力学挙動は
完全に沈静化されている.

所与の制御変数
ピストンの位置など



おもりは仕事エネルギー $H^{int} = Mgz$
ためるだけのためにあり、それ自体の
挙動はしない

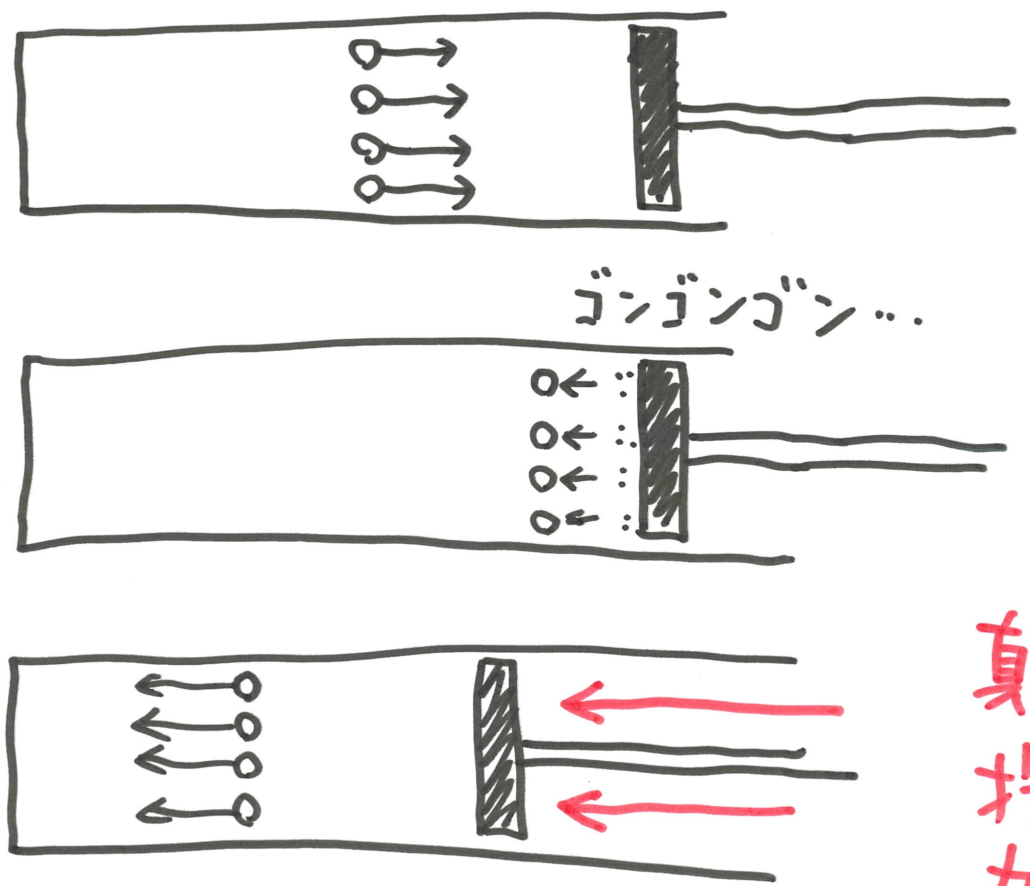
熱力学系の難しさ：コントロール関数 $W(t)$ だけでは仕事が決まらない。



等しいエネルギーの初期状態から出発して、 → 同じピストン操作をしても、 → 結果、エネルギー値の異なる終状態になることがある。

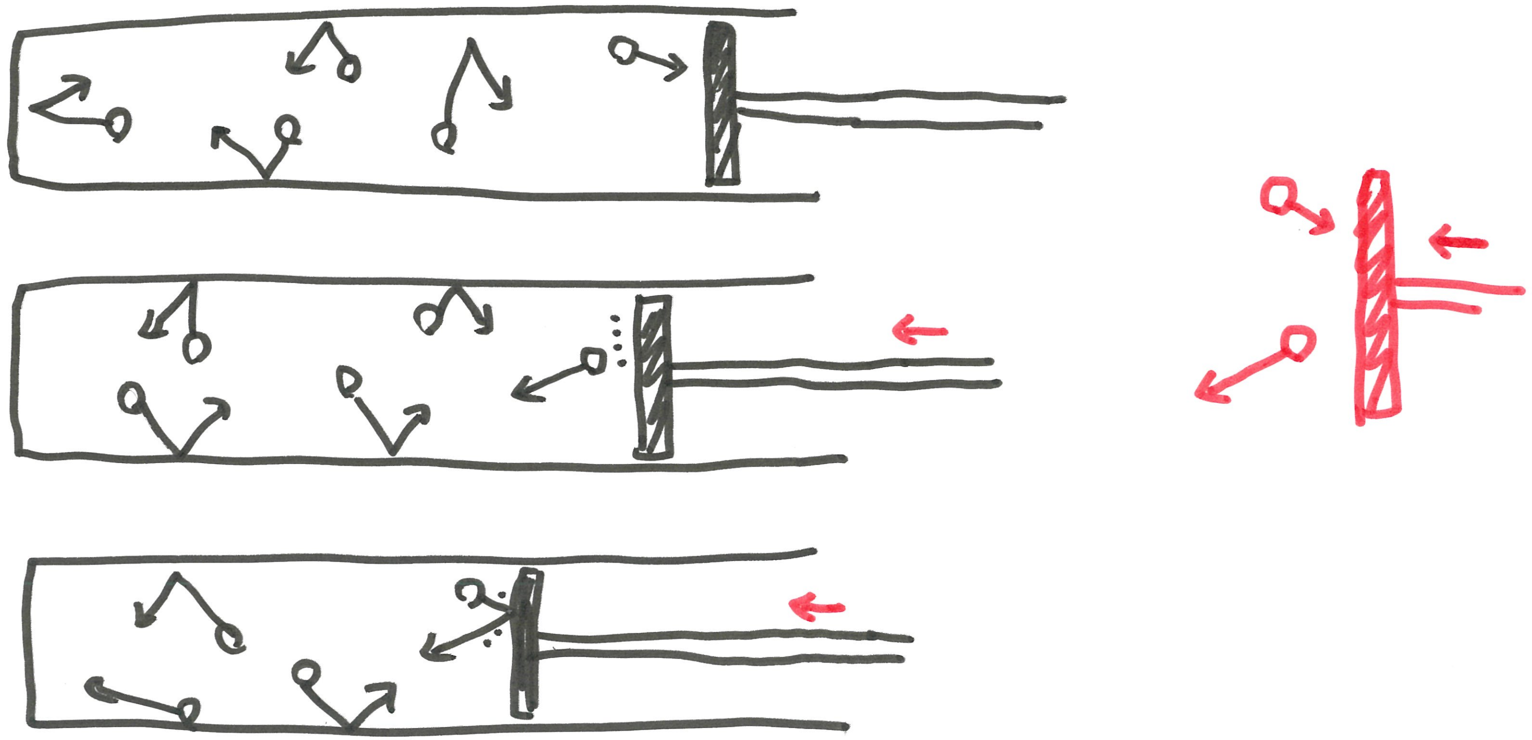
例えば、「ピストンをシリンダーに押しこむ」という操作をする

1番の場合、ガスの分子は整列して動いているとする。(un-typical
non- な初期状態)



真空中でピストンを
押しこめば、
力はゼロ、仕事もゼロ
ガスのエネルギー変化もゼロ!!

2番の場合、ガス分子はランダムに動いているとする（typical state equilibrium）



どのようなタイミングでピストンを動かしても、ほぼ確実に
ピストン壁にガス分子が当たり、ガス分子に力積＝運動量変化
とエネルギーを与える。この場合、正のエネルギー増がある。
しかも、十分ゆっくりピストンを動かすなら、正味の仕事量は コントロール関数 の 初期状態 の 詳細 によらない！

準静的操作 (quasi-static process)

…システムの特徴的な時間スケール τ に比べて十分遅く制御変数 $w(t)$ を変えること.

$$\left\| \frac{dw}{dt}\tau \right\| \approx \left\| w(t+\tau) - w(t) \right\| \ll \| w \|$$

あるいは、制御開始時刻 t_0, 終了時刻 t_1 に関して

$$\tau_{char} \ll t_1 - t_0$$

characteristic time scale

システムの緩和時間, untypical な state から typical な state に移行するのに要する時間

$\neq$

~~[illegible]~~・ロシュミット・ポアンカレの再帰時間

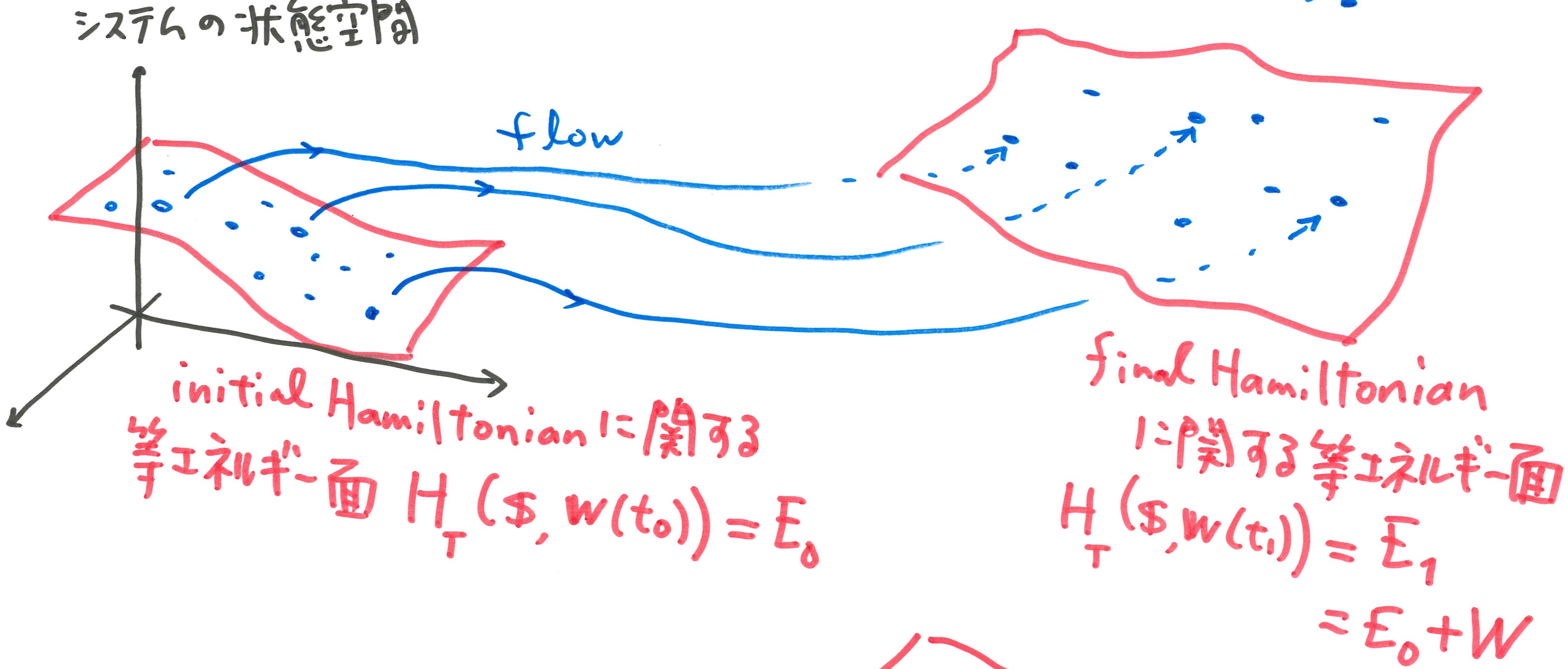
仮定 (物理的にもっともらしく思える観察事実)

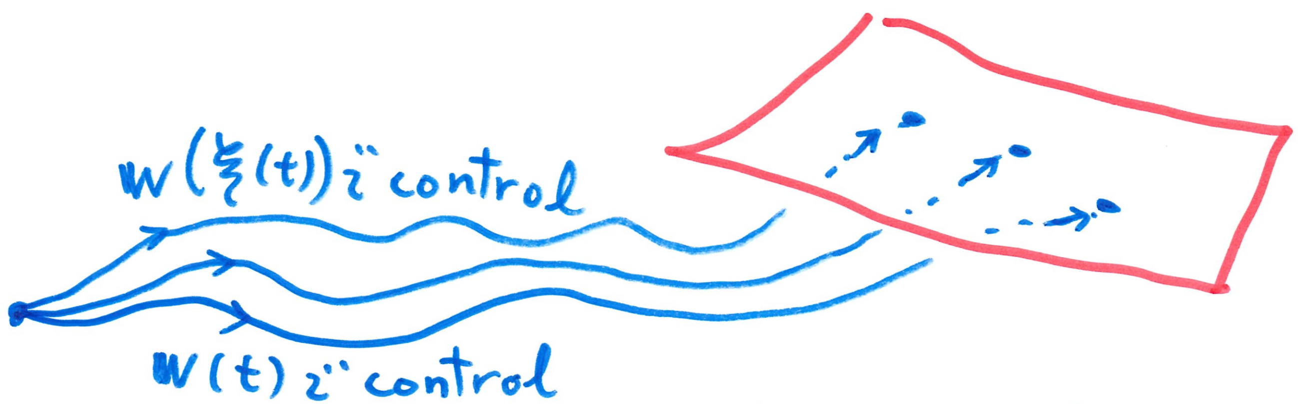
1. 十分大きな系に対しては、typical な state が状態空間の almost every where を占める。

2. 2つの typical $\underbrace{\text{な states}}_{\text{initial}}$ が等エネルギー面上にあり、
十分遅い control function $W(t)$ でシステムを制御すれば、
(準静的断熱過程・操作)
2つの final states は typical であり、かつ、等エネルギー面上にある。

3. この操作で得られる final の等エネルギー面は、control function の reparametrization に関して不変である。
$W(t)$ を $W(\xi(t))$ で置きかえる。(佐々・横倉の対~~称~~称性)。
ξ は単調増加関数

以上の仮定を図で表すと、





ピストンを動かすタイミングをずらしても 正味の仕事は変わらない。

エネルギー値がE以下の状態部分空間

$$\Omega(E) := \{ s \in システム状態空間 \mid H_T(s, w) \leq E \}$$

$\Omega(E,w)$ と書いた方がよい!!

追加の仮定 $\Omega(E)$ はコンパクトだとする.

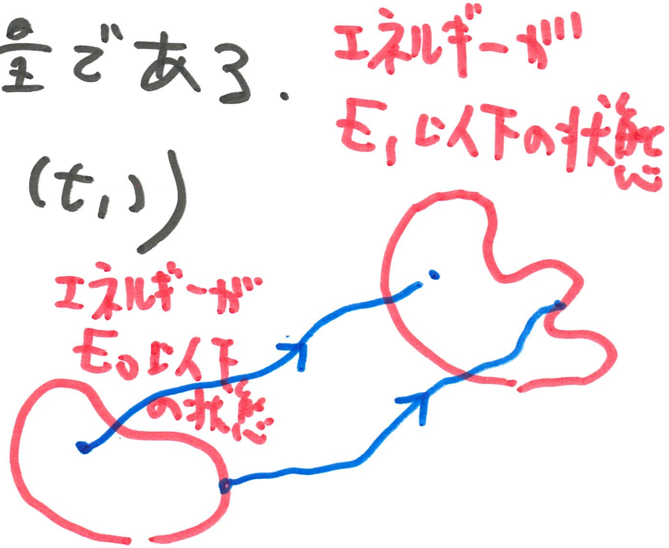
結論 symplectic volume $Q(E,w) := \displaystyle\int_{\Omega(E,w)} \omega\wedge\omega\wedge\cdots\cdots\wedge\omega$

は準静的断熱操作に関して不変量である.

$$Q(E_0, w(t_0)) = Q(E_1, w(t_1))$$

定義 エントロピー $S(E,w) := \log Q$

定理 S は準静的断熱操作の不変量(保存量)



まとめ

1. 保存量関数 $A(x)$ が点から点への解軌道についての不変量であるのに対して、

$$\frac{dA}{dt}=0 \Rightarrow A(x(t_0)) = A(x(t_1))$$

保存微分形式は p-chain から p-chain への解軌道族についての不変量である.

$$\mathcal{L}_V \omega = 0 \Rightarrow \int_{C(t_0)} \omega = \int_{C(t_1)} \omega$$

2. とくに ~~■~~ ハミルトン力学系においては, symplectic form ~~■~~ が自動的に保存微分形式になっている.

3. 佐々・横倉の「ネーター保存量としてのエントロピー」の力学的・幾何学的意味を解読した.

$$S(E,w) = \log \int_{\Omega(H(w)\leq E)} \overbrace{\omega\wedge\omega\wedge\cdots\wedge\omega}^{\text{symplectic volume form}}$$

課題

1. symplectic form 以外の保存微分形式を持つ力学系の例？

2. それがあったとして、運動方程式を解くとか力学系の挙動を理解するとかの役に立つか？

3. 量子論的対応物を考えることはできるか？

とくに $\hat{H}_s + \hat{H}_w + \hat{H}^{int}_{s\text{-}w}$ において $[\hat{H}_s , \hat{H}^{int}_{s\text{-}w}] \neq 0$

$$[\hat{H}_s + \hat{H}_w , \hat{H}^{int}_{s\text{-}w}] \neq 0$$

だとすると、

システムの内部エネルギーと仕事だめに渡したエネルギーの間に不確定性関係ができてしまう。熱だめについても類似のことが言える。

どうする？　量子熱力学？

課題

4. 熱力学第2法則の導出.
   断熱じゃない, 準静的じゃない操作の扱い.

5. typicality や characteristic time scale の特徴付け.

6. "仮定" の正当化