# 数学・物理通信

**12 巻 1 号　　2022 年 3 月**

編集　新関章三・世戸憲治・矢野　忠

2022 年 3 月 12 日

# 目次 (Contents)

# 私が読んだ・書いた量子力学の本

谷村 省吾[*1]

# Textbooks of quantum mechanics that I read or wrote

Shogo TANIMURA[*2]

## 1 私が書いた本

私は昨年（2021 年）11 月に『量子力学 10 講』という題の本を名古屋大学出版会から出しました．タイトルどおり 10 回の講義で量子力学を解説するような形で書いた本です．読者としては現代の理系の学部 1 年生を想定しており，学生が初めて独習する量子力学の本として使えるようにと思って書きました．また，本の正誤訂正と補足ノートをネットに公開しています[*3]．

「線形代数がわかれば量子力学もわかる」をスローガンに，本書では線形代数の延長として量子力学を捉えるというスタイルを採りました．竹内外史氏の『線形代数と量子力学』（裳華房）が，まさにそういう方針で書かれた本だと思います．『線形代数と量子力学』は，たんに線形代数に量子力学を「味付け」した本ではなく，ヒルベルト空間と射影作用素・自己共役作用素・ユニタリ作用素などの数学的諸概念をクリアに解説した上で，確率解釈や非可換物理量の物理学的意義を明示し，付録（と言っても本文の 3 分の 1 を占める）で量子論理を解説する，という個性的な構成になっています．

私の著作では有限次元ヒルベルト空間上の行列で書ける物理量を中心に理論を展開しました．もちろん無限次元ヒルベルト空間を導入しなければ正準交換関係を満たす位置と運動量の演算子を表現できないので，無限次元空間の例も紹介し，有限次元では起きないが無限次元では起きる数理的現象もできるだけ紹介しました．ハミルトニアンに限らない一般の物理量演算子のスペクトル分解と確率解釈を解説した一方，井戸型ポテンシャルや水素原子のハミルトニアンの固有値・固有関数を求めるような量子力学の伝統的な問題には扱いませんでした．とくに最近流行の量子情報理論の文脈では，有限次元のヒルベルト空間を用いた量子力学でも十分に豊かな理論が展開できるし，応用の意義もあるので，本書では思い切って有限次元に偏った解説をしました．とくに可換物理量と非可換物理量の相違点は強調しました．ただ，典型的な量子力学モデルである調和振動子だけは無視することができなかったので，無限次元ヒルベルト空間で生成消滅演算子を用いて調和振動子の固有値・固有関数を求める手続きは明示しました．ついでにインピーダンスという工学的に重要な概念を調和振動子の文脈の中で解説しました．そうやって，平易とは言え，量子力学の数学的構造と物理学的意味については肝心な内容を筋道立てて解説したつもりです．初学者の方は，この本を読んだあと，もっと本格的な量子力学の本を読めるようになってほしいと思います．

この本はプロの物理学者の皆様に自慢できるような内容ではないので，以下では，自著を推すような話ではなく，先人たちが書かれた量子力学の本についての紹介と私の感想を開陳したいと思います．量

[*1] 名古屋大学大学院情報学研究科
[*2] tanimura@i.nagoya-u.ac.jp

[*3] `https://www.unp.or.jp/ISBN/ISBN978-4-8158-1049-8.html` 『量子力学 10 講』を検索して名古屋大学出版会のウェブページをたどっていただければ『補足ノート』が見つかります．

子力学については洋書も和書も昔からたくさんの良書が著されていて，とても私が把握しきれる分量ではありませんので，私が学生時代に読んだ本に絞って紹介したいと思います．

# 2　私の，量子力学の学習歴

## 2.1　大学入学以前

「量子力学」という学問があるらしいと私が知ったのは，中学生だったときです．私の年代の「科学好き」の少年にありがちなことだと思いますが，私は講談社のブルーバックスシリーズの相対性理論関係の本を読み漁っていました．相対論についての啓蒙書を一通り読んだ気になると，今度は量子論が目に入って来ました．ブルーバックスシリーズの中に片山泰久氏の『量子力学の世界—はじめて学ぶ人のために』という本があったので，まずこれを手に取りました．中学生だった私の感想は，よくわからない，というものでした．いま片山氏の本を見ると，湯川秀樹氏による序文があり，著者がこの本に寄せた意気込みが感じられるし，歴史順に沿って量子力学の基本的なことがらを一通り書かれていていることがわかりますが，中学生向きではなかったと思います．

その後しばらく量子力学を思い出すことはなかったのですが，高校の化学の先生（野田江美子先生）が，原子の電子殻構造と原子の結合の話，とくに炭素や酸素の原子の外周に電子が 8 個あると電子が入れる場所が満席になる（「8 個で嬉しい」と化学の先生は説明していました）とか，2 つの原子が 2 つの電子を共有すると原子の結合の腕が 1 本できるとかいう説明をして，「どうして電子 8 個で嬉しいのか，どうして電子を 2 個共有すると原子は結合するのかという理由を知りたい人は，大学に行って量子力学を勉強してください」と言っていたことが印象に残りました．

大学受験用のちょっと進んだ物理学の問題集には，ド-ブロイ波の概念を用いた量子力学の演習問題も載っていましたが，電子は波動でもあるんだな，というイメージ以上のことは私にはわかりませんでした．

高校 3 年生のときのクラス担任の先生は物理の先生（名古屋大学の理学部物理学科出身である村井秀麒先生）でした．私は物理が好きだったので，先生に目を掛けてもらったと思います．私が進学する大学も決まった頃に，村井先生が「君に本を買ってあげる」と言い出して，私を名古屋駅の地下街にあった三省堂書店に呼び出して「高木貞治の解析概論か，朝永振一郎の量子力学か，どっちがいい？」ということを言われました．本屋で 2 冊を見比べさせてもらって，高木貞治の『解析概論』は活字も見にくくて，説明も難しそうで，高校の数学とは違いすぎると思いました．私は，大学に入ったら量子力学が必要になるんだ，もともと量子力学を知りたかったんだ，という気持ちになって，朝永振一郎の『量子力学』の方を選び，先生に買ってもらいました．

家に帰って，さっそく朝永振一郎の『量子力学』を読み始めたのですが，最初の 4 ページ目に出て来た数式の中の exp という記号が何なのかわからず，多重積分が書かれているところであっさり挫折しました．いまの私なら，その数式はボルツマンの古典統計力学的な確率を表していることはわかりますが，高校 3 年生の私は指数関数が exp と書かれることすら知らず，多重積分も知らなかったので，理解できるはずがありませんでした．

## 2.2 大学に入学して

私は 1986 年に名古屋大学の工学部応用物理学科に入学しました．大学 1 年の最初の化学の授業は，シュレーディンガー方程式を解きはしないけれども紹介して，原子のエネルギー準位構造や，s 軌道・p 軌道の波動関数が定める電子の確率分布を説明し，それから原子の共有結合の原理を説明するというものでした．2s, 2p の軌道と電子のスピンを勘定に入れると「電子 8 個で満席になる」ことも説明されました．ああ，これが高校の化学の先生が言っていたことなのかと思いました．あとで知ったのですが，名古屋大学の教養部の化学の先生（平尾公彦先生）は京都大学の福井謙一の門下生であり，量子化学が専門でした．

大学 2 年前期に受けた別の先生（野村浩康先生）の化学の授業も量子力学の解説から始まりました．教科書として指定された阿部龍蔵の『量子力学入門』（岩波書店）を読もうとしましたが，ラグランジアンと作用積分が現れたところで，解析力学をまったく知らなかった私は挫折しました．結局，この化学授業は（先生には申し訳ないけれども）こんなに理解できていない状態で合格ライン・スレスレの「可」の成績なんかほしくないと思って，試験を欠席しました．

解析力学は 3 年生になってから工学部の授業で習ったと思います．応用物理学科の井上順一郎先生の講義は，ランダウ・リフシッツ流の，明快なスタイルで，とてもわかりやすかったです．また，高橋康の『量子力学を学ぶための解析力学入門』（講談社）は，だいぶ理解の助けになりました．解析力学については 3 年生の後期に独習した Goldstein の Classical Mechanics (2nd edition) が一番身に着きました．

私の学生時代には，教養部と工学部の棲み分けのせいか，量子力学は化学の一部として教え始め，あとで物理学としての量子力学を教えるというカリキュラム構成になっていたと思います．いま私は情報学部というところで教えていますが，ここのカリキュラムも，「量子力学は，まず化学，あとで物理」という学習順序になっています．理学部物理学科であれば，当然，物理学の根幹分野として量子力学がカリキュラムに位置づけられますが，理学部以外の学部では，量子力学を化学の教員が教えるかそれとも物理の教員が教えるかということに関して，ある種の縄張り争いがあり，結果的に，学生にとって効果的なカリキュラムになっていない傾向があると思います．

私が属した応用物理学科内では，気体分子運動論・原子物理・前期量子論をやった後に本格的な量子力学を学ぶという系統立ったカリキュラムが組まれていて，あれはよかったと今にして思います．もちろん量子力学を学ぶには物理学・化学・科学史といった多面的なアプローチがあり，多面的に勉強した方がよいのですが，やはり学びやすい順序や，予備知識の充填の必要はあると思います．

さて，大学 2 年の前期に再び量子力学に挫折した私は，それでも量子力学を理解したいと思っていました．いま考えても不思議なのですが，当時の私は，授業の単位なんかはどうでもいいけれど量子力学はきちんと理解したいという気持ちがすごく強くありました．

阿部龍蔵氏の本の次に読み始めたのは，中嶋貞雄氏が書いた岩波の物理入門コースにある量子力学の本でした．これは 2 巻からなる本で，第 1 巻は原子物理から前期量子論までの解説で，第 2 巻はフォーマルな量子力学の解説でした．第 1 巻は面白く読めたのですが，第 2 巻はかなり読みづらかったです．

## 2.3　洋書に手を出す

このあたりで私は，日本人が書いた量子力学の教科書はみんなダメなんじゃないだろうかと恨みがましく思い始め，外国人が書いた本を読んでみようと思いました．大学の図書館で本を探して，吉岡書店から訳本が出ていたシッフの量子力学に目をつけて，借りて読み始めました．これはわかりそうだと思ったのですが，活字が見にくいと思いました．大学生協の書店には洋書のコーナーがあって，Schiff の Quantum Mechanics がペーパーバックで買える値段だったので，これを買って読むことにしました．2 年生の後期のことでした．それが，私が英語の授業以外の用途で初めて買った洋書でした．ともかく英和辞典を傍らに置いて読みました．最初の頃は 1 日 2 ページくらいしか読めなかったと思います．しかし，読めば読んだだけわかる気がしました．英語の方がよっぽどわかりやすいと思いました．近似計算方法のあたりまでは読みました．Schiff の本はとくにヒルベルト空間の基底変換の説明が丁寧で，この本のおかげで，波動関数よりも基底の取り方に依らない抽象的な状態ベクトルの方が本質であることが私にもだんだんわかってきました．また，Schiff の本に出て来る数式は全部自分でも手を動かして追ったので，計算に関しても自信がついてきました．Schiff の本は特殊関数と，特殊関数の母関数を多用していますが，私は母関数のアイデアにかなり感動しました．たくさんの特殊関数を一つの母関数にまとめる扱いを見て，私は，こんな天才的な方法があるのか！母関数の方法は自分では絶対に思いつけなかっただろう，と思いました．

3 年生になってからファインマンの量子力学を読み始めました．これは訳文もちょっとくだけた文章表現になっていて，なじめそうに思えたので，岩波から出ている訳本を買って読みました．私はいわゆる自宅生でしたが，週末の暇なときは，本を持って名古屋市の中心街である栄の公園に行って，公園のベンチで本を読んだりしていました．そうやって，スピン 1 の粒子の思考実験の章を読んだあたりで，ああ，そういうことなのか！という気分になりました．いままで蓄積していた断片的な知識のピースが突然全部噛み合って，これが量子力学なんだという全体像がぱしっと見えたような気がしました．

ファインマンの量子力学を読んだ後は，Landau, Lifshitz の量子力学の英語版を買って読みました．その頃には，訳本がある場合に和書を買うか洋書を買うかという基準はとくになく，本屋で値段を確認して，ぱらっと目を通して，読む気が起きそうな方を選んでいたと思います．Landau, Lifshitz の本は演習問題が多くて，いかにも教科書的だなと思いました．抽象的なヒルベルト空間フォーマリズムよりは具体的な波動関数表示が使われることが多く，ちょっと話が戻ったような気がしましたが，Landau, Lifshitz の解説は明快で，波動関数表示でも十分物理的意味がわかりました．ただ，スピノルの解説の部分はわかりにくく思えて，そのあたりで挫折しました．

## 2.4　多様な活動と知的刺激

3 年生になると工学部で本格的に量子力学の講義が始まりました．その頃には教授の言っていることは全部わかる気がしました．また Schiff の本を 2 回目の通読をしました．こう話していると，私は量子力学ばっかり勉強していたように思われるかもしれませんが，もちろん他の物理学科目や数学も勉強していたし，教養部時代はロシア語の勉強も一生懸命やっていましたし，何と言っても体育会のワンダー

フォーゲル部の部員として国内の 3000 メートル級の山をいくつも登っていましたし，部活の活動費を得るためにアルバイトもけっこうやっていました．いま振り返っても，学生時代の私はいろいろな挑戦のために自分の時間を最大限活用していたと思います．

また，教科書だけでなく啓蒙書の類も楽しく読んでいました．話題は量子力学に限らないですが，朝永振一郎の『物理学とは何だろうか』や『鏡の中の物理学』は，考えさせられるところが多く，興味深かったです．ゲイリー・ズーカフの『踊る物理学者たち』を図書館で借りて読んで面白かったので，ペーパーバック版の原著 The Dancing Wu Li Masters を買って読みました．ファインマンの『物理法則はいかにして発見されたか』からは格別の刺激を受けて，学部 3 年生のときにこれを読んで私は物理学者になろうと決心しました．あと，専門書ですが，デスパーニアの『量子力学における観測の理論』を読もうとして，全然話についていけなかった覚えがあります．

もう一つ，思い出深いのは，応用物理学科の中村新男（あらお）先生が光学の授業の題材として（青刷りの）コピーを配布してくれたシモニーの『実験が光をあてる量子力学の奇妙な世界』（サイエンス, Scientific American 提携誌 1988 年 3 月号）という記事です．それがベルの不等式の破れを検証したアスペの実験の解説だと私が理解したのはだいぶ後のことですが，ともかく興味を引かれました．そのような最新の研究の様子を紹介してくれたことはとても刺激になりました．配布していただいた記事コピーはその後も何度も読み直し，今でも持っています．また，「量子光学はこれから面白くなる，（量子と光学のように）2 つの分野の名前がくっついた分野は面白いことになる」という中村先生の言葉も忘れられないです．あれから 20 年後には私自身がベルの不等式についての論文を書くようになるとは思ってもみませんでした．忘れられないと言えば，これもずっと後のことですが，中村先生が 2012 年 3 月に定年退職されるとき（私は 2011 年 4 月に名古屋大学教授に着任していました）の最終講義で言った「実験家は理論家の侮蔑を恐れることなかれ」という言葉です（中村先生は光学の実験物理学者です）．そういうものなのか，と思いました．私は理論家ですが，他の理論家や実験家からの侮蔑を恐れているので，なかなかそうはできないですが，何か新しいことをなそうとするときは，そういう覚悟が必要なのか，と思います．

## 2.5　学部生後半

3 年生の後期には統計力学の演習授業がありました．その担当の先生（本間重雄先生）はいかにもクールで恐い先生でしたが，私は応用物理学科の学生の中では目立つ方だったので，本間先生に目を掛けてもらっていました．あるとき，本間先生が「J. J. Sakurai の Modern Quantum Mechanics はいい本だ」と言ったので，さっそく生協の書店で探しました．その本はハードカバー版の 1 冊だけが店頭にあり，1 万 6 千円という値段がついていました．さすがにこの値段では手が出ないと思い，私は何日か書店で立ち読みしました．でも読めば読むほど理解が進み，よい本であることが明らかになってくるので，大枚はたいて買うことにしました．それは，ほれぼれするような明快な解説と，物理学的洞察に満ちた本でした．とくに経路積分やアハラノフ・ボーム効果やベルの不等式は，J. J. Sakurai の本で初めて知りました．角運動量の一般論も丁寧に書かれていて，これを読んでスピンに関して「わかりにくい」と思う気持ちはほとんどなくなりました．もうこれが文句なしにベストの量子力学の教科書だと思

いました．4 年生になる直前には全部読み終えたと思います．

4 年生になるとき卒業研究のための配属研究室としては本間先生のいる講座を選びました．「J. J. Sakurai の本を買って読みました」と研究室に入ったときに私が言うと，「あんな高い本を買ったのか！」と本間先生に驚かれました．「じゃあ J. J. Sakurai の本に載っている演習問題を解くか？ 私が見てやるよ」と先生に言われ，一対一の演習授業に毎週つきあってもらいました．

私の学部生時代の量子力学の学習の歩みは以上のような感じでした．4 年生のときには，Ryder や Itzykson, Zuber の Quantum Field Theory を読み始めたり，J. J. Sakurai の Advanced Quantum Mechanics を理学部の友人と自主ゼミで勉強しました．Ryder の本も本間先生に勧めてもらったと思います．この本で非可換群のゲージ場という概念を知ったときの感動は大きかったです．Itzykson, Zuber の本は，緻密に書かれていて，面白いのですが，歯ごたえがあり，しかも大部で，とても読み切れなかったです．

ついでにいろいろ思い出すのですが，本間先生は，私が 4 年生だった年度の途中で群馬大学に移って行かれることになりました．先生が研究室の引っ越しをする際に，要らない雑誌や論文コピーなどを捨てると言って分別されていたのを私は漁って，古いけれど面白い記事の載っている雑誌や，教科書的に読めそうなレビュー論文をけっこういただきました．本間先生が持っていた論文コピーはコピーの仕方がきれいで，厚い論文には几帳面に背表紙まで付けておられたので，手にして気持ちがよいものでした．中でも Abers, Lee の Gauge Theories や Wilson, Kogut の The renormalization group and the $\epsilon$ expansion などの論文を頂戴したのはよかったと思います．

大学院は名古屋大学の理学研究科物理学専攻の E 研に進みました．E 研では M1 はまず場の量子論を勉強するのが当然でした．私の学年は，当時出たばかりの九後汰一郎の『ゲージ場の量子論』を輪読しました．

## 3　何かを徹底的に学ぶということ

大学院を修了するまでも，修了して就職してからも，量子力学は私にとってつねに中心的なテーマであり，勉強は欠かせません．研究室の本棚には「量子」か「Quantum」という語がタイトルに入っている本が何冊も並んでいます．妻はそれを見ると，「量子ばっかり．どうして同じ本をこんなにたくさん買うの？ 一冊にしておいたら」と不思議そうに言います．「いや，同じじゃないんだ，どれも違うんだ．一冊の本に全部の内容を書ききることは不可能なので，著者ごとに本に書く題材を取捨選択するし，取捨選択するためには著者が何を大切と思っているかという視点が入るので，同じ『量子力学』でも必ずちょっとずつ違う本になるんだ．そうやって集めた知識を自分の中で一つに組み立てるしかないんだ」と私は言い訳しています．

余談ですが，私は数学の本でも物理の本でも，必ず「まえがき」からじっくり読む癖があります．自宅でそうやっていると，妻は「一生懸命読んでいるなあと思ったら，まえがき！ そこ，読むの？」と言いますが，「いや，まえがきに一番著者の個性が出るんだ．数学や物理の本は，他の本とまるっきり違ったことは書けないけど，まえがきは一番自由な部分で，ここに著者の思いが一番強く現れているんだ」と，また言い訳にならない言い訳を私はしています．

物理学の教科書にも流行り（はやり）・廃り（すたり）というものがあり，昔は物理学科の学生はみなこれを読むと決まっていた本も，よりわかりやすく，新しい内容を盛り込んだ本に人気を奪われていくものです．昔の本は，標準的教科書ではなくなり，書店の店頭から姿を消すか，あるいは趣味的に読まれる本になっていきます．それはそれで学問が発展している証だと思います．

ですので，いま私が書いた話も，現代の学生に「この本を読むといいよ」という紹介としては通用しないかもしれません．学生の勉強方法も，今では，紙媒体の書籍よりも，ネットに上げられているノートや解説動画の方が主流になっているかもしれません．それでも一つの学問分野を修得するためには，「これさえ読めばよい」という唯一の教材というものはなく，ある程度は品を替えながら，一つ一つ丁寧に読むなり視聴するなりして自問自答を繰り返しながら吸収し，自分の中の蓄積が，たんなる寄せ集めの知識ではなく，筋の通ったストーリーになるまで根気強く取り組むしかないし，いつまでもレベルアップを目指し続けるものなのだ，という教訓は残せるのではないかと思います．

こうやって振り返って見ると，学問にゴールはなく，大学というのは学問の道のスタート地点にすぎないという気がしてきます．そして，先生や書籍は学問の道のガイドなのだと思います．私は，よき先生に出会い，よき友人に会い，よき書籍を学んできたと思います．お世話になった先生方や，ともに研鑽した先輩・友人たち全員の名前をここに挙げられないのが申し訳ないです．感謝の気持ちをどういう言葉で表せばよいのかわからないくらいです．翻って我が身を省みると，いま自分は学生にとってよきガイド役になっているか？という不安が胸をよぎります．

最後に，これは，どんな本でも 1 回読めば理解できるような秀才ではない学生へのアドバイスですが，何かをマスターしたいと思うなら自分の中で熟するまで時間がかかることを覚悟して徹底的に学ぶのが正攻法だ，と言いたいです．また，勉強を動機づけてくれる先生や，良い本を紹介してくれる先生や，ともに学び切磋琢磨する友人に出会ってほしいと思います．そして，書籍を通して著者の思考に近づく喜びを味わってほしいと思います．

（2022 年 2 月 14 日）

（質問）

無限次元のベクトル空間をヒルベルト空間といい，有限次元の場合はベクトル空間というのではなかったでしょうか．（質問者：矢野）

（答）

正定値な内積が備わっていてノルムに関して完備なベクトル空間をヒルベルト空間と呼ぶのが，現代数学におけるヒルベルト空間の定義だと思います．この定義だと，有限次元でも正定値内積があればヒルベルト空間と言います．逆に，内積を使わないのであれば，あるいは内積を定めていないなら，ベクトル空間と言います．

波動関数全体の集合など，量子力学に登場するヒルベルト空間は，無限次元であることがふつうなので，「有限次元ヒルベルト空間」と聞くと違和感があるかもしれませんが，私はかまわないと思いますし，最近は，量子情報など，有限次元ヒルベルト空間を扱っている論文や本も多いです．

# 鎖の線密度が一定でないときの懸垂線 (1)

世戸 憲治 *

# Catenary of Chain with Non-uniform Density (1)

Kenji SETO*

## 1　はじめに

これまで扱ってきた懸垂線はすべて鎖の線密度が一定のものであった．密度が一定の懸垂線はよく知られているように双曲線余弦関数 cosh で表される．ここでは，鎖の密度が長さの関数として連続的に変化したときの懸垂線がどうなるかを考えてみる．具体的には，神社の鳥居に掛かっているしめ縄のように，その太さが場所ごとに異なるもの，あるいは，ネックレースで，それに付いている球の質量が場所ごとに異なるものなどである．ここでは，その具体例として，密度関数がソリトン型のものを扱うことにする．

## 2　方程式の導入とその解法

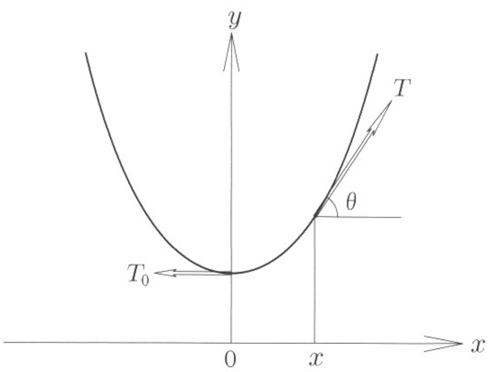


**図 1**

図 1 に示すように長さ $2S_0$ の鎖の両端を持ち上げて懸垂線を作る．ここでは水平右向きに $x$ 軸，鉛直上方に $y$ 軸をとり，鎖の最下点が $y$ 軸上に来るようにする．今回は，この鎖の線密度が連続的に変化するものとするが，これは鎖の真ん中を中心として左右対称になっているものとし，その密度 $\rho$ を，鎖の真ん中から測った長さを $s$ として，$s$ の偶関数 $\rho(s)$ と記すことにする．

この懸垂線の方程式を $y = y(x)$ で表すことにし，この鎖の最下点から $x$ 正の側の任意の点 $(x, y)$ までの部分を考える．この部分の鎖の長さを $s(x)$ とすると[1)]，

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx \tag{2.1}$$

* 北海学園大学名誉教授

1) 本来ならば，積分変数と積分の上限を示す変数は区別すべきであるが，ここでは，誤解の恐れはないものとして，数式が煩雑になるのを避けるため，同じ変数名を使うことにする．

となる．ここに，$y'$ は $y$ の導関数である．また，この部分の質量を $m(s)$ とすると，

$$m(s) = \int_0^s \rho(s) ds \tag{2.2}$$

となる．さらに，鎖の最下点において作用する水平張力を $T_0$，また，点 $(x, y)$ において，懸垂線の接線方向である角度 $\theta$ の方向に作用する張力を $T(x)$ とすると，水平方向，鉛直方向の力の釣り合いから，

$$T(x)\cos\theta = T_0, \qquad T(x)\sin\theta = m(s)g \tag{2.3}$$

となる．ここに，$g$ は重力加速度である．問題は，密度関数 $\rho(s)$ が与えられたものとして，これら方程式から，$s(x)$, $y(x)$, $T(x)$ を求めることである．

初めに，(2.3) の 2 式の比をとり，$\tan\theta = y'$ となることから，

$$y' = \frac{1}{\mu} m(s), \qquad \mu = \frac{T_0}{g} \tag{2.4}$$

となる．ここに，$\mu$ は質量の次元を持つ量でこの第 2 式で定義する．一方，(2.1) 式を $x$ で微分すると，

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2} \tag{2.5}$$

となるので，これに，(2.4) 式を代入すると，

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \mu^{-2} m^2(s)} \tag{2.6}$$

となる．ここで，これを変数分離し，積分形にすると，

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + \mu^{-2} m^2(s)}} = x \tag{2.7}$$

となる．ここで，$x = 0$ のとき，$s = 0$ となることを使った．$\rho(s)$ が与えられれば，(2.2) 式から $m(s)$ もわかるので，この積分ができれば，$s$ と $x$ の関係が求められる．これを $s$ について解けたものとして，$s = s(x)$ が求められる．さらに，これが求まると (2.5) 式から，

$$y' = \sqrt{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1} \tag{2.8}$$

となるので，これを $x$ で積分して解曲線 $y = y(x)$ が求められる．さらに，これが求まると (2.3) 式から $T(x)$, $T_0$ も求められる．以上は，一般的な方針だけを述べたものであるが，これだけでは理解し難いので，以下の節でその具体例を示す．

# 3 具体例

## 3.1 密度が一定な場合

手始めに確かめのつもりで，最も簡単な $\rho(s) = \rho_0$ (一定) という場合を考える．このときの解は双曲線余弦関数になることは初めからわかっている．(2.2) 式から $m(s) = \rho_0 s$ となるので，(2.7) 式は

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + (\rho_0/\mu)^2 s^2}} = \frac{\mu}{\rho_0} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\rho_0}{\mu} s\right) \tag{3.1}$$

となる．これを $s$ について解くと，

$$s = \frac{\mu}{\rho_0} \sinh\left(\frac{\rho_0}{\mu} x\right) \tag{3.2}$$

となり，これを $x$ で微分してから (2.8) 式に代入すると，

$$y' = \sinh\left(\frac{\rho_0}{\mu} x\right) \tag{3.3}$$

となるので，これを積分して，解曲線が

$$y = \frac{\mu}{\rho_0} \cosh\left(\frac{\rho_0}{\mu} x\right) + C \tag{3.4}$$

と求められる．$C$ は意味のない積分定数である．この後，張力 $T(x)$ を求めることもできるが，これについては，以前にもやっているので，ここでは省略する．

## 3.2 ソリトン型のモデル

2 番目のモデルは，密度関数を，ソリトン型の

$$\rho(s) = \frac{\rho_0}{\cosh^2\big((\rho_0/\nu)s\big)} \tag{3.5}$$

とした場合を考える．ここに，$\nu$ は質量の次元を持つ任意定数である．このとき，$\nu/\rho_0$ は長さの次元を持つが，これは質量が集中するところの幅 (半値半幅) を与える[2)]．なお，ここで，$\nu \to \infty$ とすると，前の小節で扱った密度一定の場合になることを注意する．

これを (2.2) 式に代入して，$m(s)$ を求めると，

$$m(s) = \rho_0 \int_0^s \frac{ds}{\cosh^2\big((\rho_0/\nu)s\big)} = \nu \tanh\left(\frac{\rho_0}{\nu} s\right) \tag{3.6}$$

となる．これを (2.7) 式に代入すると，

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + (\nu/\mu)^2 \tanh^2\big((\rho_0/\nu)s\big)}} = \int_0^s \frac{\cosh\big((\rho_0/\nu)s\big) ds}{\sqrt{1 + \big((\mu^2+\nu^2)/\mu^2\big) \sinh^2\big((\rho_0/\nu)s\big)}} \tag{3.7}$$

となるが，この積分は変数を

$$\frac{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}{\mu} \sinh\left(\frac{\rho_0}{\nu} s\right) = \sinh(p) \tag{3.8}$$

と置き換えると簡単に積分できて，

$$x = \frac{\lambda}{\rho_0} \mathrm{arcsinh}\Big[\frac{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}{\mu} \sinh\left(\frac{\rho_0}{\nu} s\right)\Big], \qquad \lambda = \frac{\mu\nu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}} \tag{3.9}$$

となる．ここに，数式の簡素化のため質量の次元を持つ量 $\lambda$ をこの第 2 式で定義した．これを，逆に，$s$ について解くと，

$$s = \frac{\nu}{\rho_0} \mathrm{arcsinh}\Big[\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}} \sinh\big(\rho_0 x/\lambda\big)\Big] \tag{3.10}$$

---

2) この場合の正確な半値半幅は $\log(1+\sqrt{2})\ \nu/\rho_0 \approx 0.88137\ \nu/\rho_0$ となる．

となる．これを，さらに $x$ で微分すると，

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\cosh\left(\rho_0 x/\lambda\right)}{\sqrt{1+\left(\mu^2/(\mu^2+\nu^2)\right)\sinh^2\left(\rho_0 x/\lambda\right)}} \tag{3.11}$$

となる．これを (2.8) 式に代入すると，

$$y' = \frac{\left(\nu/\sqrt{\mu^2+\nu^2}\right)\sinh\left(\rho_0 x/\lambda\right)}{\sqrt{1+\left(\mu^2/(\mu^2+\nu^2)\right)\sinh^2\left(\rho_0 x/\lambda\right)}} \tag{3.12}$$

となるので，あとはこれを積分することになるが，分母にある $\sinh^2$ を $\cosh^2$ で表すように

$$y' = \frac{\sinh\left(\rho_0 x/\lambda\right)}{\sqrt{1+(\mu/\nu)^2\cosh^2\left(\rho_0 x/\lambda\right)}} \tag{3.13}$$

と変形してから積分形にすると

$$y = \int \frac{\sinh\left(\rho_0 x/\lambda\right)dx}{\sqrt{1+(\mu/\nu)^2\cosh^2\left(\rho_0 x/\lambda\right)}} \tag{3.14}$$

となる．ここで，変数変換

$$\frac{\mu}{\nu}\cosh\left(\rho_0 x/\lambda\right) = \sinh(p) \tag{3.15}$$

をすると，容易に積分でき，これから，解曲線は，

$$y = \frac{\nu\lambda}{\rho_0\mu}\mathrm{arcsinh}\Big[\frac{\mu}{\nu}\cosh\left(\rho_0 x/\lambda\right)\Big] + C \tag{3.16}$$

と求められる．$C$ は前と同じく意味のない積分定数である．この式の中で $\nu$ は (3.5) 式を与えるときに決められる定数であるが，$\mu$ は，$T_0$ を含んでいるので，未知数である．この値は，懸垂線にしたときに鎖の両端の間隔をどのようにとるかで決まる．鎖の元の長さは $2S_0$ であった．これを持ち上げて鎖の両端の間隔を $2\ell$ としたとき，懸垂線の最下点から端の点 $x=\ell$ までの長さが $S_0$ でなければいけないので，(3.10) 式から，$\lambda$ を元の定義に戻して書くと，

$$S_0 = \frac{\nu}{\rho_0}\mathrm{arcsinh}\Big[\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\sinh\Big(\frac{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}{\mu\nu}\rho_0\ell\Big)\Big] \tag{3.17}$$

となる．この式によって $\mu$ の値が決まるが，もちろんこれは超越方程式なので，数値的に解くことになる．なお，「付録」のところで，この方程式が，$S_0 > \ell$ に対し，必ず 1 個の解を持つことを示す．$\mu$ が決まると，(2.4) の第 2 式から，最下点における張力 $T_0$ が $T_0 = \mu g$ と決まる．

以下，張力 $T(x)$ を求めてみよう．(3.10) 式の $s$ を (3.6) 式に代入すると

$$m(s) = \nu\tanh\Big[\mathrm{arcsinh}\Big(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\sinh\left(\rho_0 x/\lambda\right)\Big)\Big] \tag{3.18}$$

となるが，双曲線関数に関する恒等式

$$\tanh\left[\mathrm{arcsinh}(p)\right] = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \tag{3.19}$$

を用いて変形すると，

$$m(s) = \frac{\lambda\sinh\left(\rho_0 x/\lambda\right)}{\sqrt{1+\left(\mu^2/(\mu^2+\nu^2)\right)\sinh^2\left(\rho_0 x/\lambda\right)}} = \frac{\lambda\tanh\left(\rho_0 x/\lambda\right)}{\sqrt{1-\left(\nu^2/(\mu^2+\nu^2)\right)\tanh^2\left(\rho_0 x/\lambda\right)}} \tag{3.20}$$

となる．

一方，懸垂線の点 $(x, y)$ における接線方向の角度を $\theta$ としたとき，$\tan\theta = y'$ であるから，

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \tag{3.21}$$

となって，これに，(3.12) 式の $y'$ を代入すると，

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{\mu^2+\nu^2}\tanh^2\big(\rho_0 x/\lambda\big)}, \qquad \sin\theta = \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\tanh\big(\rho_0 x/\lambda\big) \tag{3.22}$$

となる．この第 1 式の $\cos\theta$ を (2.3) の第 1 式に代入すると，張力 $T(x)$ が

$$T(x) = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \big(\nu^2/(\mu^2+\nu^2)\big)\tanh^2\big(\rho_0 x/\lambda\big)}} \tag{3.23}$$

と求められる．また，この式の $T(x)$ と (3.22) 式の $\sin\theta$，および (3.20) 式の $m(s)$ を，(2.3) の第 2 式に代入すると $T_0 = \mu g$ となって，これは (2.4) 式の $\mu$ の定義式に戻るだけである．

なお，(3.5) 式のところで書いたように，$\nu \to \infty$ としたときこのモデルは前の小節の密度一定の場合になるはずである．これは (3.9) の第 2 式で定義した $\lambda$ は $\nu \to \infty$ で $\mu$ になること，また，$p$ が十分ゼロに近いときは $\mathrm{arcsinh}(p) \cong p$ となることから，(3.16) 式の $y$ は $\nu \to \infty$ のとき $y = (\mu/\rho_0)\cosh(\rho_0 x/\mu)$ となり，(3.4) 式の解と一致することから分かる．

## 3.3　ソリトン型モデルにおける数値計算例

ここで，先に述べたソリトン型モデルでの数値計算例を示す．以下，適当ではあるが，

$$\rho_0 = 1\,\mathrm{kg/m}, \qquad \nu = 0.2\,\mathrm{kg}, \qquad S_0 = 1\,\mathrm{m}, \qquad \ell = 0.7\,\mathrm{m} \tag{3.24}$$

とおいてみる．この設定で，方程式 (3.17) を解いて $\mu$ を求めるわけだが，その実際の数値解法については「付録」にまとめることにし，ここではその結果だけを述べることにする．すなわち，「付録」で示したように (3.17) 式を解きやすいように変形した方程式 (A2) を，(A1) で定義した無次元数 $\alpha$ について数値的に解き，さらに，これから $\mu$ を求めると，小数以下 6 桁の精度で，

$$\alpha = 1.554632, \qquad \mu = 0.168020\,\mathrm{kg} \tag{3.25}$$

という値が求められる．

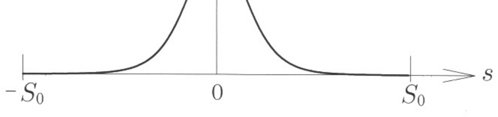


**図 2**　密度関数

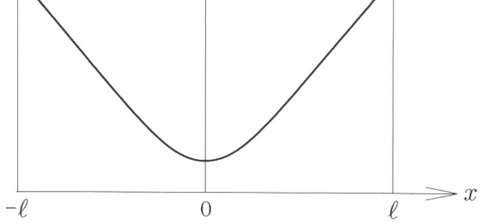


**図 3**　懸垂線

このときの (3.5) 式で定義されるソリトン型の密度関数，および，(3.16) 式で表される懸垂線を，それぞれ，図 2，図 3 に示す．この場合，鎖の質量は中心部に集中しているので，その懸垂線は，図 1 で見る通常のものとはかなり違って，中心部を離れるとほとんど直線になってしまう．この直線になることについては，$p$ を正の十分大きな数としたときの漸近形

$$\cosh(p) = \frac{1}{2}(e^p + e^{-p}) \cong \frac{1}{2}e^p, \qquad \operatorname{arcsinh}(p) = \log\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) \cong \log(2p) \tag{3.26}$$

を用いて，$x$ が正で十分に大きなときの (3.16) 式の $y$ を見積もると，

$$y \cong \frac{\nu}{\mu}x + \frac{\nu\lambda}{\rho_0\mu}\log\left(\frac{\mu}{\nu}\right) + C \tag{3.27}$$

と直線になることから理解される．

## 4　おわりに

ここでは，線密度が連続的に変化する場合の懸垂線を求める方法について議論し，その具体例として，密度関数 $\rho(s)$ が (3.5) 式のようにソリトン型 $\rho(s) = \rho_0/\cosh^2\left[(\rho_0/\nu)s\right]$ で与えられる場合について，その具体的な解曲線を求めてみた．実は，これ以外にも，密度関数が

$$\rho(s) = \frac{\rho_0}{\cosh\left((\rho_0/\nu)s\right)}, \qquad \rho(s) = \frac{\rho_0}{1 + \left((\rho_0/\nu)s\right)^2} \tag{4.1}$$

等も解こうと努力はしてみたが，(2.2) 式の積分はできるが，(2.7) 式の積分が解析的に遂行不能となり，あきらめざるを得なくなった．もう一つ，解ける例としては，(3.5) 式の cosh を cos とした $\rho(s) = \rho_0/\cos^2\left[(\rho_0/\nu)s\right]$ の場合も同様に解けるが，これは (3.5) 式における $\nu$ を虚数に解析接続したもので，新しいものではない．ただし，この場合は密度が発散しないように $(\rho_0/\nu)S_0 < \pi/2$ の範囲に制限しなければならない．という訳で，解析的にきれいに解ける例が一つでも見つかったことは幸運である．

最後に，この問題の逆問題について，簡単に，述べておこう．すなわち，解曲線 $y = y(x)$ が与えられて，逆に密度関数 $\rho(s)$ を求める問題である．まず，(2.1) 式の積分を実行して，$s$ を $x$ の関数として求め，これを逆に $x$ について解いて，$x = x(s)$ の形にしておく．つぎに，(2.4) 式を $x$ で微分して，

$$y'' = \frac{1}{\mu}\frac{ds}{dx}\frac{d\,m(s)}{ds} \tag{4.2}$$

となるが，ここで，(2.2) 式を $s$ で微分した $d\,m(s)/ds = \rho(s)$ と (2.5) 式の $ds/dx$ を代入すると，

$$y'' = \frac{1}{\mu}\sqrt{1+y'^2}\,\rho(s) \tag{4.3}$$

となるので，これから $\rho(s)$ を $x$ の関数として求め，あとは，$x = x(s)$ を用いて $s$ の関数としておく．

## [付録]

ここで，$\mu$ を求めるための方程式 (3.17) が $S_0 > \ell$ であれば必ず 1 個の解を持つことを示しておく．初めに，質量の次元を持つ $\mu$ から無次元の $\alpha$ への変数変換

$$\alpha = \frac{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}{\mu} > 1 \tag{A1}$$

を施し，方程式 (3.17) を解きやすくするために変形すると，

$$F(\alpha) \equiv \frac{1}{\alpha}\sinh\left(\alpha\frac{\rho_0\ell}{\nu}\right) - \sinh\left(\frac{\rho_0 S_0}{\nu}\right) = 0 \tag{A2}$$

となる．この $F(\alpha)$ で $\alpha \to 1$ のときは，$S_0 > \ell$ に対し，

$$\lim_{\alpha\to 1} F(\alpha) = \sinh\left(\frac{\rho_0\ell}{\nu}\right) - \sinh\left(\frac{\rho_0 S_0}{\nu}\right) < 0 \tag{A3}$$

となり，また，明らかに

$$\lim_{\alpha\to\infty} F(\alpha) = \infty \tag{A4}$$

である．さらに，$F(\alpha)$ を $\alpha$ で微分すると，

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}\left[\alpha\frac{\rho_0\ell}{\nu}\cosh\left(\alpha\frac{\rho_0\ell}{\nu}\right) - \sinh\left(\alpha\frac{\rho_0\ell}{\nu}\right)\right] \tag{A5}$$

となるが，ここでさらに，$\alpha$ から無次元量 $\tau$ へ

$$\tau = \alpha\frac{\rho_0\ell}{\nu} > 0 \tag{A6}$$

と変換し，この (A5) 式の大括弧の部分を

$$G(\tau) = \tau\cosh(\tau) - \sinh(\tau) \tag{A7}$$

とおく．ここで，$G(0) = 0$ に注意し，さらにこの $G(\tau)$ を $\tau$ で微分すると，$\tau > 0$ で，

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} = \tau\sinh(\tau) > 0 \tag{A8}$$

となるので，(A5) 式の $dF/d\alpha$ も正となり，$F(\alpha)$ は，$\alpha > 1$ の領域で，単調増加関数，したがって，$F(\alpha) = 0$ は必ず 1 個の解 $\alpha$ を持つ．$\alpha$ が決まると (A1) 式から正の $\mu$ も一意的に決まる．

[ 謝辞 ]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，たくさんのご教示いただきました．先生に心から感謝いたします．

# 四元数と Cauchy-Lagrange の恒等式

矢野　忠[*1]

# The Quaternions and Cauchy-Lagrange Identities

Tadashi Yano [*2]

## 1　はじめに

エッセイ「四元数に近づく」 [1] で四元数を用いて Cauchy-Lagrange の恒等式を証明した．また [2] でも四元数を用いた別の証明を与えた．これはそれらを補うエッセイである．

ブルーバックス『数の世界』 [3] を読んでいたら，四元数との関連で Cauchy-Lagrange の恒等式の証明が述べられていた．特に，Cauchy-Lagrange の恒等式 (1.2) が実部のない四元数から導かれていたのが目新しいことであった[*3]．

それで，このエッセイでは下に記す (1.2) と (1.3) の Cauchy-Lagrange の恒等式の四元数を用いた証明を述べ，以前には気がつかなかった，いくつかの点について述べたい．

このエッセイで対象とする Cauchy-Lagrange の恒等式はつぎの 3 つである．

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2+(ay-bx)^2 \tag{1.1}$$

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2 \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) &= (ax+by+cz+dw)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2 \\ &\quad +(aw-dx)^2+(bz-cy)^2+(bw-dy)^2+(cw-dz)^2\end{aligned} \tag{1.3}$$

である．これらの数式を文字に添字をつけないで表したが，そのために恒等式の構造がわかりにくい．

文字に添字をつけた形で一般の Cauchy-Lagrange の恒等式をつぎのように表せば，この恒等式の構造がわかりやすい．

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) = (a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2+\sum_{1\le i<j\le n}(a_ix_j-a_jx_i)^2 \tag{1.4}$$

すなわち，$\sum_{1\le i<j\le n}^{n}(a_ix_j-a_jx_i)^2$ の項を $i<j$ である，$(i,j)$ の組を 1 から $n$ までとればよい[*4]．その規則にしたがって (1.1)-(1.3) を表している．

このエッセイの主目的ではないが，一般の Cauchy-Lagrange の恒等式の数学的帰納法による証明を付録 3 に述べた．

---

[*1] 元愛媛大学工学部

[*2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[*3] 『四元数』 [4] にもほぼ同じことが書かれていたが，その真意をつかんでいなかった．実は [5] の p.26 に，下に与えた (2.3) と同じ式が書いてある．この式の絶対値の 2 乗をとれば，Cauchy-Lagrange の恒等式 (1.2) を証明できたはずだが，先入観のため証明できるとは思っていなかった．

[*4] 付録 1 に $a_ix_j-a_jx_i$ の具体的な例を $n=4$ の場合の Cauchy-Lagrange の恒等式で添字つきの文字の数字の組として示す．

## 2　Cauchy-Lagrange の恒等式の証明

この 2 節では『数の世界』にしたがって，絶対値の法則を用いた Cauchy-Lagrange の恒等式の証明をしよう．『四元数の発見』 [6] では絶対値の法則*5はあくまで四元数の発見をする指導原理として考えられたので，天下りに絶対値の法則を使って Cauchy-Lagrange の恒等式の証明したわけではない．そのためにその証明はあまり簡明ではなかった．一度絶対値の法則が成り立っていることを前提とすれば，Cauchy-Lagrange の恒等式の証明はわかりやすい*6．

上で説明なしに絶対値の法則（組成法則ともいう）という用語を用いたが，それを説明をしておこう．

実数とか複素数では，ある 2 数 $\alpha, \beta$ の積の $\alpha\beta$ の絶対値 $|\alpha\beta|$ はそれぞれの数の絶対値 $|\alpha|$ と $|\beta|$ の積に等しい．すなわち

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \tag{2.1}$$

が成り立つ．これを絶対値の法則という．この法則はもちろん四元数でも成り立つ．

これが実数とか複素数で成り立つことはすぐに証明できる．またこの絶対値の法則が成り立つように四元数も定義されている．絶対値の法則が成り立つとその両辺を 2 乗した式も成り立つ．すなわち，

$$|\alpha|^2|\beta|^2 = |\alpha\beta|^2 \tag{2.2}$$

が成り立つ．この式 (2.2) を絶対値の条件とよぶ．

Cauchy-Lagrange の恒等式はこの条件からすぐに導かれることが，『数の世界』で示されている．

(1.1) の証明は難しくないので，この 2 節では (1.2) と (1.3) の四元数による証明を示す．特に (1.2) は四元数を用いては証明できないと私は思っていた．

以下では一般にラテン文字は実数を表し，ギリシャ文字は四元数を表すことにする．

まず Cauchy-Lagrange の恒等式 (1.2) を証明しよう．

実部を含まない，虚部だけの二つの四元数 $\alpha = ai + bj + ck$ と $\beta = xi + yj + dk$ との積をつくると

$$\alpha\beta = (ai + bj + ck)(xi + yj + zk) = -(ax + by + cz) + (bz - cy)i + (cx - az)j + (ay - bx)k \tag{2.3}$$

となる．

$$|\alpha\beta|^2 = (ax + by + cz)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2 \tag{2.4}$$
$$|\alpha|^2 = a^2 + b^2 + c^2 \tag{2.5}$$
$$|\beta|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{2.6}$$

であるから，(2.2) を用いれば，直ちに

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 \tag{1.2}$$

が得られる．すなわち Cauchy-Lagrange の恒等式 (1.2) が証明された．

つづいて，Cauchy-Lagrange の恒等式 (1.3) を証明しよう．

Cauchy-Lagrage の恒等式 (1.2) の証明と関係づけられるような記号を用いたい．そのために

$$\gamma = d + \alpha = d + ai + bj + ck \tag{2.7}$$
$$\delta = w + \beta = w + xi + yj + zk \tag{2.8}$$

---

*5 絶対値の法則とは聞きなれない用語だと思う．これは後に出てくる (2.1) のことである．

*6 もっとも絶対値の法則が成り立つのは，実数，複素数，四元数，八元数に限られていることが知られている．

とおこう．積 $\gamma\delta$ の中に現れる積 $\alpha\beta$ は (2.3) を使うことができる．

さて，$\gamma$ と $\delta$ との積 $\gamma\delta$ は

$$\begin{aligned}\gamma\delta &= (d+\alpha)(w+\beta)\\ &= dw + d\beta + w\alpha + \alpha\beta\\ &= (dw-ax-by-cz)+(aw+dx-cy+bz)i+(bw+cx+dy-az)j+(cw-bx+ay+dz)k \end{aligned} \tag{2.9}$$

と求められる．いま

$$\gamma\bar{\delta} = (d+ai+bj+ck)(w-xi-yj-zk) \tag{2.10}$$

は $\gamma\delta$ の積 (2.9) で

$$\begin{aligned} x &\to -x\\ y &\to -y\\ z &\to -z \end{aligned}$$

とおきかえれば，

$$\gamma\bar{\delta} = (dw+ax+by+cz)+(aw-dx+cy-bz)i+(bw-cx-dy+az)j+(cw+bx-ay-dz)k \tag{2.11}$$

と求められる．

$|\gamma\bar{\delta}|^2 = |\gamma|^2|\delta|^2$ であるから，この等式を用いて Cauchy-Lagrange の恒等式 (1.3) を証明できる．

まず

$$|\gamma\bar{\delta}|^2 = (dw+ax+by+cz)^2+(aw-dx+cy-bz)^2+(bw-cx-dy+az)^2+(cw+bx-ay-dz)^2 \tag{2.12}$$

が得られる．

また，$|\gamma|^2$ と $|\delta|^2$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}|\gamma|^2 &= |d+\alpha|^2\\ &= d^2+|\alpha|^2\\ &= d^2+a^2+b^2+c^2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}|\delta|^2 &= |w+\beta|^2\\ &= w^2+|\beta|^2\\ &= w^2+x^2+y^2+z^2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

である．

(2.12),(2.13),(2.14) から，$|\gamma\bar{\delta}|^2 = |\gamma|^2|\delta|^2$ を用いれば，

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) &= (dw+ax+by+cz)^2+(aw-dx+cy-bz)^2\\ &\quad +(bw-cx-dy+az)^2+(cw+bx-ay-dz)^2\\ &= (dw+ax+by+cz)^2+(aw-dx)^2+(cy-bz)^2\\ &\quad +(bw-dy)^2+(az-cx)^2+(cw-dz)^2+(bx-ay)^2\\ &\quad +2[(aw-dx)(cy-bz)+(bw-dy)(az-cx)+(cw-dz)(bx-ay)]\\ &= (dw+ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2\\ &\quad +(aw-dx)^2+(bz-cy)^2+(bw-dy)^2+(cw-dz)^2 \end{aligned} \tag{2.15}$$

が得られる[*7]．これから確かに (2.15)，すなわち，(1.3) が成り立つことがわかる．

[*7] (2.15) の交差項 (cross terms) の和が 0 となること，すなわち，$(aw-dx)(cy-bz)+(bw-dy)(az-cx)+(cw-dz)(bx-ay)=0$ であることを用いた．この計算は付録 2 に示す．

## 3　おわりに

Cauchy-Lagrange の恒等式 (1.2) を実部のない 4 元数によって証明できることを示した．また，この Cauchy-Lagrange の恒等式 (1.2) を用いて，Cauchy-Lagrange の恒等式 (1.3) を証明した．これらは『数の世界』 [3] から学んだことである．実は『四元数』 [4] にも [3] とほぼ同じ内容の証明が述べられていたが，かなり記号的な記述であったために，その真意をつかんでいなかったことにようやく気がついた．

脚注 3 でも述べたが， [5] の p.26 には (2.3) と同じ式を書き下していた．しかし，先入観が強かったために，これから Cauchy-Lagrange の恒等式 (1.2) が四元数を用いて証明できると気がつかなかった．これが証明できると知ったのは [3] を読んだからである．

## 4　付録

### 4.1　付録 1　項 $(a_ix_j - a_jx_i)^2$ の数字 $(i,j)$ の組

まず再度 (1.4) を書いておこう．

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 + \sum_{1\le i<j\le n}^{n} (a_ix_j - a_jx_i)^2 \tag{1.4}$$

(1.4）の最後の項 $\sum_{1\le i<j\le n}^{n}(a_ix_j - a_jx_i)^2$ の中における添字 $(i,j)$ の数字の組がどうなるか．

例として $n = 4$ のときの (1.4) の最後の項の数字の組 $(i,j)$ をあげておく．それらは

$$\begin{aligned} &(1,2),(1,3),(1,4);\\ &(2,3),(2,4);\\ &(3,4) \end{aligned} \tag{4.1}$$

の 6 個の組である．一般の $n$ の場合にも同じように ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2!}$ 個の添字の組をとればよい．

いま $a_ix_j - a_jx_i$ を行列式を用いて

$$a_ix_j - a_jx_i = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ x_i & x_j \end{vmatrix} \tag{4.2}$$

と表せば，$(a_ix_j - a_jx_i)$ の組は $n = 4$ の場合には

$$\begin{array}{lll} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ x_1 & x_4 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ x_2 & x_4 \end{vmatrix}, & \\ \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix}, & & \end{array}$$

の 6 つとなる．

この数式の構造は添字つきの文字で表されてないときにはわかりにくい．このエッセイではわざと添字つきの文字を使わなかった．そのために (1.3) の数学的の構造がわかりにくくなった．

### 4.2　付録 2　交差項の計算

この付録では (2.15) の交差 (クロス) 項が 0 となることを示す．

まず3つの部分に分けて計算をする．

$$(aw-,dx)(cy-bz) = acwy - abwz - cdxy + bdxz \tag{4.3}$$
$$(bw-dy)(az-cx) = abwz - bcwx - adyz + cdxy \tag{4.4}$$
$$(cw-dz)(bx-ay) = bcwx - acwy - bdxz + adyz \tag{4.5}$$

であるから

$$\begin{aligned}
&(aw-dx)(cy-bz) + (bw-dy)(az-cx) + (cw-dz)(bx-ay) \\
&= (ac-ac)wy + (ab-ab)wz + (bc-bc)wx + (cd-cd)xy + (bd-bd)xz + (ad-ad)yz \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.6}$$

## 4.3 付録 3 Cauchy-Lagrage の恒等式の数学的帰納法による証明

この証明はすでに [7] で示されたものである．

一般の Cauchy-Lagrage の恒等式の $n=2$ にあたる (1.1) の証明からはじめよう．

この (1.1) の証明はそのまま左辺を計算して，右辺を導くことも簡単にできる．だが，ここでは絶対値の法則 $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ を用いる方法を示す．

いま $\alpha, \beta$ を複素数として，

$$\alpha = a + bi, \quad \beta = x + yi$$

としよう．ここで $a, b, x, y$ はすべて実数である．

いま

$$\alpha\beta = (a+bi)(x+yi) = (ax-by) + (bx+ay)i$$

から，

$$\begin{aligned}
|\alpha\beta|^2 &= (ax-by)^2 + (bx+ay)^2 \\
|\alpha|^2 &= a^2 + b^2 \\
|\beta|^2 &= x^2 + y^2
\end{aligned}$$

となるので，

$$|\alpha\beta|^2 = |\alpha|^2|\beta|^2$$

を用いて

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax-by)^2 + (bx+ay)^2$$

が得られる．しかし，これを (1.1) と比べるとちょっとちがう．よく見ると

$$y \to -y$$

とおきかえたら，(1.1) となることがわかる．しかし，このおきかえはどういう意味をもっているのだろうか．

はじめに $\beta = x + yi$ ととったが，その代わりに複素共役の $\bar{\beta} = x - yi$ をとれば，よいことがわかる．このとき絶対値の法則は

$$|\alpha\bar{\beta}| = |\alpha||\bar{\beta}|$$

となる．これを2乗すれば，

$$|\alpha\bar{\beta}|^2 = |\alpha|^2|\bar{\beta}|^2 = |\alpha|^2|\beta|^2$$

となる．ここで，$|\bar{\beta}| = |\beta|$ であることを用いた．

そうすると

$$\alpha\bar{\beta} = (a+bi)(x-yi) = (ax+by)+(bx-ay)i$$

であるから

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

と (1.1) が求められる．これで (1.4) において $n=2$ とおいたときの恒等式が成り立つことがわかった．

つぎに，$n=k-1$ のときに，(1.4) が成り立つと仮定して，$n=k$ のときに (1.4) が成り立つことを示そう．そのために

$$\begin{aligned}
a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \\
x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n &= \sum_{i=1}^{n} a_ix_i \\
\sum_{1\le i<j\le n}^{n}(a_ix_j-a_jx_i)^2 &= \sum_{i<j}^{n}(a_ix_j-a_jx_i)^2
\end{aligned}$$

と表し，これらの記号を用いて (1.4) を証明するには (1.4) そのものではなく

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} a_ix_i)^2 = \sum_{i<j}^{n}(a_ix_j-a_jx_i)^2$$

を証明する．

それには $n=k-1$ のときの

$$(\sum_{i=1}^{k-1} a_i^2)(\sum_{i=1}^{k-1} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{k-1} a_ix_i)^2 = \sum_{i<j}^{k-1}(a_ix_j-a_jx_i)^2$$

を仮定して，$n=k$ のときに (1.4) が成り立つことを示せばよい．これを $P$ とおけば，

$$\begin{aligned}
P &= (\sum_{i=1}^{k-1} a_i^2+a_k^2)(\sum_{i=1}^{k-1} x_i^2+x_k^2) - (\sum_{i=1}^{k-1} a_ix_i+a_kx_k)^2 \\
&= \underline{(\sum_{i=1}^{k-1} a_i^2)(\sum_{i=1}^{k-1} x_i^2)} + a_k^2\sum_{i=1}^{k-1} x_i^2 + x_k^2\sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 + a_k^2x_k^2 \\
&\quad \underline{-(\sum_{i=1}^{k-1} a_ix_i)^2} - 2a_kx_k\sum_{i=1}^{k-1} a_ix_i - a_k^2x_k^2
\end{aligned}$$

仮定により下線部は

$$\sum_{i<j}^{k-1}(a_ix_j-a_jx_i)^2$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{i<j}^{k-1}(a_ix_j - a_jx_i)^2 + \sum_{i=1}^{k-1}(a_k^2x_i^2 - 2a_kx_ka_ix_i + a_i^2x_k^2) \\
&= \sum_{i<j}^{k-1}(a_ix_j - a_jx_i)^2 + \sum_{i=1}^{k-1}(a_ix_k - a_kx_i)^2 \\
&= \sum_{i<j}^{k}(a_ix_j - a_jx_i)^2
\end{aligned}
$$

が得られる．したがって (1.4) が $n = k$ のときに証明された．

以上で、(1.4) が数学的帰納法で証明されたことになる．

(2021.9.6)(2022.3.12 改訂)

## 参考文献


[1] 矢野　忠，四元数に近づく，数学・物理通信，1 巻 9 号 (2011.9) 18-23
(『四元数の発見』(海鳴社，2014）に所収)

[2] 矢野　忠，四元数と Euler の恒等式，数学・物理通信，8 巻 6 号 (2018.9) 21-28

[3] 松岡　学，『数の世界』(講談社，2020) 151-156

[4] 今野紀雄，『四元数』(森北出版，2016）99-100

[5] 矢野　忠，『四元数の発見』(海鳴社，2014）26

[6] 矢野　忠，『四元数の発見』(海鳴社，2014）

[7] 矢野　忠，Lagrange の恒等式，研究と実践（愛数協）第 50 号 (1994.6) 9-12
(『数学散歩』(国土社，2005）に所収）

# ライプニッツが導いた級数の和

矢野　忠[*1]

# Sum of Series Derived by Leibnitz

Tadashi YANO[*2]

## 1　はじめに

今年 (2022 年）の正月に，その前の年末にインターネットで購入した『微分積分学 21 講』 [1] を読んでいたら，微分積分学をつくった，ライプニッツが見出したいくつかの級数の和についての記述があった．興味深かったので，ここで補足を交えて述べてみよう．

## 2　ホイヘンスの出した問題

ライプニッツ[*3]は，1672 年 3 月から 1676 年 10 月までのパリ滞在中に知り合った先学のホイヘンスからホイヘンス自身がすでに解いていた三角数の逆数の和の問題を出された．それは三角数 $1, 3, 6, 10, \cdots, \frac{1}{2}n(n+1), \cdots$ の逆数の和を求める問題であった．

すなわち，

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)} \tag{2.1}$$

の和を求めよという問題である．

まず，ライプニッツの解き方を見る前に，現在の私たちならどう解くかを考えてみよう．いまの高校生なら

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \tag{2.2}$$

と部分分数に分解すれば，

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)} \\ &= 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \\ &= 2\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\right] \\ &= 2\left(1-\frac{1}{m+1}\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

ここに求められた $S_m$ で $m\to\infty$ としたときの和を $S$ と表すと $S=2$ と和が求められる．

さて，17 世紀の天才ライプニッツはどのようにこの問題を解いたか．見てみよう．長さ 1 の線分の区間 $[0,1]$ に $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ という点をとる．細かく分割された区間 $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot 2}$, つぎは $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot 3}$, そのつぎは $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3\cdot 4}, \cdots$

[*1] 元愛媛大学工学部

[*2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[*3] 物理学者・太田浩一さんによれば，ライプニッツという発音は正しくなくライブニッツが正しいというが，友人のドイツ人 R 氏に聞いてみたところでは両方の発音があるとのことであった．

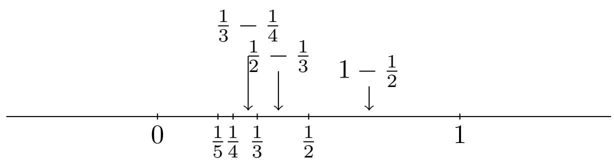


図 1　$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$ が線分 $\overline{01}$ 間の長さ

となる．したがって，図の線分で

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots=1 \tag{2.4}$$

となることがわかる．

すなわち，

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1 \tag{2.5}$$

が求まる．なかなか鮮やかな解法である．もちろん，この結果から (2.1) の和 $S$ は $S=2$ である．これは (2.3) からの得られる和の値と一致している．

## 3　他の無限級数の和

上に述べたように三角数の逆数の和はこうやって解けたのだが，他にも無限級数の和を求めた．

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{1}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{3}$$

またこれらを一般化した無限級数の和を

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\cdots=\frac{1}{n-1} \tag{3.1}$$

などを導いたという．

中村さんの著書 [2] には，(3.1) の和の求め方については書かれていない．現在の高校生ならこれらの和はすぐに求められると思われるが，それをここでちょっと考えてみよう．

$$S_m:=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n^{m-1}} \tag{3.2}$$

とおく．このとき $S_m$ は初項 1, 公比 $1/n$ の等比級数であるから，この和を求めることができて

$$S_m=\frac{1-\left(\frac{1}{n}\right)^m}{1-\frac{1}{n}} \tag{3.3}$$

となる．$n>1$ の自然数とすれば，$\frac{1}{n}<1$ である．したがって，$S_m$ は $m\to\infty$ としたとき和 $S$ をもつので，

$$S:=\lim_{m\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{n}\right)^m}{1-\frac{1}{n}}=\frac{n}{n-1} \tag{3.4}$$

が求まる．

元の問題の級数の和 $R$ は

$$R := \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \cdots = \frac{1}{n-1} \tag{3.5}$$

であったから

$$R = S - 1 = \frac{n}{n-1} - 1 = \frac{1}{n-1} \tag{3.6}$$

と求まる．

# 4 グレゴリーとライプニッツの級数

ライプニッツはさらに歩を進めて

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots \tag{4.1}$$

を求めることができたという．これはグレゴリーとライプニッツの公式と呼ばれている．

一松先生の著書 [3] にはその導出が説明されている．以下引用をしておく[*4]．

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \cdots \tag{4.2}$$

の和を求める．定理 7.4 により，この級数は収束する．次節例 3 で示すように

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan x \tag{4.3}$$

であり，$x \to 1-0$ のとき $\frac{\pi}{4}$ に収束するから，

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \cdots = \frac{\pi}{4} \tag{4.4}$$

となる．

もっとも (4.1) を出すだけなら，つぎのように直接示すことができる．等比級数の公式から

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} \tag{4.5}$$

であるから，これを積分して

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \cdots + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{1+x^2} dx \\ &= [\arctan x]_0^1 \\ &= \arctan 1\end{aligned} \tag{4.6}$$

積分の部分を評価すると $0 < x < 1$ では

$$0 < \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx < \int_0^1 x^{2n+2} dx \tag{4.7}$$

が成り立つ．

したがって，$n \to \infty$ のときに

$$\int_0^1 x^{2n+2} dx = \left[ \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right] = \frac{1}{2n+3} \to 0 \tag{4.8}$$

となるので，(4.1) が求められる．

---

[*4] 引用にあたって，式の番号はこのエッセイに独自につけたので，その点のご了解をお願いする．

この右辺の級数を根気よく，計算すれば，円周率 $\pi$ の値が求まるはずだが，現在ではこの級数の $\pi$ の値の収束がおそくて使い物にはならないこともよく知られている [4].

## 5　おわりに

ライプニッツが導いたといわれるいくつかの級数の和の求め方を紹介した．これ以外にもライプニッツの求めた級数の和があるのかもしれないが，すくなくともよく知られたものをここで紹介した．最後の級数の和は『解析概論』 [5] ではフーリエ級数の計算から求める方法も紹介されている．

(2022.1.18)

## 参考文献


[1] 中村滋，『微分積分学 21 講』（東京図書，2008）125-126

[2] 中村滋，『微分積分学 21 講』（東京図書，2008）126

[3] 一松信，『解析序説』 上（新版）（裳華房，1981） 190-191

[4] ハイラー，ヴァンナー（蟹江幸弘訳）『解析教程』（シュプリンガー・ジャパン，1997） 62

[5] 高木貞治，『解析概論』 改訂第 3 版（岩波書店，1983）281-282

## 編集後記

つい先ほど年が変わったと思ったが，すでに 3 月 10 日である．それも 3 月になったのにしばらくは「数学・物理通信」を発行する月だと思わないでいた．2 月から 3 月へ月が替わったのは意識していたが,「数学・物理通信」の発行は先のことのような気がしていた．

おかしな話だが，一方で 3 月になったら「数学・物理通信」を発行しなくてはならないという意識はあったのだが，3 月になったので，その編集をはじめなくてはいけないという意識には 3 月に入っても数日はなかった．それも世戸さんから，3 月を前にして原稿の投稿をいただいたのに．

こういうことだから，編集者（矢野）はすでに認知症になっているのではないかという疑いを読者の方々がもたれても不思議ではない．

そういうあやしげの編集者であるが，仕事ができる限り「数学・物理通信」の発行は続けていくつもりである．それには読者と投稿者の方々のご支援がなければならない．

今号は谷村さんから，彼が，読まれた，または，書かれた量子力学の本とかその他の本についてのご寄稿をいただいた．読んで興味深いのはもちろんであるが，なかなか真摯に物理と向き合って来られたことがわかった．

谷村さんの文を読んで，朝日新聞に宇宙物理学者の須藤靖さんの書評が載ったので，読んだ大栗博司さんの『探求する精神』（幻冬舎）を思い出した．谷村さんはまだ大栗さんの本を読まれていないそうだが，大栗さんの本を読者の方々もまだの方は読まれることをお勧めする．大栗さんはこの「数学・物理通信」をお送りしているお一人である。

世戸憲治さんの懸垂線の論文はすでに 12 月に投稿をいただいていた．そのままになっていたのを今回ようやく読んだ．

世戸さんが以前に編集後記で書かれていたように，World Scientific から中西先生と共著の物理数学の本が出版されるそうだから，それも楽しみにしたい．

末尾になったが，今回も編集委員の世戸憲治さんの綿密な校正のお世話になった．記して感謝を一言だが，申し述べたい．

（矢野　忠）