

数学・物理通信

12 卷 3 号 2022 年 6 月

編集 新関章三・世戸憲治・矢野 忠

2022 年 6 月 8 日

目次 (Contents)

1. ご冗談でしょう，湯川先生 —故湯川先生を偲んで—	中西 襄	2
2. ばねの質量を考慮したばね振子	世戸 憲治	5
2. 一般二項定理の発見	矢野 忠	16
3. 編集後記	矢野 忠	27
1. Surely You're Joking, Professor Yukawa ! —In Memory of the Late Professor Yukawa—	Noburu NAKANISHI	2
2. Analysis of Spring Pendulum without Neglecting Spring Mass	Kenji SETO	5
2. Discovery of Generalized Binomial Theorem	Tadashi YANO	16
3. Editorial Comments	Tadashi YANO	27

ご冗談でしょう，湯川先生

—故湯川先生を偲んで—

Surely You're Joking, Professor Yukawa!

—In Memory of the Late Professor Yukawa—

中西 襄*

Noburu NAKANISHI

1 はじめに

湯川秀樹先生が亡くなられてもう 40 年以上になる。湯川研究室の筆者の先輩の方々も多くは亡くなり、先生の面影を直接知る者も少なくなった。

湯川先生のトレードマークと言っては失礼だが、あのツルツルした血色の良い若禿であろう。それに対し、小顔で毛髪がフサフサの朝永振一郎先生は対照的であった。

[朝永先生の逸話]

先生のエピソードと言えばつぎの小咄（ソースは亀渕氏）が有名である（ご存知の方は読み飛ばして、つぎの「ブラックホール」へどうぞ.）.

朝永先生は若いときドイツに留学された。ご承知のとおり、ドイツはかなり高緯度のところにあり、冬は寒く暗い。そのため暖房費節約の関係で窓も小さくできている。さて、若き朝永さん、まず住むところを探そうとアパートの管理人に部屋を案内してもらった。部屋に入るなり、朝永さん、思わず「暗いなー」と言った。そうしたらすぐに、もっと小さな部屋に案内された。

ここで大笑いする人は、ドイツ語に堪能な方だ。ここでキョトンしている方のために蛇足を付けると、ドイツ語の「小さい」は“klein”であり、その比較級は er が付いて“kleiner”（クライナー）となる。

2 ブラックホール

今日では「ブラックホール」という言葉を知らない人はいないであろう。ブラックホールが日本で有名になったきっかけは、筆者の友人の J.G.Taylor 氏の著書の和訳が、講談社のブルーバックスの 1 つとして刊行されたのがベストセラーになったことである。その後、SF アニメにさかんに用いられるようになった。

* これは「数学・物理通信」1 巻 9 号の同題記事の続きである。

ブラックホールはアインシュタインの重力理論が予言するもので、いかなる他の斥力によっても強大な重力を支えきれずに、時空に穴があいたような状態になったものである。最近、ブラックホールを観測したという映像が公開されたが、本当に「黒い穴」だ。これは脱出速度が光速度を越えるので光さえ出なくなり黒体のように見えるのである。したがってブラックホールはその存在のすべての情報を失うが、3つの例外がある。それは電荷、質量、角運動量である。ホイーラーは「ブラックホールは3本の毛がある」というキャッチフレーズで表している。ついでながら、なぜか昔から禿げた頭に残る毛の数は3本が主流である。マンガの「オバQ」も3本の毛があった。

[ここで CM]

電荷はクーロン力の源、質量は重力（万有引力）の源である。これらは量子論の立場から、やはり、量子で伝えられなければならない。その量子がなぜブラックホールを脱出できるかを、きちんと説明できるのは不定計量の場の量子論しかない。とくに、重力子については量子アインシュタイン重力しかないと思われる。量子アインシュタイン重力によればこれらの保存量をソースとする透隔力が存在しなければならない。とくに、第3の角運動量については、最近、筆者は吉田律氏との共著論文でその存在を予言したが、カー（Kerr）ブラックホール連星系の合体で観測されることを期待している。

湯川先生が京大基礎物理学研究所（基研）の所長だったころ、3階大講堂で講演会があり、講演者はブラックホールというとんでもない天体について雄弁に説明していた。この話がちょうど佳境に入ったときに、とつぜん、講義室前方の扉が開いて、湯川先生がニコニコしながら入ってこられたのである。聴衆はどっといっせいに大笑いした。まったくベストタイミングであった。もちろん、湯川先生はオバQのようなあの3本の毛はない。念のため。

3 ひげ

湯川先生は、晩年、あごのまわりにひげを生やされた。病の床にふせることが多いことから面倒になったのか、それとも単に、かっこ良いと思われたのかその辺のところはよく知らない。

ひげは昔から権威づけに利用された。古代エジプトのファラオのあごひげは付けひげだが、王の象徴だった。あまりに長いひげは働くときにじゃまだから、昔は働かないでも食べていける人、すなわち、身分の高い人ということになったのではないか。近世の欧米では、顔のまわりのひげは普通のことだ。リンカーンのひげの話は有名だが、現代ではひげはあまり流行らない。戦後のアメリカの大統領を思い浮かべてみてもひげ面は1人もいなかった。

小顔の朝永先生ならいざ知らず、湯川先生のお顔にはひげはあまりマッチしなかったように思う。

4 湯川博士の胸像

湯川先生が亡くなられてからしばらくして、先生の胸像が基研（湯川記念館）の前に置かれた。制作したのは有名な彫刻家ということだったが、その除幕式に参加して、驚いた。まったく本人と似ていないのである。他の湯川研の人たちに聞いても異口同音に「似ていない」であった。除幕式のあとの講演者になった長谷川氏曰く、「似ているところがどこかないか一生懸命に捜しました。その結果、うなじの曲線だけが確かに湯川先生のものでした。」ということであった。

その後、たまたまバスツアーでやってきた女子学生の一団を見かけた。ガイドさんは「湯川博士の胸像」と称するものの前で説明し、学生たちはカメラでカシャカシャパチパチやっていた。しかし、誰一人として胸像の後ろにまわって、うなじを撮った人はいなかった。

あの胸像は今でも「湯川博士の胸像」を名乗っているのかな？

5 おわりに

日本人のノーベル賞受賞者の数はもう 20 人を超えたようだ。湯川先生の名前もこの中に埋もれてしまったかと思ったが、さにあらず、日本最初の受賞者として、学校の教科書にも載り、物理に興味ない最近の若い人にもよく知られた存在になっているらしい。そのうちに、紙幣の顔になるかもと期待されるが、毛髪が少ない人の肖像は偽造がし易いから採用されないのだという説もある。しかし、おひげがあるじゃん。

[謝辞] 病いの床で手書きした極めて読みにくい原稿の TeX 入力をしていただいた世戸憲治氏に感謝の意を表す。

ばねの質量を考慮したばね振り子

世戸 憲治*

Analysis of Spring Pendulum without Neglecting Spring Mass

Kenji SETO*

1 はじめに

これまで、「錘付き弦振動の問題 (1)~(4)」(「数学・物理通信」11 巻 1 号~11 巻 4 号) というタイトルで 4 編の論文を書いてきたが、今回はこの応用として、「ばねの質量を考慮したばね振り子」を扱ってみる。ここで「ばね振り子」とは、ばねの一端を固定し、他端に錘を付け、重力下で錘をばねの長さ方向、つまり上下方向に振動させたものを言う。物理で「ばね」と言えば、質量は無視するものと決まっている。しかし、現実に質量ゼロのばねなどというものは存在しないし、実際にばねを使った実験をしてみると、ばね自身の振動が無視できないときがある。今回は、ばねの質量を考慮した「ばね振り子」を解析してみる。この解析は、前論文と、縦波と横波の違いはあるが、数学的には重複する部分もあり、今回のものは重力を考慮することで、非同次の微分方程式となるので、それなりの面白さも含まれる。

2 方程式の導入とその解法

2.1 方程式の導入

自然長 l , ばね定数 k のばねがあるものとする。このばねと同じもので自然長を 2 倍にしたばねを作ると、そのばねのばね定数は半分になる。逆に、自然長を半分にしたばねのばね定数は 2 倍になる。このようにばねの自然長とばね定数は反比例の関係にある。いまこのばねの長さ dx の部分だけを考えたとその部分のばね定数は、 $(l/dx)k$ となる。

図 1 に示すように、このばねに沿って上向きに座標 x 軸をとり、 $x = 0$ の端に質量 m の錘を付け、他端の $x = l$ を固定端とする。ただし、初めは重力のことは考えずに、ばねは自然長のままとする。また実際に振動が起こったときの、座標 x , 時刻 t におけるばねの x 方向変位を $U(x, t)$ とする。

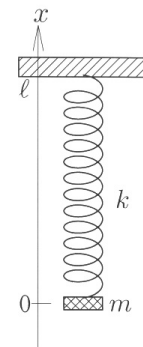


図 1 ばね振り子

このとき、 dx を微小長さとして、このばねの区間 $(x, x + dx)$ の部分を考える。この部分のばね定数は $(l/dx)k$ で、伸びは $U(x + dx, t) - U(x, t)$ なので、この部分を引っ張る力 $T(x)$ は、 $T(x) = (l/dx)k[U(x + dx, t) - U(x, t)]$ となる。これは $dx \rightarrow 0$ の極限で、 $T(x) = kl \partial U(x, t) / \partial x$ となる。さらに、このばねの運動方程式を作る

* 北海学園大学名誉教授

ため、区間 $(x, x + \Delta x)$ のばね部分を考える。この間のばねの質量は、ばねの線密度を ρ_0 として、 $\Delta x \rho_0$ であり、これに加速度を掛けたものが、この区間の両端から引っ張られる力となるので、

$$\Delta x \rho_0 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = k\ell \left[\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \Big|_x \right] \quad (2.1)$$

となる。ここまでは、重力を考慮していないが、これを考慮した場合は、重力加速度を g として、

$$\Delta x \rho_0 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = k\ell \left[\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \Big|_x \right] - \Delta x \rho_0 g \quad (2.2)$$

となる。ただし、重力は図 1 の下向き方向に作用するものとする。これは $\Delta x \rightarrow 0$ の極限で、

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = k\ell \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} - \rho_0 g \quad (2.3)$$

となる。同様に、質量 m の錘の部分を考えて、その方程式は、

$$m \frac{\partial^2 U(0, t)}{\partial t^2} = k\ell \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=+0} - mg \quad (2.4)$$

として得られる。ただし、ここでは錘の大きさは無視できるものとして扱うことにする。

これら 2 本の方程式 (2.3) (2.4) をまとめて扱うために、密度関数 $\rho(x)$ を、デルタ関数 $\delta(x)$ を用いて、

$$\rho(x) = m\delta(x) + \rho_0 \quad (2.5)$$

と定義する。この密度関数を用いるとこれら 2 本の方程式はまとめて

$$\rho(x) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = k\ell \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} - \rho(x)g \quad (2.6)$$

と書き直すこともできる。実際、この (2.6) 式を、錘を含むように x について -0 から $+0$ まで積分したとき、錘より負の側には、ばねは存在しないので、 $\partial U/\partial x|_{x=-0}$ はゼロと考えると、(2.6) 式から (2.4) 式が導かれる。

これら方程式を境界条件である

$$U(\ell, t) = 0 \quad (2.7)$$

の下に解くことになる。

2.2 静的な解

時間が入った方程式を解く前に、時間に依存しない静的な解を求めておこう。このときの変位を時間無しの $U_0(x)$ と書くことにして、(2.3) (2.4) 式は

$$k\ell \frac{d^2 U_0(x)}{dx^2} - \rho_0 g = 0, \quad k\ell \frac{dU_0(x)}{dx} \Big|_{x=+0} - mg = 0 \quad (2.8)$$

となる。これに境界条件である (2.7) 式を付加したときの解は

$$U_0(x) = \frac{\alpha^2 g}{2} (x^2 - \ell^2) + \beta g (x - \ell) \quad (2.9)$$

と得られる。ここに、 α は速度の逆数、 β は加速度の逆数の次元を持つ量で、それぞれ、

$$\alpha = \sqrt{\frac{\rho_0}{k\ell}}, \quad \beta = \frac{m}{k\ell} \quad (2.10)$$

と定義する。

2.3 動的な解

変位 $U(x, t)$ から静的な解 $U_0(x)$ を引いたものを $V(x, t)$, すなわち,

$$V(x, t) = U(x, t) - U_0(x) \quad (2.11)$$

とおくことにすると, この $V(x, t)$ は, (2.3) (2.4) 式に替わって, 同次方程式

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.12)$$

および,

$$\beta \frac{\partial^2 V(0, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=+0} \quad (2.13)$$

を満たすことになる. これら方程式を境界条件

$$V(\ell, t) = 0 \quad (2.14)$$

の下に解くことになる. ここで, $V(x, t)$ は変数分離形で解けるものとし, 時間部分については, 適当な角振動数 ω を用いた三角関数で,

$$V(x, t) = X(x) [\sin(\omega t) \quad \text{or} \quad \cos(\omega t)] \quad (2.15)$$

と書けるものとする. この変数分離で, (2.12) (2.13) 式は

$$-(\alpha\omega)^2 X(x) = \frac{d^2 X(x)}{dx^2}, \quad -\beta\omega^2 X(0) = \frac{dX(x)}{dx} \Big|_{x=+0} \quad (2.16)$$

となる. この第1式から X は三角関数となるので, A, B を任意定数として,

$$X(x) = A \sin(\alpha\omega x) + B \cos(\alpha\omega x) \quad (2.17)$$

と書ける. また, この式を (2.16) の第2式に代入し,

$$-\beta\omega B = \alpha A \quad (2.18)$$

となる. もう一つの条件である (2.14) 式を満たすには, $X(\ell) = 0$ でなければならないので, (2.17) 式から,

$$A \sin(\alpha\omega\ell) + B \cos(\alpha\omega\ell) = 0 \quad (2.19)$$

となる. 以下, この式が成立するように, 係数 A, B を

$$A = \cos(\alpha\omega\ell), \quad B = -\sin(\alpha\omega\ell) \quad (2.20)$$

と選ぶことにし¹⁾, (2.17) 式の $X(x)$ を

$$X(x) = \cos(\alpha\omega\ell) \sin(\alpha\omega x) - \sin(\alpha\omega\ell) \cos(\alpha\omega x) = \sin[\alpha\omega(x - \ell)] \quad (2.21)$$

¹⁾ $V(x, t)$ および, $X(x)$ は長さの次元を持つ量である, したがって, ここでの係数 A, B も本来は, 長さの次元を持つ量である. しかしながら, $X(x)$ は同次線形の方程式を満たしているため, ここでは無次元量として扱い, 初期条件を与えるときに長さの次元を持つ係数を $X(x)$ に掛けて扱うことにする.

と書くことにする。また、この (2.20) 式の A, B を (2.18) 式に代入すると

$$\beta\omega \tan(\alpha\omega\ell) = \alpha \quad (2.22)$$

となる。この式から固有値としての角振動数 ω がとびとびに決まる。これを正の小さい方から ω_i , ($i = 1, 2, \dots$) とする。また、このときの関数 (2.21) 式を $X(x, \omega_i)$ と ω_i 依存性を明示して固有関数とする。なお、この固有値方程式は「錘付き弦振動の問題 (1)」で得たものと本質的に同じである。

2.4 固有関数の正規化

2 個の固有値を ω_i, ω_j , 対応する固有関数を $X(x, \omega_i), X(x, \omega_j)$ として、(2.5) 式の密度関数 $\rho(x)$ を重みとする積分

$$\int_{-0}^{\ell} \rho(x) X(x, \omega_i) X(x, \omega_j) dx \quad (2.23)$$

を考える。ここで、積分の下限を -0 としたのは錘の部分を含ませるためである。これに (2.21) 式で定義される固有関数を代入し積分していく。初めに、 $\rho(x)$ に含まれるデルタ関数の部分と残りの部分に分ける。デルタ関数の部分はすぐに積分でき、残りの部分は三角関数の積和公式を使い、積を和の形にしてから積分し、その結果に三角関数の加法定理を用いて再び積の形にする。この結果に、固有値方程式である (2.22) 式を用いて cosine を sine で表すようにする。多少長い計算になるが、結果として固有関数の直交性、

$$\int_{-0}^{\ell} \rho(x) X(x, \omega_i) X(x, \omega_j) dx = N_i^2 \delta_{i,j} \quad (2.24)$$

を得る。ここに、正規化定数 N_i^2 は

$$N_i^2 = \frac{1}{2} [\rho_0 \ell + m \sin^2(\alpha\omega_i \ell)] \quad (2.25)$$

と定義する。この結果から $X(x, \omega_i)/N_i$ が正規化された固有関数となる。

2.5 初期値問題：モデル 1

(2.11) 式で定義した関数 $V(x, t)$ の一般解は固有関数 $X(x, \omega_i)$ に時間部分の $\sin(\omega_i t)$ または $\cos(\omega_i t)$ を掛け、 i 番号について重ね合わせたものになる。これを用いて、ここでは、変位 $U(x, t)$ を

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i X(x, \omega_i) \cos(\omega_i t) + U_0(x) \quad (2.26)$$

と展開しておく。ここで初期条件として、初め、ばねが自然長になるように、ばねと錘を手で押さえておき、時刻 $t = 0$ の瞬間に押さえる手を静かに離れたとき、ばねと錘がどのように振動するかを解析してみる。このときの条件式は

$$U(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (2.27)$$

となる。(2.26) 式の変位 $U(x, t)$ はこの第 2 式の条件をすでに満たしているの、第 1 式の条件を適用すると、

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i X(x, \omega_i) = -U_0(x) \quad (2.28)$$

となる。この両辺に $\rho(x)X(x, \omega_j)$ を掛け、 x で積分すると固有関数の直交性 (2.24) 式が使え、係数 C_i が、

$$C_i = -\frac{1}{N_i^2} \int_{-0}^{\ell} \rho(x)X(x, \omega_i)U_0(x)dx \quad (2.29)$$

と決まる。これを (2.26) 式に戻して、変位 $U(x, t)$ が

$$U(x, t) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i^2} \left[\int_{-0}^{\ell} \rho(x')X(x', \omega_i)U_0(x')dx' \right] X(x, \omega_i) \cos(\omega_i t) + U_0(x) \quad (2.30)$$

と求められる。この式に含まれる積分の部分は、(2.9) 式の $U_0(x)$ を用いて実行可能で、長い式になるが、

$$\begin{aligned} & \int_{-0}^{\ell} \rho(x)X(x, \omega_i)U_0(x)dx \\ &= mgl \sin(\alpha\omega_i\ell) \left(\frac{\alpha^2\ell}{2} + \beta \right) + \rho_0g \left[\frac{\alpha^2}{(\alpha\omega_i)^3} (1 - \cos(\alpha\omega_i\ell)) - \frac{\ell \cos(\alpha\omega_i\ell)}{\alpha\omega_i} \left(\frac{\alpha^2\ell}{2} + \beta \right) + \frac{\beta \sin(\alpha\omega_i\ell)}{(\alpha\omega_i)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

となる。

2.6 初期値問題：モデル 2

つぎに、初期条件を変えて、ばねと錘に作用する重力のためにばねが伸び切ったときに、錘に初速度 v_0 を与えた場合の解を求める。このときの初期条件は、

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad \rho(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = mv_0\delta(x) \quad (2.32)$$

とする。この条件を満たすべく、変位 $U(x, t)$ を

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i X(x, \omega_i) \sin(\omega_i t) + U_0(x) \quad (2.33)$$

と展開しておく。これで初期条件の第 1 式は満たしているので、第 2 式を適用すると、

$$\rho(x) \sum_{i=1}^{\infty} D_i \omega_i X(x, \omega_i) = mv_0\delta(x) \quad (2.34)$$

となる。この両辺に $X(x, \omega_j)$ を掛け、 x 積分をして固有関数の直交性 (2.24) 式を用いると、係数 D_i が

$$D_i = \frac{mv_0 X(0, \omega_i)}{\omega_i N_i^2} = -\frac{mv_0 \sin(\alpha\omega_i\ell)}{\omega_i N_i^2} \quad (2.35)$$

と決まる。これを (2.33) 式に戻して、変位 $U(x, t)$ が

$$U(x, t) = -mv_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha\omega_i\ell)}{\omega_i N_i^2} X(x, \omega_i) \sin(\omega_i t) + U_0(x) \quad (2.36)$$

と求められる。逆にこの式を時間 t で微分し、 $t = 0$ 、 $x = 0$ とおくと錘の初速度 v_0 になるはずで、(2.21) 式を用いて、恒等式

$$m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\alpha\omega_i\ell)}{N_i^2} = 1 \quad (2.37)$$

を得る。この式は数値計算をしたときの精度のチェックに使える。

2.7 初期値問題：モデル 3

もう一つ、こんどは錘ではなく、ばねに初速度を与えた場合を考えてみる。モデル 2 のときと同じく、重力のためにばねが伸び切ったときに、ばねの区間 (x_1, x_2) に初速度 v_0 を与えるものとする。このときの初期条件は、

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad \rho(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \rho_0 v_0 \theta(x - x_1) \theta(x_2 - x) \quad (2.38)$$

となる。ここに、 θ は単位階段関数である。ここで、変位 $U(x, t)$ を (2.33) 式と同じく、係数 E_i を用いて、

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} E_i X(x, \omega_i) \sin(\omega_i t) + U_0(x) \quad (2.39)$$

と展開しておく。これで初期条件の第 1 式は満たしているので、第 2 式を適用すると、

$$\rho(x) \sum_{i=1}^{\infty} E_i \omega_i X(x, \omega_i) = \rho_0 v_0 \theta(x - x_1) \theta(x_2 - x) \quad (2.40)$$

となり、これに $X(x, \omega_j)$ を掛け、 x 積分をして固有関数の直交性 (2.24) 式を用いると、係数 E_i が

$$E_i = \frac{\rho_0 v_0}{\omega_i N_i^2} \int_{x_1}^{x_2} X(x, \omega_i) dx = \frac{\rho_0 v_0}{\alpha \omega_i^2 N_i^2} [\cos(\alpha \omega_i (x_1 - \ell)) - \cos(\alpha \omega_i (x_2 - \ell))] \quad (2.41)$$

と求められる。これを (2.39) 式に戻して、変位 $U(x, t)$ が

$$U(x, t) = \frac{\rho_0 v_0}{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha \omega_i (x_1 - \ell)) - \cos(\alpha \omega_i (x_2 - \ell))}{\omega_i^2 N_i^2} X(x, \omega_i) \sin(\omega_i t) + U_0(x) \quad (2.42)$$

と求められたことになる。これを逆に時間で微分して $t = 0$ とおくと、初めにばねに与えた速度になるはずで、

$$\frac{\rho_0}{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha \omega_i (x_1 - \ell)) - \cos(\alpha \omega_i (x_2 - \ell))}{\omega_i N_i^2} X(x, \omega_i) = \theta(x - x_1) \theta(x_2 - x) \quad (2.43)$$

という恒等式となる。これも数値計算をしたときの精度のチェックに使える。

2.8 エネルギー保存則

質量を考慮したばねなどというものは普通の教科書ではお目にかかれないので、ここで、そのエネルギー保存則についても述べておく。よく知られているように、ばね定数 k のばねを長さ x だけ引っ張ったときに、ばねに蓄えられるエネルギーは $\frac{1}{2} k x^2$ である。2 節の初めのところで議論したように、質量を考慮したばねの場合、ばねの区間 $(x, x + dx)$ を考えると、この区間のばね定数は $(\ell/dx)k$ であり、伸びは $U(x + dx, t) - U(x, t)$ なので、この区間に蓄えられるエネルギーは、

$$\frac{1}{2} \frac{k\ell}{dx} [U(x + dx, t) - U(x, t)]^2 \quad (2.44)$$

となる。これは dx が無限小のとき、

$$\frac{1}{2} k\ell \left(\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.45)$$

となるので、これをばねの全区間で足し合わせると、

$$E_s = \frac{1}{2}k\ell \int_{+0}^{\ell} \left(\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.46)$$

となる。これがばねの歪みエネルギーである。この他に、重力による位置エネルギーがあり、錘も含めて、

$$E_p = g \int_{-0}^{\ell} \rho(x)U(x,t)dx \quad (2.47)$$

と、もう一つ、運動エネルギー、これも錘を含めて、

$$E_k = \frac{1}{2} \int_{-0}^{\ell} \rho(x) \left(\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.48)$$

がある。これらを足し合わせた全エネルギーは

$$E = E_s + E_p + E_k \quad (2.49)$$

$$= \frac{1}{2}k\ell \int_{+0}^{\ell} \left(\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx + g \int_{-0}^{\ell} \rho(x)U(x,t)dx + \frac{1}{2} \int_{-0}^{\ell} \rho(x) \left(\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.50)$$

となる。この全エネルギーは一度振動が始まったあとでは保存量となるはずである。これを時間で微分すると、

$$\frac{dE}{dt} = k\ell \int_{+0}^{\ell} \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x \partial t} dx + g \int_{-0}^{\ell} \rho(x) \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} dx + \int_{-0}^{\ell} \rho(x) \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (2.51)$$

となるが、この右辺1項目については部分積分をし、2項目、3項目については、 $\rho(x)$ に含まれるデルタ関数の部分と残りの部分、すなわち、錘とばねの部分に分けると、

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = k\ell \left[\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \right]_{+0}^{\ell} - k\ell \int_{+0}^{\ell} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} dx + mg \frac{\partial U(0,t)}{\partial t} + \rho_0 g \int_{+0}^{\ell} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} dx \\ + m \frac{\partial U(0,t)}{\partial t} \frac{\partial^2 U(0,t)}{\partial t^2} + \rho_0 \int_{+0}^{\ell} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} dx \end{aligned} \quad (2.52)$$

となる。ここで、右辺第1項の $x = +0$ の部分と第3項と第5項の和は (2.4) 式によりゼロとなり、また、第2項と第4項と第6項の和は (2.3) 式によりゼロとなるので、残るのは第1項の $x = \ell$ の部分

$$\frac{dE}{dt} = k\ell \left[\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \right]_{x=\ell} \quad (2.53)$$

のみとなる。境界条件である (2.7) 式を時間で微分すると $\partial U(\ell,t)/\partial t = 0$ となるので、これはゼロとしてよく、エネルギー保存則

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (2.54)$$

が導かれる。

3 数値計算例

ここでは、ばね、錘、および、重力加速度に関する物理定数を、適当ではあるが、

$$\ell = 1 \text{ m}, \quad k = 100 \text{ N/m}, \quad \rho_0 = 0.1 \text{ kg/m}, \quad m = 1 \text{ kg}, \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2 \quad (3.1)$$

と設定した場合を扱うことにする。この設定で、(2.10) 式の α, β は

$$\alpha = 0.0316227 \cdots \text{ s/m}, \quad \beta = 0.01 \text{ s}^2/\text{m} \quad (3.2)$$

となる。この数値で (2.22) の固有値方程式を解き、200 個の固有値 ω_i を求めたが、その初めの 10 個を挙げると、

$$\omega_i \text{ [1/s]} = 9.8363, \quad 100.3421, \quad 199.1937, \quad 298.3727, \quad 397.6350, \quad 496.9306, \quad 596.2430, \quad 695.5647, \\ 794.8928, \quad 894.2247 \quad (3.3)$$

と、ほぼ、100 の周期で並ぶ。この数値に αl を掛けて無次元化した波数にしてみると、

$$\alpha l \omega_i = 0.3110, \quad 3.1730, \quad 6.2990, \quad 9.4353, \quad 12.5743, \quad 15.7143, \quad 18.8548, \quad 21.9956, \quad 25.1367, \quad 28.2778 \quad (3.4)$$

と、ほぼ、円周率 π の間隔で並ぶ。これは固有値方程式 (2.22) に含まれる tangent が周期 π 毎に発散をくり返すことに起因する。

この 200 個の ω_i を用いて恒等式 (2.37) の左辺を計算してみると、その値は、0.9998984 \cdots と非常に良い精度で 1 に近い数値になる。

ここで得られた 200 個の固有値を用いて、モデル 1 の (2.30) 式の変位 $U(x, t)$ をグラフ化したものを以下の図 2 に示す。このグラフは、横方向に x 軸、斜め上方向に t 軸、上方向に U 軸をとって立体的に表したものである。このグラフを見ると、ばねはほとんどの部分で直線的に伸びていて、ばねの質量を取り入れた効果が効いていないように思われる。ばねの質量が錘に比べて小さすぎたのだろうか。

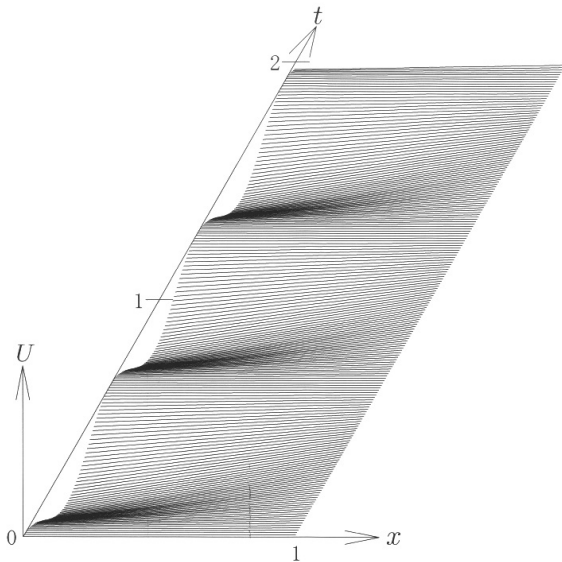


図 2 変位 $U(x, t)$, モデル 1, $\rho_0 = 0.1 \text{ kg/m}$

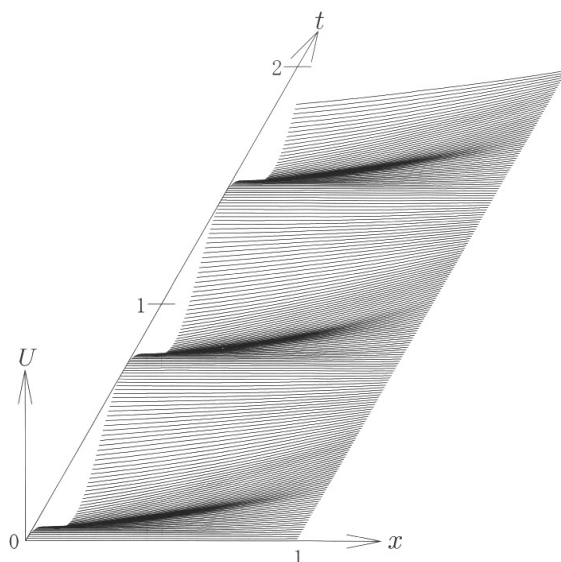


図 3 変位 $U(x, t)$, モデル 1, $\rho_0 = 1 \text{ kg/m}$

そこで、ばねの質量が錘と同じになるように、 $\rho_0 = 1 \text{ kg/m}$ としたときのグラフを比較のため図 3 に掲げる。しかし、これら 2 つの図 2, 図 3 を比べると、図 3 の方が多少振動周期が大きくなってはいるが、その他の違い

はほとんど認められない。これはモデル 1 では、ばねと錘が、少なくとも初めのうちは、自由落下運動になっているので、ばね自体の振動が起りにくいと考えられる。

つぎに、モデル 2 について、(2.36) 式で求めた変位 $U(x, t)$ を図 4, 図 5 に示す。このうち、図 4 は $\rho_0 = 0.1 \text{ kg/m}$, 図 5 は $\rho_0 = 1 \text{ kg/m}$ とした場合で、初速度 v_0 は両図とも $v_0 = 1 \text{ m/s}$ とした。この場合は、錘に衝撃を与えているので、ばね自体に何本もの筋が発生し振動しているのが見てとれる。これはばねの質量を考慮した効果である。このときばねに発生する波動の伝播速度 c は、

$$c = 1/\alpha = \begin{cases} 31.6227 \text{ m/s,} & \text{for } \rho_0 = 0.1 \text{ kg/m} \\ 10 \text{ m/s,} & \text{for } \rho_0 = 1 \text{ kg/m} \end{cases} \quad (3.5)$$

となるが、この値は、図 4, 図 5 で見られる筋の伝播速度と一致している。なお、これらの図はモアレ（縞状の波紋）が発生して見にくいことがあるので、拡大して見ることをお勧めする。

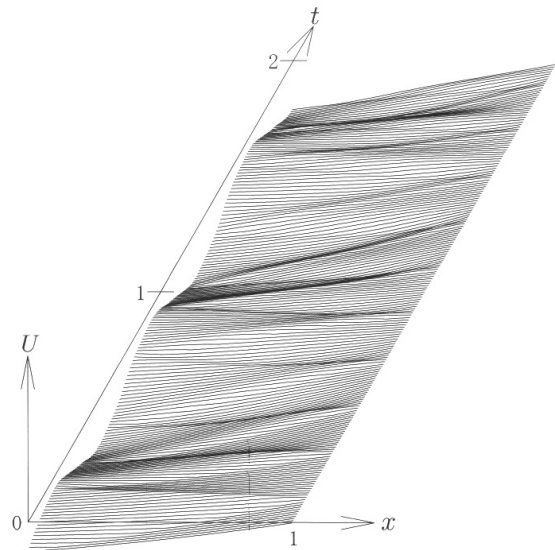
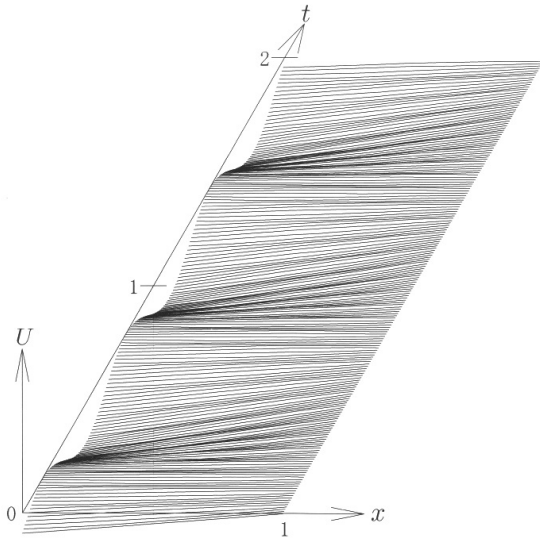


図 4 変位 $U(x, t)$, モデル 2, $\rho_0 = 0.1 \text{ kg/m}$

図 5 変位 $U(x, t)$, モデル 2, $\rho_0 = 1 \text{ kg/m}$

最後に、モデル 3 の (2.42) (2.43) 式に基づいた計算をしてみる。このモデルはばね自体の振動がさらに見やすいようにと作ったものである。このときは、図の見やすさから、 ρ_0, v_0 を大きめにし、

$$\rho_0 = 2 \text{ kg/m}, \quad v_0 = 2 \text{ m/s} \quad (3.6)$$

としてみる。また、このモデルで必要となるパラメータ x_1, x_2 については、

$$x_1 = 0.3 \ell, \quad x_2 = 0.7 \ell \quad (3.7)$$

とした。他の変数 ℓ, k, m などについては (3.1) 式と同じとする。この変数の値を用い固有値方程式 (2.22) で 200 個の固有値 ω_i を求め、まず、恒等式 (2.43) の左辺を数値計算したものを次ページ図 6 に示す。この図の横軸は x , 縦軸は (2.43) 式の左辺を y とおいたものである。見てわかるとおり、左辺の値は、階段関数で表されるものに完全ではないが、かなりの程度近いものになっている。

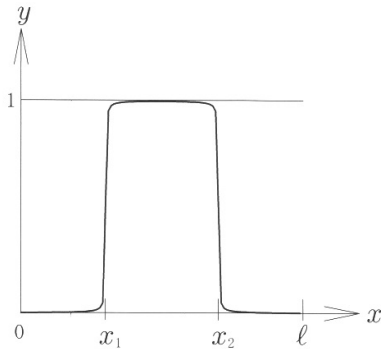


図 6 恒等式 (2.43), $x_1 = 0.3\ell$, $x_2 = 0.7\ell$

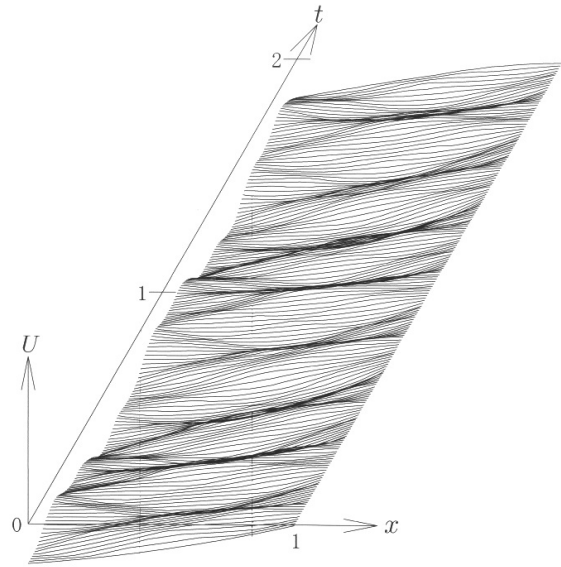


図 7 変位 $U(x, t)$, モデル 3, $\rho_0 = 2 \text{ kg/m}$, $v_0 = 2 \text{ m/s}$

図 7 は, (2.42) 式に基づいて変位 $U(x, t)$ をグラフ化したものである. 見て分かる通り, ばね部分にたくさんの波が立っており, ばねの質量を考慮した結果が, 如実に表れている.

4 おわりに

ここで扱った「ばねの質量を考慮したばね振子」の問題は, 大学に入学して間もなくのころに, 物理実験の実習課題で「ばね振子」をやられたときから, 何となく頭に描いていたことである. 実際にやってみると錘が上下に振動することはもちろんであるが, ばね自体も結構上下に波動を発生しながら振動していることが分かった. しかし, そのときは, ばね自体の波動現象を物理的に解析できるほど賢くなかったので, 何となく気にはなっていたがそのままになっていた. 今回, 初めてこれをクリアな形で解析したという次第である. 単なる振子の問題と言ってしまえば, それまでであるが, よく考えてみると奥が深いことがよく分かる. 当時から疑問に思っていたことは, ばねの質量を考慮したとき, ばね振子の周期がどのように変化するかということであった. 高校の物理でも習うように, ばねの質量を考慮しないときのばね振子の振動周期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4.1)$$

で与えられる. ばねの質量を考慮したとき, この値が, どのように変化するか, ばねの密度 ρ_0 の一次の近似で求めてみよう. 固有値方程式 (2.22) は, tangent を $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \dots$ と展開して近似すると,

$$\beta\omega\left[\alpha\omega\ell + \frac{1}{3}(\alpha\omega\ell)^3\right] = \alpha \quad (4.2)$$

となる. これは ω^2 の 2 次方程式となるので, これから,

$$\omega^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + (4/3)(\alpha^2\ell/\beta)}}{(2/3)(\alpha\ell)^2} \quad (4.3)$$

と求められる. この式の平方根の部分に近似式 $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$ を用いて,

$$\omega^2 = \frac{1}{\beta\ell}\left(1 - \frac{\alpha^2\ell}{3\beta}\right) = \frac{k}{m}\left(1 - \frac{\rho_0\ell}{3m}\right) \quad (4.4)$$

という近似解が求められる。これからこのときの周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \cong 2\pi \sqrt{\frac{m}{k} \left(1 + \frac{\rho_0 \ell}{6m}\right)} \quad (4.5)$$

となって、ばねの質量 $\rho_0 \ell$ の錘の質量 m に対する比の $1/6$ の補正項が付く。図 2 と図 3 で、図 3 の方が周期が長くなっているのがこれで説明される。

話は変わるが、この問題で何か面白い解が存在しないかと思い、例えば、錘はまったく動かずに、ばねだけが振動するといった解がありはしないかと考えてみたが、そのような解は存在しそうもなく、徒労に終わる結果となった。また、ここでは錘の運動は上下動のみに限定した議論をした。これをさらに拡張し、水平方向にも動く場合を考えてみるとたちまち複雑怪奇な方程式になってしまい手の付けようがなくなる。いずれかの機会にこのような場合も扱ってみたいとは思うがどうなる分らない。

[謝辞]

今回も、京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき、たくさんのコメントをいただきました。先生に心から感謝いたします。

一般二項定理の発見

矢野 忠*1

Discovery of Generalized Binomial Theorem

Tadashi YANO*2

1 はじめに

Merzbach と Boyer の『数学の歴史』 [1] によれば, Newton の偉大な発見は

1. 一般二項定理
2. 微分積分法
3. 重力の法則
4. 光の性質

の4つだという。

上述の書には一般二項定理についてほぼ一頁あまりの記述があるが, あまりよくわからない。インターネットで検索したら, 中村滋さんの書いたレポートがあった [2]。それを読んでほぼ一般二項定理の発見の大筋がわかったので, まだ数学史の研究としては不十分だが, その発見の様子を以下にまとめておく。

2 一般二項定理の発見

n を自然数としたときの二項定理

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (2.1)$$

はよく知られている。これは多分 Newton の時代でもそうであったろう。

これを総和を表す記号 \sum を用いて表せば,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k \quad (2.2)$$

と表せる。こういう二項定理の一般項を求めることはすでに述べたことがある [3]。上の式で出て来た係数は二項係数と呼ばれているが, 記号として $\binom{n}{k}$ を用いて

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \quad (2.3)$$

で定義する。 n が 0 または自然数のときには組合せの記号で

$$\binom{n}{k} = {}_n C_k \quad (2.4)$$

と表記することもあるが, 最近ではこの組合せの記号 ${}_n C_k$ を用いないことが多くなっている。それは上の $\binom{n}{k}$ の記号で, n が自然数でないときにも, この記号を使いたいということにおそらくは起因しているのであろう。それ

*1 元愛媛大学工学部

*2 yanotad@earth.ocn.ne.jp

で n が 0 または自然数でないときにも, n を α とおいて, この記号を用いることにして, 二項係数を

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (2.5)$$

と表す. このとき α は実数とする. これは一般二項定理における二項係数である.

ちょっと先走ったが, この二項係数を用いて, 一般の二項定理は

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k}x^k, \quad (|x| < 1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

と表される*3.

α が 0 または自然数のときには二項定理は有限の級数であったが, そうでないときには, 無限級数となる.

ここで, ちょっと唐突だが, 図 1 に示したように

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{1/2} dt \quad (2.7)$$

という定積分を考える. これは半径 1 の円の半円の面積 $\pi/2$ を表している.

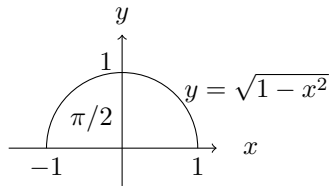


図 1 $x^2 + y^2 = 1$ の半円とその面積

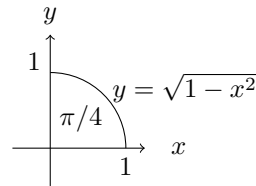


図 2 $x^2 + y^2 = 1$ の四分円とその面積

もし, ここで積分の範囲を $[0, 1]$ に限れば,

$$\int_0^1 (1-t^2)^{1/2} dt = \frac{\pi}{4} \quad (2.8)$$

となる (図 2 参照). もちろん, これは半径 1 の四分円の面積を表している.

こういったことから Wallis は円周率 π を無限乗積で表す, Wallis の公式

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots \quad (2.9)$$

を与えた*4. このときに Wallis はある曲線の下での面積を与える, つぎの定積分

$$f(p) = \int_0^1 (1-t^2)^p dt \quad (2.10)$$

を考えた. この式で $p = 1/2$ とすれば, 積分 (2.8) となるから

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \quad (2.11)$$

*3 (2.1)(2.2) にはなかった, $|x| < 1$ という条件が (2.6) でついたのは (2.6) が無限級数となり, 無限級数の収束が問題となるからである.

*4 Wallis の公式の現代的な導出と Wallis の推測については [4] の説明が詳しい.

となる。これは前に述べたように半径 1 の四分円の面積である。

Wallis がどのように $f(p)$ の値を求めたかはさだかではないが、現在の私たちならば、

$$f(0) = 1, \quad f(1) = \frac{2}{3}, \quad f(2) = \frac{8}{15} \quad (2.12)$$

であることは、 $f(p)$ の定義で $p = 0, 1, 2$ ととれば、すぐに計算できる。

Newton は Wallis の定積分 $f(p)$ を一般化して、つぎの積分を考えたという。

$$g(p, x) = \int_0^x (1-t^2)^p dt \quad (2.13)$$

このとき

$$g(p, 1) = f(p) \quad (2.14)$$

が成り立つ。このとき、 $g(0, x), g(1, x), g(2, x)$ が

$$\begin{aligned} g(0, x) &= x \\ g(1, x) &= x - \frac{x^3}{3} \\ g(2, x) &= x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \end{aligned}$$

であることは、現在の積分学を知っている人にはすぐにわかる（付録を参照）。もっとも微積分学を発見する前の Newton には、私たちの現代の積分学の知識はなかったが、今の記号でいえば、

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad C: \text{積分定数} \quad (2.15)$$

という積分に相当するものは当時までにすでに知られていたらしい。そうだとすれば、 $g(0, x), g(1, x), g(2, x), \dots$ は上に与えられた式になることは Newton はもちろん Wallis にも当然の知識であったと考えられる。

上の $g(p, x)$ では p は間隔が 1 であったものを、0 と 1 の間の $\frac{1}{2}$ 、1 と 2 との間の $\frac{3}{2}$ 、 \dots とかでの補間をするとどうなるか。こういったことに Newton は関心を持ったと思われる。このとき

$$\begin{aligned} (1-t^2)^0 &= 1 \\ (1-t^2)^1 &= 1-t^2 \\ (1-t^2)^2 &= 1-2t^2+t^4 \\ (1-t^2)^3 &= 1-3t^2+3t^4-t^6 \\ &\dots \end{aligned}$$

であることはすでに Pascal たちによって知られていた（これらの展開の係数を表す表は Pascal の三角形と言われる）。

ここで $(1-t^2)^p$ で $p = \frac{q}{2}$ とおいて、 $(1-t^2)^{q/2}$ を考えよう。こういう関数を考えたらどうかという考えは、半円の面積を考えたら、被積分関数として $(1-t^2)^{1/2}$ が現れることに由来しているだろう。 $p = \frac{q}{2}$ が 0 とか自然数とかでないときに $(1-t^2)^{q/2}$ がどのように t^2 のべき乗の項の和として表されるかは Newton の時代にはまだ知られていない。これがどういうふうに表示されるか。これがいま求めたいと思っている問題である。これをいま

$$\begin{aligned} (1-t^2)^{q/2} &= a_{q,0} - a_{q,1}t^2 + a_{q,2}t^4 - a_{q,3}t^6 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{q,n} t^{2n} \end{aligned} \quad (2.16)$$

表1 Newton のノートにあった数表 (ただし行と列とを入れ替えてある)

$q = 2p$	$a_{q,0}(x)$	$a_{q,1}(x^3/3)$	$a_{q,2}(x^5/5)$	$a_{q,3}(x^7/7)$	$a_{q,4}(x^9/9)$	$a_{q,5}(x^{11}/11)$	$a_{q,6}(x^{13}/13)$
-2	1	-1	1	-1	1	-1	1
0	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0
4	1	2	1	0	0	0	0
6	1	3	3	1	0	0	0
8	1	4	6	4	1	0	0
10	1	5	10	10	5	1	0
12	1	6	15	20	15	6	1
14	1	7	21	35	35	21	7

と表せると仮定しよう。ここで、 $p = \frac{q}{2}$ が 0 または自然数ならば、有限の項数でおわる級数であることはもちろん知られていた。

$(1 - t^2)^{q/2}$ が項別積分できるとすれば、

$$\begin{aligned} \int_0^x (1 - t^2)^{q/2} dt &= a_{q,0}x - a_{q,1} \frac{x^3}{3} + a_{q,2} \frac{x^5}{5} - a_{q,3} \frac{x^7}{7} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{q,n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned} \quad (2.17)$$

となる。この積分記法は現在のものであるが、前にも述べたように Newton の時代には表記法はともかくとして、Wallis にはこのことがわかっていらしい。

そこで、まず $q = 2p$ の場合を考えてみよう。このとき $(1 - t^2)^p$ は有限項の級数として表される。

$$g(p, x) = \int_0^x (1 - t^2)^p dt, \quad \left(p = \frac{q}{2}\right) \quad (2.18)$$

を $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ について計算すれば、 $a_{q,n}$ を求めることができる。これは表 1 として与えるが、この表は中村滋さんのレポート [2] の表の行と列とを入れ替えたものである。この表 1 の $a_{q,n}$ の求め方は付録 1 に示す。この表から $a_{q,0} = 1, a_{q,1} = \frac{q}{2}$ となることがわかる。 $a_{q,0}$ は q の 0 次式、 $a_{q,1}$ は q の 1 次式である。 $q = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ に対する $a_{q,2}$ の値は $0, 0, 1, 3, 6, 10$ であるから、これらの $(q, a_{q,2})$ の値をグラフ用紙にプロットすれば、放物線になるらしい (図 3 参照)。すなわち、 q の 2 次式になる。これを

$$a_{q,2} = aq^2 + bq + c \quad (2.19)$$

とにおいて未定係数 a, b, c を求めてみよう。

$$\begin{aligned} a_{0,2} &= c = 0 \\ a_{2,2} &= 4a + 2b + c = 0 \\ a_{4,2} &= 16a + 4b + c = 1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

から

$$a = \frac{1}{8}, \quad b = -\frac{1}{4}, \quad c = 0 \quad (2.21)$$

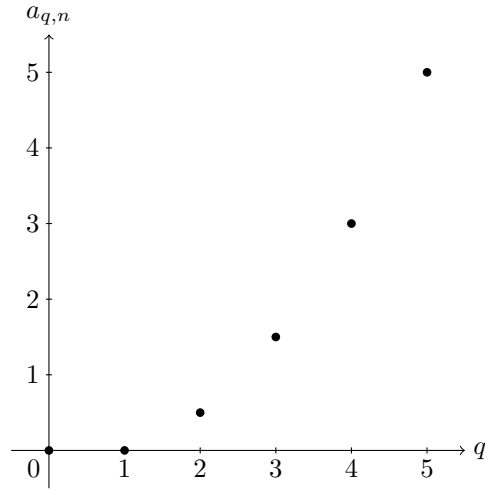


図3 $(q, a_{q,2})$ のプロット

すなわち,

$$\begin{aligned} a_{q,2} &= \frac{1}{8}q^2 - \frac{1}{4}q \\ &= \frac{1}{8}q(q-2) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$q = 0, 2, 4$ に対して (2.22) のように決まったから, $q = 6, 8, 10$ を代入すれば, $a_{6,2} = 3, a_{8,2} = 6, a_{10,2} = 10$ となり, 表の値と一致している.

以上, $a_{q,0} = 1, a_{q,1} = \frac{q}{2}, a_{q,2} = \frac{1}{8}q(q-2)$ の結果から, $a_{q,3}$ は q の 3 次式であることが推測できるので,

$$a_{q,3} = aq^3 + bq^2 + cq + d \quad (2.23)$$

とにおいて未定係数 a, b, c, d を $(q, a_{q,3}) = (0, 0), (2, 0), (4, 0), (6, 1)$ から求めてもよいが, そうしなくても $(q, a_{q,3}) = (0, 0), (2, 0), (4, 0)$ から

$$a_{q,3} = aq(q-2)(q-4) \quad (2.24)$$

と表せることが予想できる. ただし, 3 次の係数 a は $(q, a_{q,3}) = (6, 1)$ から定める必要がある.

$$a_{6,3} = 6 \cdot 4 \cdot 2a = 1 \quad (2.25)$$

から

$$a = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} \quad (2.26)$$

が求められる. すなわち

$$a_{q,3} = \frac{1}{6 \cdot 4 \cdot 2} q(q-2)(q-4) \quad (2.27)$$

と表すことができる.

このとき

$$(q, a_{q,3}) = (6, 1), (8, 4), (10, 10), (12, 20), (14, 35) \quad (2.28)$$

であることを確かめることができる.

同様に

$$a_{q,4} = aq(q-2)(q-4)(q-6) \quad (2.29)$$

とおくことができ、 $(q, a_{q,4}) = (8, 1)$ から未定係数 a を

$$a = \frac{1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \quad (2.30)$$

と求めることができる。したがって、

$$(q, a_{q,4}) = (10, 5), (12, 15), (14, 35), \dots \quad (2.31)$$

と求められる。

以下同様にして、 $a_{q,5}, a_{q,6}, \dots$ を求めることができる。

中村さんによれば、これらをまとめれば、

$$\begin{aligned} a_{q,0} &= 1 \\ a_{q,1} &= q \\ a_{q,2} &= \frac{\frac{q}{2}(\frac{q}{2}-1)}{1 \cdot 2} = \binom{\frac{q}{2}}{2} \\ a_{q,3} &= \frac{\frac{q}{2}(\frac{q}{2}-1)(\frac{q}{2}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{\frac{q}{2}}{3} \\ a_{q,4} &= \frac{\frac{q}{2}(\frac{q}{2}-1)(\frac{q}{2}-2)(\frac{q}{2}-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \binom{\frac{q}{2}}{4} \\ &\dots \\ a_{q,n} &= \binom{\frac{q}{2}}{n} \end{aligned} \quad (2.32)$$

と求まるという。ここまでは $q = \text{偶数}$ のときであったが、Newton は $q = 0$ と $q = 2$ の中間項である $q = 1$ のときにも

$$a_{q,n} = \binom{\frac{q}{2}}{n} \quad (2.33)$$

が使えるとして見たら^{*5}、

$$\begin{aligned} a_{1,0} &= 1 \\ a_{1,1} &= \frac{1}{2} \\ a_{1,2} &= -\frac{1}{8} \\ a_{1,3} &= \frac{1}{16} \\ a_{1,4} &= -\frac{5}{128} \\ a_{1,5} &= \frac{7}{256} \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.34)$$

が得られた。この補間が正しいのならば、

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \frac{7}{256}x^{10} - \dots \quad (2.35)$$

が求められたことになる。

一般二項定理が成り立つことを知っている私たちには、これが正しいことはすでに知っているのだが、Newton にはそのことがわかっていただけではない。それで自分が納得するために

$$(\sqrt{1-x^2})^2 = 1 - x^2 \quad (2.36)$$

となることを確かめてみたという。このことについては 3 節で述べよう。

^{*5} これは補間の考えであろう。その補間が正しいかどうかは個々に検討する必要がある。この場合は正しかった。

3 一般二項定理の検証

この節で述べようとするのは、一般二項定理の証明ではない。あくまで一つの検証にすぎない。しかし、これは一般二項定理の発見者の Newton にとっては重要な意味をもっていたであろう。

ここで述べる検証のしかたはあくまで著者（矢野）の推測であって、実際に Newton がどのようにして上の

$$(\sqrt{1-x^2})^2 = 1-x^2 \quad (2.36)$$

の検証を行ったのかについて、文献等で確かめたわけではない。

これから計算したいことは

$$\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \frac{7}{256}x^{10} - \dots\right)^2 = 1-x^2 \quad (3.1)$$

であることを確かめることであるが、このままで左辺の積を計算してもよいが、そうすれば計算はかなり面倒になるので、この左辺をわざと

$$1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \frac{7}{256}x^{10} - \dots = 1 - a_{1,1}x^2 - a_{1,2}x^4 - a_{1,3}x^6 - a_{1,4}x^8 - a_{1,5}x^{10} - \dots \quad (3.2)$$

と表すことにしよう。この右辺の 2 乗を縦に並べて書き、その積をつくる*6。

$$\begin{aligned} & (1 - a_{1,1}x^2 - a_{1,2}x^4 - a_{1,3}x^6 - a_{1,4}x^8 - a_{1,5}x^{10} - \dots)^2 \\ &= 1 - 2a_{1,1}x^2 + (-2a_{1,2} + a_{1,1}^2)x^4 + (-2a_{1,3} + 2a_{1,1}a_{1,2})x^6 \\ &+ (-2a_{1,4} + 2a_{1,1}a_{1,3} + a_{1,2}^2)x^8 + (-2a_{1,5} + 2a_{1,1}a_{1,4} + 2a_{1,2}a_{1,3})x^{10} \\ &+ (-2a_{1,6} + 2a_{1,1}a_{1,5} + 2a_{1,2}a_{1,4} + a_{1,3}^2)x^{12} + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

であるから、与えられた $a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, \dots$ を用いて、 x^2, x^4, x^6, \dots の係数を求めればよい。

$$\begin{aligned} a_{1,0} &= 1 \\ a_{1,1} &= \frac{1}{2} \\ a_{1,2} &= \frac{1}{8} \\ a_{1,3} &= \frac{1}{16} \\ a_{1,4} &= \frac{5}{128} \\ a_{1,5} &= \frac{7}{256} \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

であるから、 x^2 の係数は

$$2a_{1,1} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad (3.5)$$

x^4 の係数は

$$a_{1,1}^2 - 2a_{1,2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{8} = 0 \quad (3.6)$$

x^6 の係数は

$$2(a_{1,1}a_{1,2} - a_{1,3}) = 2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right) = 0, \quad (3.7)$$

*6 前に使った係数 $a_{q,n}$ と似ているが、符号がちがう箇所がある。計算式を一々書くのは面倒なので、ここでは省略した。

x^8 の係数は

$$2(a_{1,1}a_{1,3} - a_{1,4}) + a_{1,2}^2 = 2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} - \frac{5}{128}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{16} - \frac{5}{64} + \frac{1}{64} = 0 \quad (3.8)$$

x^{10} の係数は

$$2(a_{1,1}a_{1,4} + a_{1,2}a_{1,3} - a_{1,5}) = 2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{128} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} - \frac{7}{256}\right) = \frac{5}{128} + \frac{1}{64} - \frac{7}{128} = 0 \quad (3.9)$$

x^{12} の係数は

$$2(-a_{1,6} + a_{1,1}a_{1,5} + a_{1,2}a_{1,4}) + a_{1,3}^2 \quad (3.10)$$

であるが、このまま計算してもいいが、これが 0 となることを示すことは少し面倒である。それで、

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \frac{1}{2} \\ a_{1,2} &= \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8} \\ a_{1,3} &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \\ a_{1,4} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} = \alpha a_{1,3}, \quad \alpha = \frac{5}{8} \\ a_{1,5} &= \beta a_{1,3}, \quad \beta = \frac{7}{10} \alpha \\ a_{1,6} &= \gamma a_{1,3}, \quad \gamma = \frac{9}{12} \beta \end{aligned} \quad (3.11)$$

であることを用いる。

$$\begin{aligned} 2(-a_{1,6} + a_{1,1}a_{1,5} + a_{1,2}a_{1,4}) + a_{1,3}^2 &= 2\left(\frac{1}{8}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \gamma\right) a_{1,3} + a_{1,3}^2 \\ &= \left[2\left(\frac{1}{8}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \gamma\right) + a_{1,3}\right] a_{1,3} \end{aligned} \quad (3.12)$$

ここで、[] の中を計算して見れば、

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{1}{8}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \gamma\right) + a_{1,3} &= \frac{1}{4}\alpha + \beta - 2\gamma + a_{1,3} \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{7}{10} - \frac{9}{6} \cdot \frac{7}{10}\right) \alpha + a_{1,3} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{10} + a_{1,3} \\ &= -\frac{1}{16} + a_{1,3} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

いくらでも高次の x^{2n} の係数を計算しなくてはならないが、まあ、これくらいで多分任意の整数 n , ($n \neq 1$) に対する x^{2n} の前の係数が 0 になるだろうと推測される。もちろんこれはあくまで推測であって、証明ではない。

4 おわりに

以上、中村さんのレポートに沿って [2]、一般二項定理の発見の様子を少し立入って調べてみた。ここでは Wallis の行った推測についてはまったく触れなかったが、これについても触れないと片手落ちであろう。それについては別にレポートしたいと考えている。

さらに、中村さんは一般二項定理の応用についても述べている。ここではそれについてまったく触れないが、逆正弦関数 $\arcsin x$ の展開から $\sin x$ のべき級数展開を求めることについては以前に発表したことがある [5]。その改訂版を近々発表するつもりである。

また、表 1 の係数の数値の求め方は付録に述べておいた。

5 付録 表 1 の係数の求め方

この付録では表 1 に与えられた係数 $a_{q,n}$ を求めてみよう。

すなわち、

$$g(p, x) = \int_0^x (1 - t^2)^p dt, \quad q = 2p \quad (5.1)$$

のときの $p = -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ のときの係数を求めよう。

$q = 2p = -2$ のとき、すなわち $p = -1$ のときの係数を求めるのは一番面倒だから最後に求めることにして、 $p = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ の場合の係数を求めてみよう。

まずは $p = 0$ のときから始めよう。このとき

$$\begin{aligned} g(0, x) &= \int_0^x (1 - t^2)^0 dt \\ &= \int_0^x dt \\ &= x \end{aligned} \quad (5.2)$$

であるから、

$$a_{0,0} = 1, a_{0,1} = a_{0,2} = a_{0,3} = \dots = 0 \quad (5.3)$$

が求められる。これは表 1 の上から 3 行目である*7

つぎに $p = 1$ のときを考えよう。このとき

$$\begin{aligned} g(1, x) &= \int_0^x (1 - t^2) dt \\ &= \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3} \end{aligned} \quad (5.4)$$

であるから、

$$a_{1,0} = 1, a_{1,1} = 1, a_{1,2} = a_{1,3} = \dots = 0 \quad (5.5)$$

が求められる。これは表 1 の 4 行目である。

このときに、係数 $a_{1,0}$ は x の係数であり、係数 $a_{1,1}$ は $\frac{x^3}{3}$ の係数であることに注意してほしい。この係数の一般の定義は (2.17) でされていることに注意しておこう*8。

同様に、 $p = 2$ のときを考えよう。このとき

$$\begin{aligned} g(2, x) &= \int_0^x (1 - t^2)^2 dt \\ &= \left[t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right]_0^x \\ &= x - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \end{aligned} \quad (5.6)$$

*7 以下、表 1 の上から n 行目と書くべきところを単に n 行目という。

*8 すなわち、 $a_{q,n}$ は項 $(-1)^n \frac{x^{n+1}}{2n+1}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) の係数であることに注意をせよ。

であるから,

$$a_{2,0} = 1, \quad a_{2,1} = 2, \quad a_{2,2} = 1, \quad a_{2,3} = a_{2,4} = \cdots = 0 \quad (5.7)$$

となる. これは表 1 の 5 行目である.

引き続き, $p = 3$ のときを考えれば,

$$\begin{aligned} g(3, x) &= \int_0^x (1-t^2)^3 dt \\ &= \left[t - 3\frac{t^3}{3} + 3\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \right]_0^x \\ &= x - 3\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \end{aligned} \quad (5.8)$$

であるから,

$$a_{3,0} = 1, \quad a_{3,1} = 3, \quad a_{3,2} = 3, \quad a_{3,3} = 1, \quad a_{3,4} = a_{3,5} = \cdots = 0 \quad (5.9)$$

となる. これは表 1 の 6 行目である.

このようにすれば, $p = 4$ の場合も同様で

$$\begin{aligned} g(4, x) &= \int_0^x (1-t^2)^4 dt \\ &= \left[t - 4\frac{t^3}{3} + 6\frac{t^5}{5} - 4\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} \right]_0^x \\ &= x - 4\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^5}{5} - 4\frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \end{aligned} \quad (5.10)$$

であるから,

$$a_{4,0} = 1, \quad a_{4,1} = 4, \quad a_{4,2} = 6, \quad a_{4,3} = 4, \quad a_{4,4} = 1, \quad a_{4,5} = a_{4,6} = \cdots = 0 \quad (5.11)$$

となる. これは表 1 の 7 行目である.

表 1 にはさらに 8 行目から 10 行目まで, すなわち, $p = 5$ から $p = 7$ まで計算してある.

最後に, 残しておいた表 1 の 2 行目の係数 ($p = -1$ の場合) の求め方を示して, この付録を終えよう.

$$\begin{aligned} (1-t^2)^{-1} &= \frac{1}{1-t^2} \\ &= 1 + t^2 + t^4 + t^6 + t^8 + t^{10} + \cdots \end{aligned} \quad (5.12)$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_0^x (1-t^2)^{-1} dt &= \int_0^x (1 + t^2 + t^4 + t^6 + t^8 + t^{10} + \cdots) dt \\ &= \left[t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + \cdots \right]_0^x \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots \\ &= a_{-2,0}x - a_{-2,1}\frac{x^3}{3} + a_{-2,2}\frac{x^5}{5} - a_{-2,3}\frac{x^7}{7} + \cdots \end{aligned} \quad (5.13)$$

であるから,

$$a_{-2,0} = 1, \quad a_{-2,1} = -1, \quad a_{-2,2} = 1, \quad a_{-2,3} = -1, \quad a_{-2,4} = 1, \quad \cdots \quad (5.14)$$

このようにして表 1 の 2 行目の係数が求められる.

(2022.5.27)

参考文献

- [1] メルツバッハ, ボイヤー, 『数学の歴史』 II (朝倉書店, 2018) 406-422
- [2] 中村滋, 青年ニュートンの一般二項定理発見, 数学史の窓から, <http://iitakashigeru.math-academy.net> (2008.9.13)
- [3] 矢野忠, 二項定理 2, 数学・物理通信 1 巻 4 号 (2010.6.14) 18-27
- [4] 堀川穎二, 『新しい解析入門コース』 新装版 (日本評論社, 1992) 119-122
- [5] 矢野忠, $\sin x$ のべき級数展開, 数学・物理通信 1 巻 7 号 (2011.6.1) 22-28

編集後記

冒頭は久しぶりに中西先生による湯川先生の思い出のエッセイである。「数学・物理通信」は数式が多くてそれぞれの論文を詳しく読んで下さる方は少ないと思うが、このエッセイは誰でも読めると思うので、喜ばしい。

今号掲載された、世戸さんの論文を読んで思い出したことがある。世戸さんも大学での物理の学生実験で「ばね振子」の実習をしたことがあるという。

私の思い出は大学に勤めるようになった初期の頃の話である。

同僚だった K さんが物理の学生実験を現代的なものに一新したいので、私にも協力してくれないかと頼まれた。このとき K さんは電気回路等については、自分は得意でないから、力学的な新しい実験テーマを考えると行って、ばねにかなり重い錘をつけた、振動実験を二人の技官の人たちと始めた。

ばねの長さは自然長でも 1m を越えていたと思う。それに大きさも 5~10cm くらいの錘をつけた、振動実験である。K さんと技官の方たちはいろいろ試行錯誤をくりかえしたが、錘はもちろん、ばねもいろいろなモードで振動するので、クリアカットな学生実験の提案とはならず、いつかこのテーマは沙汰やみとなった。

しかし、えらい教授の先生方には学生実験の更新の意向を表明していたので、引っ込みがつかなくなり、別に私が学生実験の革新を言い出したわけではないが、責任をとる形となった。宇宙線研究者だった、H さんと私とで構想を練って、二極真空管とか三極真空管等をつかった、整流回路と増幅回路や発振回路を H さんが作製し、これを用いた学生実験の指導書をひと夏かかって私が書き上げた。

オシロスコープでこれらの回路の電圧波形を観測し、記録して二極管、三極管の特性を実感して理解するという学生実験だった。

この新しい学生実験を 2, 3 年は行ったと思うが、数年していまさら真空管回路でもないだろうとの H さんの提案で、二極管はダイオードに、三極管はトランジスターにおきかわった学生実験となった。これらの学生実験の回路はまた H さんが製作してくれたが、この学生実験の指導書を当時まだエアコンのなかった研究室でまたひと夏かけてつくった。

この実験の指導書ができた後で、ボスの N 教授から「学生実験の指導書をつくってくれてありがとう」という言葉をかけてもらった。

ところで、世戸さんがここで書かれているように、こんなにばね振子の振動の解析が面倒なら、K さんがばね振子の実験に音を上げたのもわかる気がする。

末尾であるが、今回もまた編集委員の世戸さんのおかげで私のエッセイの凡ミスをたくさん指摘してもらった。エッセイに書くべきであったろうが、御礼を書く機会を失したのでこちらで御礼を申し上げる。

(矢野 忠)