数学・物理通信

13 巻 6 号　　2023 年 12 月

編集　新関章三・世戸憲治・矢野　忠

2023 年 12 月 16 日

目次 (Contents)

錘付きばね懸垂線の振動問題

世戸 憲治 *

Oscillation Problem of Spring Catenary with a Weight

Kenji SETO*

1　はじめに

前回の「質量を持つばねで作られた懸垂線」(『数学・物理通信』13 巻 5 号) を書いているうちに，ばねの中央に錘を付けたときはどうなるか，さらに，このばね懸垂線を，2 年ほど前に書いた「懸垂線の振動問題 (1),(2)」(『数学・物理通信』11 巻 5 号，11 巻 7 号) のときと同じように，懸垂線が横たわる面に対し垂直方向に振動させるとどのようになるかを解析してみたのが今回のものである．手法としては，前回のものをそのまま引き継いではいるが，問題がだんだん複雑化する分だけ，計算自体も難しいものになっている．

2　錘付きばね懸垂線

自然長 2ℓ, ばね定数 $k/2$, 線密度 ρ のばねの中央に質量 $2m$ の錘を付けたものを用意する．前回説明したようにばねの自然長とばね定数は反比例の関係にあるので，このばねの長さ ℓ の部分のばね定数は k である．また，ここで用いる錘は大きさのない質点として扱うものとする．この自然長 2ℓ のばねを，重力下で，水平な台の上に直線状におき，その真ん中，つまり錘の位置を原点としてばねに沿って x 軸を，また，鉛直上方向に y 軸をとる．したがって，ばねは x の区間 $[-\ell,\ \ell]$ に存在することになる．このばねの両端を同じ高さに持ち上げて，ばねを懸垂線の形にする．このとき，持ち上げる前に x のところにあったばねの部分が x 軸方向に移動した距離を $U(x)$, また，y 軸方向に移動した距離を $V(x)$ とする．ただし，持ち上げたときの両手の間隔を $2r$ とするが，ばねは伸びるので，これはばねの元の長さ 2ℓ とは無関係に，これより大きくても，小さくてもよいものとする．

このとき，懸垂線を形成したときの流通座標を (ξ,η) とすると，

$$\xi = x + U(x), \qquad \eta = V(x) \tag{2.1}$$

となる．これから，このばねを持ち上げたあとの任意の点における傾き角 θ を持ち上げる前の座標 x で表すと，

$$\tan\theta(x) = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{V'(x)}{1+U'(x)} \tag{2.2}$$

となる．ここに，U, V に付けたプライムは x 微分を表す．また，この点における張力を求めるには，dx を微小長さとして，持ち上げる前の区間 $(x,\ x+dx)$ が持ち上げられたあとの長さは，

$$\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = dx\sqrt{(1+U')^2 + V'^2} \tag{2.3}$$

* 北海学園大学名誉教授

となるので，伸びた長さは $dx\sqrt{(1+U')^2+V'^2}-dx$ となり，これに区間 $(x,\ x+dx)$ のばね定数 $(\ell/dx)k$ を掛けたものがこの点での張力 $T(x)$ となり，

$$T(x)=k\ell\bigl[\sqrt{(1+U')^2+V'^2}-1\bigr] \tag{2.4}$$

と与えられる．ここまでの (2.2) (2.4) 式は前回と同じである．

ここで，錘の釣り合いを考える．この錘のすぐ正の側での傾き角と張力を，それぞれ，θ_0, T_0 とする．錘の大きさはゼロとしているので，当然のことながら，これらは，

$$\theta_0=\theta(+0),\qquad T_0=T(+0) \tag{2.5}$$

という関係になる．錘は正負の両側から同じ大きさの上向き張力 $T_0\sin\theta_0$ で支えられているので，重力加速度を g として，その釣り合い方程式は

$$2T_0\sin\theta_0=2mg \tag{2.6}$$

となる．

つぎに，ばねの釣り合いを考えてみる．このとき，当然のことながらばねの形は y 軸に関し左右対称となるので，正の側だけで考える．いま正の特定の x を考え，区間 $(0,\ x)$ を考える．この部分の質量は ρx であり，その重量は ρxg となるので，水平方向，鉛直方向の釣り合い式は

$$T(x)\cos\theta(x)=T_0\cos\theta_0,\qquad T(x)\sin\theta(x)=T_0\sin\theta_0+\rho xg=T_0\cos\theta_0\Bigl(\tan\theta_0+\frac{x}{a}\Bigr) \tag{2.7}$$

で与えられる．ここで，第 2 式の最右辺にある a は長さの次元を持つ量で，

$$a=\frac{T_0\cos\theta_0}{\rho g} \tag{2.8}$$

で定義する．これら 2 式の比をとると，

$$\tan\theta(x)=\tan\theta_0+\frac{x}{a} \tag{2.9}$$

となる．また， (2.7) の 2 式を，それぞれ，2 乗してから，辺々を加えると，

$$T(x)^2={T_0}^2\cos^2\theta_0\Bigl[1+\Bigl(\tan\theta_0+\frac{x}{a}\Bigr)^2\Bigr] \tag{2.10}$$

となり，張力はすべての点で正なので，これから，

$$T(x)=T_0\cos\theta_0R(x) \tag{2.11}$$

を得る．ここに，以下の数式の簡素化のため，

$$R(x)=\sqrt{1+\Bigl(\tan\theta_0+\frac{x}{a}\Bigr)^2} \tag{2.12}$$

と置くことにする．

つぎに，(2.2) (2.9) 式から $\tan\theta(x)$ を消去して，

$$V'=(1+U')\Bigl(\tan\theta_0+\frac{x}{a}\Bigr) \tag{2.13}$$

となり，これを (2.4) 式右辺に代入し，(2.11) (2.12) 式を用いると

$$T_0 \cos\theta_0 R(x) = k\ell\Big[(1+U')R(x) - 1\Big] \tag{2.14}$$

となるので，これから，U' を求めると，

$$U'(x) = \frac{1}{R(x)} + \gamma - 1, \qquad \gamma = \frac{T_0\cos\theta_0}{k\ell} \tag{2.15}$$

となる．ここに，無次元量 γ をこの第 2 式で定義する．これを積分して，変位 $U(x)$ に対し，

$$U(x) = a\Big[\operatorname{arc\,sinh}\big[\tan\theta_0 + (x/a)\big] - \operatorname{arc\,sinh}(\tan\theta_0)\Big] + (\gamma-1)x \tag{2.16}$$

を得る．ここでは，$U(0) = 0$ となるように積分定数を決めた．また，(2.15) 式を (2.13) 式に代入して，

$$V'(x) = \Big(\tan\theta_0 + \frac{x}{a}\Big)\Big(\frac{1}{R(x)} + \gamma\Big) \tag{2.17}$$

となるので，これを積分し，変位 $V(x)$ に対し，

$$V(x) = aR(x) + \gamma\Big[(\tan\theta_0)x + \frac{1}{2a}x^2\Big] + y_0 \tag{2.18}$$

を得る．最後に付けた y_0 は積分定数であるが，力学的な意味はない．

最後に残る仕事はパラメータ a, T_0, θ_0 の決定である．これには，ばねを持ち上げたときの両手の間隔が $2r$ であることを使う．これは，(2.1) 式で $x = \ell$ としたとき，$\xi = \ell + U(\ell) = r$ となること，すなわち，(2.16) 式を用いて，

$$a\Big[\operatorname{arc\,sinh}\big[\tan\theta_0 + (\ell/a)\big] - \operatorname{arc\,sinh}(\tan\theta_0)\Big] + \gamma\ell = r \tag{2.19}$$

となることを使う．a の定義 (2.8) 式と錘の釣り合い (2.6) 式から，$\tan\theta_0$ は

$$\tan\theta_0 = \frac{m}{\rho\, a} \tag{2.20}$$

と a で表され，また，γ もその定義式 (2.15) と (2.8) 式から

$$\gamma = \frac{\rho\, ag}{k\ell} \tag{2.21}$$

と a を用いて表わされるので，(2.19) 式から a だけを未知数とする方程式

$$a\Big[\operatorname{arc\,sinh}\Big(\frac{m+\rho\,\ell}{\rho\, a}\Big) - \operatorname{arc\,sinh}\Big(\frac{m}{\rho\, a}\Big)\Big] + \frac{\rho\, ag}{k} = r \tag{2.22}$$

を得る．この式からパラメータ a は一意的に決まるであろう．a が決まると，(2.20) 式から θ_0 が，また，(2.21) 式から γ が決まる．さらに，a の定義式 (2.8) から T_0 が決まる．

なお，ここでの計算は，x を正としてのものであるが，x が負の領域に拡張するには，$U(x)$ については奇関数，$V(x)$, $T(x)$, $R(x)$ については偶関数になるように拡張するものとする．

3　横振動方程式の導入とその解法

3.1　方程式の導入

この 3 節では，懸垂線が存在する x-y 平面に対し垂直方向に微小振動する場合を考える．この方向を z 方向とする．いま，ばねを持ち上げる前の点 $\mathrm{P}(x,\,0,\,0)$ が，ばねを持ち上げたとき，(2.1) 式の流通座標で表して，点 $\mathrm{P}'(\xi,\ \eta,\ 0)$ に移動し，さらに振動によって，時刻 t に，z 方向に $W(x,t)$ 移動し，$\mathrm{P}''(\xi,\ \eta,\ W(x,t))$ になったとする．ただし，ここでは，y 軸に対し左右対称な振動のみを扱うことにする．したがって，関数 $W(x,t)$ は x について偶関数とし，以下，x の正の部分で考えることにする．

つぎに，この点における張力の z 方向成分を求めるため，dx を微小長さとして，点 $\mathrm{Q}(x+dx,\ 0,\ 0)$ を考える．これは持ち上げたあとでは，$\mathrm{Q}'(\xi+d\xi,\ \eta+d\eta,\ 0)$ となり，さらに振動しているときは点 $\mathrm{Q}''(\xi+d\xi,\ \eta+d\eta,\ W(x+dx,t))$ となる．ここで，線分 $\mathrm{P}''\mathrm{Q}''$ を，点 P'' が点 P' と重なるまで平行移動したときの線と元の線分 $\mathrm{P}'\mathrm{Q}'$ がなす角度を ϕ とすると，

$$\tan\phi = \frac{W(x+dx,t)-W(x,t)}{\sqrt{d\xi^2+d\eta^2}} \tag{3.1}$$

と与えられる[1)]．これは，$dx\to 0$ の極限では，(2.1) 式から

$$\tan\phi = \frac{\partial_x W(x,t)}{\sqrt{(d\xi/dx)^2+(d\eta/dx)^2}} = \frac{\partial_x W(x,t)}{\sqrt{[1+U'(x)]^2+V'(x)^2}} \tag{3.2}$$

となる．この式の分母の平方根の部分は，(2.4) 式から $1+T(x)/(k\ell)$ となり，さらに，(2.11) 式の $T(x)$, (2.15) 式の γ を用いると，$1+\gamma R(x)$ となるので，

$$\tan\phi = \frac{\partial_x W(x,t)}{1+\gamma R(x)} \tag{3.3}$$

となる．角度 ϕ が求まると張力 $T(x)$ の z 方向成分 $T(x)\sin\phi$ が，この式と (2.11) 式から求められる．ここでは，変位 W は小さいとし，したがって角度 ϕ も小さいものとして近似式 $\sin\phi\cong\tan\phi$ を用いることにして，張力の z 成分は，

$$T(x)\sin\phi \cong T(x)\tan\phi = \frac{T_0\cos\theta_0 R(x)}{1+\gamma R(x)}\partial_x W(x,t) \tag{3.4}$$

とおくことにする．

つぎに，この変位 W に対する波動方程式を考える．Δx を微小長さとして，ばねを持ち上げる前の区間 $[x,\ x+\Delta x]$ の部分を考える．この部分の質量は $\rho\Delta x$ であり，これに z 方向加速度を掛けたものは，その部分に作用する z 方向の力となるので，

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = \left[\frac{T_0\cos\theta_0 R(x+\Delta x)}{1+\gamma R(x+\Delta x)}\partial_x W(x+\Delta x,t)\right] - \left[\frac{T_0\cos\theta_0 R(x)}{1+\gamma R(x)}\partial_x W(x,t)\right] \tag{3.5}$$

となる．これは $\Delta x\to 0$ の極限で

$$\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{R(x)}{1+\gamma R(x)}\frac{\partial W(x,t)}{\partial x}\right],\qquad c=\sqrt{\frac{T_0\cos\theta_0}{\rho}} \tag{3.6}$$

[1)] この式のより詳しい導き方は，前回の「懸垂線の振動問題 (2)」(「数学・物理通信」11 巻 7 号) (3.1) 式を参照のこと．

となり，これが変位 W に対する波動方程式となる．ここに，c は速度の次元を持つ量で，この第 2 式で定義する．

もう一つ，錘に対する振動方程式が必要である． そのために，(2.12) 式から $R(+0) = 1/\cos\theta_0$ となるので，$x = +0$ における ϕ を ϕ_0 としたとき，(3.3) および (2.15) 式から

$$\tan\phi_0 = \frac{[\partial_x W(x,t)]_{x=+0}}{1+\delta}, \qquad \delta = \frac{\gamma}{\cos\theta_0} = \frac{T_0}{k\ell} \tag{3.7}$$

となる．ここで，無次元数 δ をこの第 2 式で定義する．錘には，x の正の側で考えると，大きさ T_0 の張力が，z 方向に対する角度 ϕ_0 で作用するので，その z 方向成分は $T_0 \sin\phi_0$ であり，先と同じく $\sin\phi_0$ を $\tan\phi_0$ で近似し，系の対称性から，x の負の側でも同じ大きさの力が作用するので，その運動方程式は

$$2m\frac{\partial^2 W(0,t)}{\partial t^2} = 2T_0\frac{[\partial_x W(x,t)]_{x=+0}}{1+\delta} \tag{3.8}$$

となる．これが $x = +0$ における境界条件となる．さらにもう一つ，$x = \pm\ell$ の端が固定されているので，

$$W(\pm\ell, t) = 0 \tag{3.9}$$

という境界条件が付く．

3.2 波動方程式の解法

ここでの波動方程式を解くために，ばね振動の変位 $W(x,t)$ は座標 x の関数 $X(x)$ と時間 t の関数部分に変数分離されるものとする．また，その時間の部分の関数は，適当な角振動数 ω を用いた三角関数で書けるものとし，

$$W(x,t) = X(x)\big[\sin(\omega t) \qquad \text{or} \qquad \cos(\omega t)\big] \tag{3.10}$$

とおく．この変数分離で，方程式 (3.6), および，境界条件 (3.8) (3.9) は

$$c^2\frac{d}{dx}\left[\frac{R(x)}{1+\gamma R(x)}\frac{dX(x)}{dx}\right] = -\omega^2 X(x) \tag{3.11}$$

$$\frac{T_0}{1+\delta}\frac{dX(x)}{dx}\Big|_{x=+0} = -\omega^2 m X(0), \qquad\qquad X(\pm\ell) = 0 \tag{3.12}$$

となる．この方程式は Sturm-Liouville 型のものではあるが，これまでに見たこともない形なので，簡単に解けるとは思えない．まず，変数を x から p に

$$\tan\theta_0 + \frac{x}{a} = \sinh p \tag{3.13}$$

と変換すると，(2.12) 式の $R(x)$, および，微分式，

$$R(x) = \cosh p, \qquad \frac{d}{dx} = \frac{dp}{dx}\frac{d}{dp} = \frac{1}{a\cosh p}\frac{d}{dp} \tag{3.14}$$

を用いて，方程式 (3.11) は，

$$(1+\gamma\cosh p)\frac{d^2X}{dp^2} - \gamma\sinh p\frac{dX}{dp} = -\Big(\frac{a\omega}{c}\Big)^2\cosh p(1+\gamma\cosh p)^2 X \tag{3.15}$$

となる．ここで変数を，p から q へのさらなる変換，

$$q = \tanh(p/2) \tag{3.16}$$

を施すと，半角公式，および，微分式，

$$\sinh p = \frac{2q}{1-q^2}, \qquad \cosh p = \frac{1+q^2}{1-q^2}, \qquad \frac{d}{dp} = \frac{dq}{dp}\frac{d}{dq} = \frac{1-q^2}{2}\frac{d}{dq} \tag{3.17}$$

を用いて，方程式は，

$$(1-q^2)^3\big[1+\gamma-(1-\gamma)q^2\big]\frac{d}{dq}(1-q^2)\frac{dX(q)}{dq}-4\gamma q(1-q^2)^3\frac{dX(q)}{dq} = -\lambda^2(1+q^2)\big[1+\gamma-(1-\gamma)q^2\big]^2X(q) \tag{3.18}$$

となる．ここで，独立変数 q の関数としての従属変数 X を，改めて，$X(q)$ と書いた．また，無次元数 λ は

$$\lambda = \frac{2a\omega}{c} \tag{3.19}$$

と定義する．この方程式 (3.18) で，$X(q) = q^\alpha$ とおいてみると，その決定方程式は，$\alpha(\alpha-1) = 0$ となるので，この方程式は，定数項から始まる級数，あるいは，q の 1 次の項から始まる級数で解くことができる．そこで，従属変数 $X(q)$ を

$$X(q) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n q^n \tag{3.20}$$

と展開し，両辺の冪を揃えて係数 D_n 間の漸化式を作る．これは退屈な長い計算になってしまうが，結果は，$n \geq 2$ なる n に対し，

$$\begin{aligned}&(1+\gamma)n(n-1)D_n + \Big[\lambda^2(1+\gamma)^2-(n-2)\big[(5+3\gamma)n-13-3\gamma\big]\Big]D_{n-2}\\ &+\Big[\lambda^2(3\gamma^2+2\gamma-1)+(n-4)\big[(10+2\gamma)n-42+6\gamma\big]\Big]D_{n-4}+\Big[\lambda^2(3\gamma^2-2\gamma-1)-(n-6)\big[(10-2\gamma)n-58+26\gamma\big]\Big]D_{n-6}\\ &+\Big[\lambda^2(1-\gamma)^2+(n-8)\big[(5-3\gamma)n-37+27\gamma\big]\Big]D_{n-8}-(1-\gamma)(n-10)(n-9)D_{n-10} = 0\end{aligned} \tag{3.21}$$

という 6 項関係式になる．この式で，添字 n が負になる D_n はすべてゼロとする．この漸化式から，D_0，D_1 を初期値として，すべての係数 D_n が決まる．ここでは，$D_\alpha = 1$，$D_{1-\alpha} = 0$，$(\alpha = 0, 1)$ として係数 D_n を求めてから，(3.20) 式の級数 $X(q)$ を求める．さらに，(3.13) 式と (3.17) の第 1 式から $\sinh p$ を消去すると，変数 q の 2 次式になるので，この方程式を解くと，その正根は

$$q = \frac{R(x)-1}{\tan\theta_0 + (x/a)} \tag{3.22}$$

と求まる．ここで $R(x)$ は (2.12) 式で定義したものである．これを用いて，変数を q から x に戻した解を，$F_\alpha(x, \lambda)$，$(\alpha = 0, 1)$ と書くことにする．これで形式的ではあるが，2 つの独立解が求まるので，方程式 (3.11) の一般解は，A, B を任意定数として，

$$X(x, \lambda) = AF_0(|x|, \lambda) + BF_1(|x|, \lambda) \tag{3.23}$$

と書ける．x に絶対値を付けたのは，強制的に偶関数にするためである．また，以後の利便性のため，(3.19) 式で定義した λ 依存性を明記する．

つぎに，境界条件である (3.12) の第 1 式において，λ の定義 (3.19) 式，および，c の定義 (3.6) の第 2 式を用いて，ω を λ で表わすようにすると，

$$b\frac{dX(x,\lambda)}{dx}\Big|_{x=+0}=-\lambda^2X(0,\lambda),\qquad b=\frac{4a^2\rho}{(1+\delta)m\cos\theta_0} \tag{3.24}$$

となる．ここに，長さの次元を持つ量 b をこの第 2 式で定義する．この式に (3.23) 式の $X(x,\lambda)$ を代入すると，

$$\big[bF_0'(+0,\lambda)+\lambda^2F_0(0,\lambda)\big]A+\big[bF_1'(+0,\lambda)+\lambda^2F_1(0,\lambda)\big]B=0 \tag{3.25}$$

となる．ここに，プライムは x での微分を表す．以後，この式が成り立つように，係数 A, B を

$$A=\big[bF_1'(+0,\lambda)+\lambda^2F_1(0,\lambda)\big],\qquad B=-\big[bF_0'(+0,\lambda)+\lambda^2F_0(0,\lambda)\big] \tag{3.26}$$

と選ぶことにし，(3.23) 式を

$$X(x,\lambda)=\big[bF_1'(+0,\lambda)+\lambda^2F_1(0,\lambda)\big]F_0(|x|,\,\lambda)-\big[bF_0'(+0,\lambda)+\lambda^2F_0(0,\lambda)\big]F_1(|x|,\,\lambda) \tag{3.27}$$

と書いておく．

3.3 固有値，固有関数とその規格化

もう一つの境界条件である (3.12) の第 2 式を，(3.27) の $X(x,\lambda)$ に適用すると，

$$\big[bF_1'(+0,\lambda)+\lambda^2F_1(0,\lambda)\big]F_0(\ell,\,\lambda)-\big[bF_0'(+0,\lambda)+\lambda^2F_0(0,\lambda)\big]F_1(\ell,\,\lambda)=0 \tag{3.28}$$

となる．これから λ の値が決まる．これは飛び飛びに決まるであろう．この λ を正の小さい方から λ_i, $(i=1,2,3,\cdots)$ とし，固有値とする．以後，この意味で，この式を固有値方程式と呼ぶ．また，このときの関数を $X(x,\lambda_i)$, $(i=1,2,3,\cdots)$ として，これを固有関数とする．

ここで，波動方程式 (3.6) と，錘の運動方程式 (3.8) をまとめて書くために，ばねと錘を含めた線密度 $\rho(x)$ を

$$\rho(x)=2m\delta(x)+\rho \tag{3.29}$$

と定義しておく．ここに，$\delta(x)$ は Dirac デルタ関数である．これを用いると (3.6) (3.8) 式は 1 本の方程式

$$\rho(x)\frac{\partial^2W(x,t)}{\partial t^2}=T_0\cos(\theta_0)\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{R(x)}{1+\gamma R(x)}\frac{\partial W(x,t)}{\partial x}\Big] \tag{3.30}$$

で書くことができる．実際にこの式を x について，-0 から $+0$ まで積分し，∂_xW が奇関数であること，および $R(0)=1/\cos(\theta_0)$ を使うと，(3.8) 式が再現される．さらに，この式で (3.10) 式の変数分離を行うと，

$$-\lambda^2\rho(x)X(x)=4a^2\rho\frac{d}{dx}\Big[\frac{R(x)}{1+\gamma R(x)}\frac{dX(x)}{dx}\Big] \tag{3.31}$$

となる．ここで，λ の定義式 (3.19)，および，c の定義式 (3.6) を用いて，ω を λ で表すようにした．

ここで，固有値とは限らない 2 個の λ を λ, λ' とし，これらに対応する関数 $X(x)$ を $X(x,\lambda)$, $X(x,\lambda')$ とする．これら，2 個の関数は，(3.31) 式を満たしているので，

$$-\lambda^2\rho(x)X(x,\lambda)=4a^2\rho\frac{d}{dx}\Big[\frac{R(x)}{1+\gamma R(x)}\frac{dX(x,\lambda)}{dx}\Big],\qquad -\lambda'^2\rho(x)X(x,\lambda')=4a^2\rho\frac{d}{dx}\Big[\frac{R(x)}{1+\gamma R(x)}\frac{dX(x,\lambda')}{dx}\Big] \tag{3.32}$$

と書ける．この第 1 式に $X(x,\lambda')$ を掛け，第 2 式に $X(x,\lambda)$ を掛けて，辺々を引き算すると，

$$-(\lambda^2-\lambda'^2)\rho(x)X(x,\lambda)X(x,\lambda') = 4a^2\rho\frac{d}{dx}\Big[X(x,\lambda')\frac{R(x)}{1+\gamma R(x)}\frac{dX(x,\lambda)}{dx} - X(x,\lambda)\frac{R(x)}{1+\gamma R(x)}\frac{dX(x,\lambda')}{dx}\Big] \tag{3.33}$$

となるので，この両辺を $-\ell$ から $+\ell$ まで積分すると，

$$\int_{-\ell}^{\ell}\rho(x)X(x,\lambda)X(x,\lambda')dx = -\frac{4a^2\rho}{\lambda^2-\lambda'^2}\Big[X(x,\lambda')\frac{R(x)}{1+\gamma R(x)}\frac{dX(x,\lambda)}{dx} - X(x,\lambda)\frac{R(x)}{1+\gamma R(x)}\frac{dX(x,\lambda')}{dx}\Big]_{-\ell}^{\ell} \tag{3.34}$$

となる．ここで，λ, λ' が固有値 λ_i, λ_j となるときは，(3.12) の第 2 式が成立するので，この式右辺の大括弧の部分はゼロとなる．したがって，もし，$\lambda_i \neq \lambda_j$ のときは右辺がゼロとなり，異なる固有値に属する固有関数同士の直交性が証明される．同じ固有値になるときは，初めに，$\lambda' = \lambda_i$ とおき，その後，$\lambda \to \lambda_i$ の極限をとる．結果として，固有関数の直交性の式

$$\int_{-\ell}^{\ell}\rho(x)X(x,\lambda_i)X(x,\lambda_j)dx = {N_i}^2\delta_{i,j} \tag{3.35}$$

を得る．ここに，規格化定数 ${N_i}^2$ を

$${N_i}^2 = \frac{4a^2\rho}{\lambda_i}\Big[\frac{\partial X(\ell,\lambda)}{\partial\lambda}\Big]_{\lambda=\lambda_i}\Big[\frac{R(\ell)}{1+\gamma R(\ell)}\Big]\Big[\frac{dX(x,\lambda_i)}{dx}\Big]_{x=\ell} \tag{3.36}$$

と定義する．この式を求める段階で，$X(x,\lambda_i)$ が偶関数，その x 微分が奇関数であることを用いた．

3.4 初期値問題

ここまで来ると，初期値問題に関しては，前回の論文と同じにできる．ここでは，錘に衝撃を与えて，初速度 v_0 を与えるものとする．このときの初期条件は，

$$W(x,0)=0, \qquad \rho(x)\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 2mv_0\delta(x) \tag{3.37}$$

とする．波動関数 $W(x,t)$ は固有関数 $X(x,\lambda_i)$ と時間部分 $\sin(\omega_i t)$ との積の重ね合わせとなるので，C_i を係数として，

$$W(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i X(x,\lambda_i)\sin(\omega_i t) \tag{3.38}$$

と表される．これで初期条件 (3.37) の第 1 式は満たしているので，第 2 式を適用すると，

$$\rho(x)\sum_{i=1}^{\infty} C_i\omega_i X(x,\lambda_i) = 2mv_0\delta(x) \tag{3.39}$$

となる．この両辺に $X(x,\lambda_j)$ を掛け，x で積分すると，固有関数の直交性 (3.35) 式が使え，係数 C_i が

$$C_i = \frac{2mv_0X(0,\lambda_i)}{\omega_i{N_i}^2} \tag{3.40}$$

と決まるので，これを (3.38) 式に戻して，

$$W(x,t) = 2mv_0\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X(0,\lambda_i)}{\omega_i{N_i}^2}X(x,\lambda_i)\sin(\omega_i t) \tag{3.41}$$

と求められる．

4　数値計算例

ここでは，数値計算例として，適当ではあるが，以下の数値パラメータを用いる．

$$\ell = 1\,\mathrm{m}, \quad r = 1.5\,\mathrm{m}, \quad m = 1\,\mathrm{kg}, \quad \rho = 1\,\mathrm{kg/m}, \quad k = 10\,\mathrm{N/m}, \quad g = 9.8\,\mathrm{m/s}^2. \tag{4.1}$$

これは，ばねを自然長以上に伸ばして持ち上げた場合である．この設定で方程式 (2.22) を a について解き，さらにその他のパラメータを求めると，小数点以下 4 桁の精度で，

$$a = 0.9689\,\mathrm{m}, \quad b = 2.2823\,\mathrm{m}, \quad c = 3.0814\,\mathrm{m/s}, \quad \gamma = 0.9495, \quad \delta = 1.3645, \quad \theta_0 = 0.8011, \quad T_0 = 13.6457\,\mathrm{N} \tag{4.2}$$

と求められる．このときの懸垂線の形を図 1 に示す．この図は，(2.16) (2.18) 式の U, V をもとに，(2.1) 式の流通座標 (ξ, η) を求め描いたものである．この図で，x 軸上の太線は，ばねを持ち上げる前のもの，その上の太線は，持ち上げた後のものである．この懸垂線は真ん中に錘が付いているので，その最下点は尖点になっている．

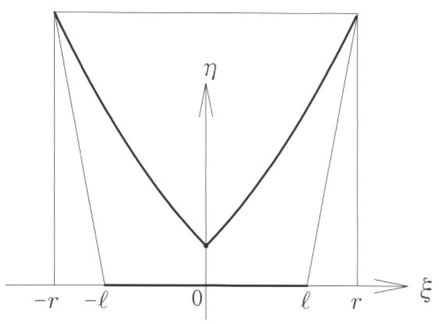

図 1　錘付きばね懸垂線

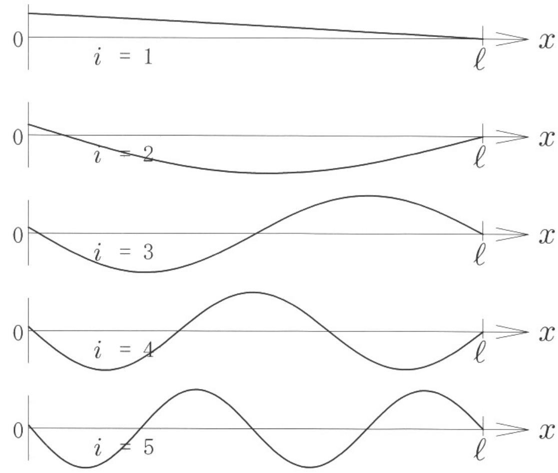

図 2　固有関数

つぎに，懸垂線が存在する面に対し横方向の振動を解析する．(3.28) の固有値方程式を解いて，固有値を求めると，その初めの 8 個は，

$$\lambda_i = 1.3689, \quad 5.4018, \quad 10.1762, \quad 15.0739, \quad 20.0078, \quad 24.9568, \quad 29.9135, \quad 34.8755 \tag{4.3}$$

と，ほぼ 5 の間隔で並ぶ．これ以上の固有値を求めようとすると，数値的に不安定になってしまい，ここで示す 8 個が限界である．この固有値から，(3.27) (3.36) 式を用いて規格化された固有関数 $X(x, \lambda_i)/N_i$ を求めたものを，5 個だけ，図 2 に示す．この図の番号 i は，モード (固有値) 番号である．どの固有関数もモード番号と同じ個数のゼロ点を持つ．なお，ここでは，x の正の側だけを描いたが，負の側は，これらグラフを y 軸に対し対称に移したものになる．したがって，$x = 0$ の点は一般に尖点になる．

つぎに，(3.41) 式を用いて，波動関数 $W(x, t)$ を求めたものを次ページの図 3 に示す．この図は水平右方向に座標 x，斜め上方向に時間 t，上方向に変位 W をとって，立体的に示したものである．また，この図では，陰

になって見えないところを描かないように陰線処理をして描いている．x の範囲は 0 から 1m, t の範囲は 0 秒から 3 秒 である．なお，W 軸に関しては任意スケールである．

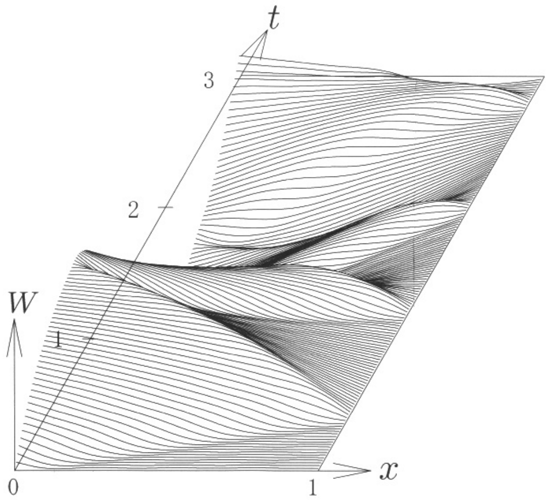

図 3 波動関数 $W(x,t)$ のグラフ

このグラフを見ると，周期がおよそ 3 秒の波と，それに重なるように周期がおよそ 0.7 秒の波が見える．これは，第 1 モード，第 2 モードの固有関数に対応するものと考えられる．(4.3) 式の λ_1, λ_2 から，これらモードの振動周期を求めると，

$$\frac{2\pi}{\omega_1}=\frac{4a\pi}{c\lambda_1}=2.8865\,\mathrm{s},\qquad \frac{2\pi}{\omega_2}=\frac{4a\pi}{c\lambda_2}=0.7314\,\mathrm{s} \tag{4.4}$$

となって，グラフから見るものと良く一致している．

5 おわりに

今回のものは，「はじめに」のところで述べたように，前回，および，前々回のものを素直に融合しただけのものである．したがって，計算方式自体は，特に新しいものはなく，すでに敷かれた軌道上を走るようなものであった．しかし，式自体は結構複雑化するのには悩まされ，特に，(3.18) (3.21) 式のような長たらしい式になると，これをプログラムするのも結構大変であった．しかし，結果としては，数値計算も含めてこれまでと同様，尤もらしい結果が得られたので，間違いはないものと確信する．

今回のもので，一つだけ気になった点がある．それは，波動方程式を求める段階で，座標を流通座標の ξ ではなく，ばねを持ち上げる前の座標 x で，方程式を記述したことである．これは，本来ならば，座標 ξ で表すべきとも考えられる．しかし，それを実行しようとすると，(2.1) の第 1 式の $U(x)$ に (2.16) 式を代入して x について解くことになる．これは超越方程式になってしまい一般的には解析的に解くことは不可能である．唯一解けるのは，$k\to\infty$ とした $\gamma=0$ となる場合だけである．これでは，ばねではなく，鎖の懸垂線になってしまう．結果としてここでは，座標 x で記述する方程式とせざるを得なかった．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，細かな点に至るまでいくつかのコメントをいただきました．先生に心から感謝いたします．

視力の基準（改訂版）

矢野　忠[*1]

Standard of Visual Acuity (Revised Version)

Tadashi YANO[*2]

まえおき

これはすでに [1] に発表したものである．視力の単位よりも角度を測る弧度法の説明を前にもってきてわかりやすくなるようにした．他にも分数視力の説明を修正した．

1　はじめに

今年 (2010 年) の 2 月に 2 週間ほどにわたって，英語の翻訳の仕事を引き受けた．これはドイツの再生医学についてのある病院のホームページの翻訳であったが，その中に視力に関することがあり，その中で外国では視力が 5/6 とか 6/5 とかの分数で表されることを知った．

私は眼圧が高いために毎月 1 回眼の検診に訪れている．その眼科で視力検査を 5 月にしてくれた，看護師さんに分数で視力を表すことを知っているかと尋ねたら，知っていないとのことだったので，調べておいてくれませんかと依頼をした．その直後の医師の先生の診察のときに外国での分数で視力を表すこととか，そもそも視力は何を基準にして測っているかという説明をした本の一部のコピーとその簡単な説明をしてもらった．そして帰り際に何でもわからないことがあれば聞いて下さいといわれた．

眼科に勤めている看護師さんは分数で表された視力については知らなかったが，さすがに眼科の医師である先生は医学部で学んだらしく知っていた．

そういえば，視力は何を基準にして測っているのか，いままでどこでも聞いたことがない．中学校のころに保健体育の授業があったことは覚えているが，視力の単位について聞いたことはついぞなかった．

眼科医は専門家であるから，視力をどう定義しているかとか，分数視力とかあることを知っているとしても，普通の人である私たちはそういうことについて知っていない．それでそのことについてこのエッセイで述べてみたい．

では 2 節の弧度法による角度の定義からはじめよう．

2　弧度法による角度

角度を測るときに度数法で測ることはだれでも知っているが，弧度法とは何だろうか．

図 2.1 を見てほしい．半径 r の円があり，一つの中心角 θ が描かれている。この中心角 θ に対する円弧の長さが ℓ であるとき、その中心角 θ を

$$\theta = \frac{\ell}{r} \tag{2.1}$$

で定義する．このように定義された角度を弧度法で測った角といい，単位はラディアン (rad) である（図 2.1）．円弧の長さ ℓ がちょうど円の半径 r に等しいとき，1 rad $= r/r \sim 57.3°$ である．すなわち，1 rad を度数法で測っ

[*1] 元愛媛大学工学部
[*2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

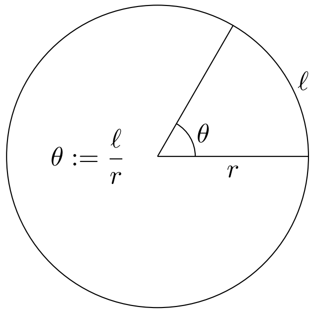

図 2.1　弧度法による角度の定義

たときの近似値は 57.3° である[*3].

3　視力の単位

視力とは物体の形を見分ける眼の能力である．その程度を表すのに視力の単位がある．それは 1909 年に国際的に協定して取り決められたものである．

図 3.1 の右に示したようなＣの形の環をランドルト (Landoldt) 環という[*4]．この環の直径が 7.5 mm で環の線の太さと切れ目の長さがいずれも 1.5 mm の環を **5 m 離れたところから見て**，字の切れ目が上下左右のどちら側にあるかを見分けることができて，それよりも小さくなると見分けられないような視力を 1.0 としてこれを視力の単位としたものである．

このランドルト環の切れ目の最小視角（図 3.1 の左を参照）は 3.0×10^{-4}rad である[*5]．これは普通の度数法の角度でいえば，約 $1^{'}$ であるが，これはほぼであってもっと精確には $1^{'} = 2.91 \times 10^{-4}$rad である．そしてその個人が識別できる最小視角が 2 倍（すなわち，6.0×10^{-4}rad) になれば，このとき視力は 1/2=0.5 となる．これからわかるように視力は人の識別できる最小視角に反比例する．図 3.1 のランドルト環の直径が 10 倍大きくなると，それをようやく見分けることができるとき視力は 1/10=0.1 である．すなわち，環の大きさが 75 mm で 15 mm の切れ目がやっとわかる人は視力 0.1 である[*6].

日本では視力は 0.1 から 1.0 まで 0.1 刻みに測り，1.0 を越えると 1.2, 1.5, 2.0 と刻み目が粗くなって，全体では 13 段階で測られている．

式を用いて視力を表すことにしよう．視力を I で表し，その最小視角を θ で表すことにすれば，視力 I は最小視角 θ に反比例する．式で表すと

$$I \propto \frac{1}{\theta} \tag{3.1}$$

比例定数 k を用いて書くと

$$I = \frac{k}{\theta} \tag{3.2}$$

と表される．ここで，最小視角 θ は図 3.1 の左の図で示されているが，ちょっと説明が必要であろう．最小視角 θ は角度であるが，図 3.1 の視線の先のランドルト環の切れ目の長さ ℓ を目から視力表までの距離（検査距離という）r で割ったもので定義する．すなわち

$$\theta = \frac{\ell}{r} \tag{3.3}$$

[*3] 度数法と弧度法との関係については付録 1 を参照せよ．

[*4] ランドルトはフランスの眼科学者であった．

[*5] 急にこういう数値が出てくると思考停止におちいる方もおられるかもしれない．この数値の計算を付録 0 に示す．

[*6] 視力 0.1 の人の最小視角も付録 0 に計算してある．

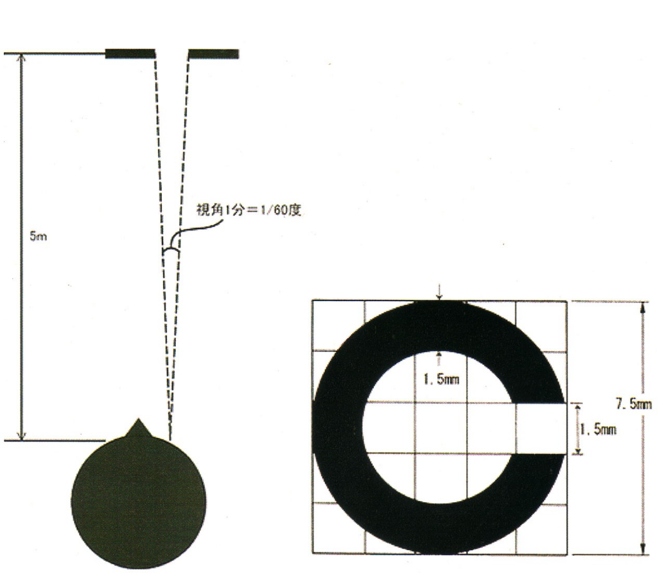

図 3.1　　視角とランドルト環

で定義する．この角度の定義を (3.2) に代入すれば，

$$I = k\frac{r}{\ell} \tag{3.4}$$

となる．ここで，$r = 5$ m, $\ell = 1.5$ mm $= 1.5 \times 10^{-3}$ m のときに視力が $I = 1$ であるから，比例定数 k は (3.4) から

$$k = I\frac{\ell}{r} = 1 \times \frac{1.5 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}}{5\ \mathrm{m}} = 0.3 \times 10^{-3} = 0.0003 \tag{3.5}$$

となる．この比例定数 k は実は単位として rad をもっている．しかし，rad の単位は次元をもたないので rad を書かないことが多い．

大抵の文献には，視力の単位の説明には検査距離が 5m で最小視角が 1 分角 $1^{'}$（精確にはほぼ 1 分角）のときの視力が 1.0 と書いてある．そのことを説明しよう．

この場合には角度を測る方法として，度数法を用いて測っている．度数法ではある一点のまわりの角度を 360° とする．角度の 1 分（角），1 秒（角）と 1 度とはつぎのような関係にある．ここで，時間の分，秒と区別するために後ろの（角）を添えたが，ここで用いられた分，秒が時間の分, 秒でなく角度を意味すると了解して，後は（角）はすべて省くことにする．

$$1\text{点のまわりの角度} = 360^\circ \tag{3.6}$$

$$1^\circ = 60^{'} \tag{3.7}$$

$$1^{'} = 60^{''} \tag{3.8}$$

ここで，$^\circ$, $^{'}$, $^{''}$ はそれぞれ度，分，秒を表す記号である．分，秒は時間の長さに対する呼び方と対応している．

4　試視力表

試視力表（単に視力表ともいう）のランドルト環の直径の大きさはどう決めているのだろうか．日本では視力は 0.1 から 0.1 刻みに 1.0 まであり，1.0 を越えると 1.2, 1.5, 2.0 と視力の大きさが粗くなっている．これらの視力

と最小視角とが反比例をしていると前に述べた．また，ランドルト環の直径の大きさ，環の太さと切れ目の大きさは 5:1:1 となっている（図 3.1 の右図を参照)．

視力 1.0 のときに環の直径が 7.5 mm であるから，視力 0.1, 0.2, 0.3 のときには環の直径は

$$7.5 \times \frac{1}{0.1} = 75 \text{ mm} \tag{4.1}$$

$$7.5 \times \frac{1}{0.2} = 37.5 \text{ mm} \tag{4.2}$$

$$7.5 \times \frac{1}{0.3} = 25 \text{ mm} \tag{4.3}$$

となる．以下同様である．視力 1.2 なら環の直径は

$$7.5 \times \frac{1}{1.2} = 6.25 \text{ mm} \tag{4.4}$$

である．試視力表から 5 m の位置から視力表を見て，視力検査をするのが普通であるが，最小視角を見つけるためにはランドルト環はたった一つで視力検査を受ける者の位置を動かしランドルト環との距離を変えてもよい．あるいは視力検査を受ける者の位置は固定して動かさずランドルト環を移動させて検査距離を変えてもよい．

いま，(3.4) から視力 I は視標からの距離 r に比例するから，視力表からの距離が r_1 のときの視力を I_1 とし，距離が r_2 のときの視力を I_2 とすれば，その比 $\frac{I_2}{I_1}$ は

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{k\frac{r_2}{\ell}}{k\frac{r_1}{\ell}} = \frac{r_2}{r_1} \tag{4.5}$$

である．

具体的にいえば，私は 5m の距離から視力 0.1 のランドルト環の切れ目がどちら側にあるかわからないので，いつも視力検査をしてくれる看護師さんが視力 0.1 のランドルト環をもって 4m の距離のところに立ってどちらかわかりますかと言われる．もし 4m の距離のところで視力 0.1 のランドルト環の切れ目の方向がわかれば，$I_1 = 0.1, r_1 = 5\text{m}, r_2 = 4\text{m}$ であるから，私の視力 I_2 は

$$I_2 = \frac{r_2}{r_1} I_1 = \frac{4}{5} \times 0.1 = 0.08 \tag{4.6}$$

である．同様にしてようやく 3m のところでわかれば，視力は

$$I_2 = \frac{r_2}{r_1} I_1 = \frac{3}{5} \times 0.1 = 0.06 \tag{4.7}$$

以下同様である．

これで，5m 離れて一番上の 0.1 のランドルト環が読めないときにどのようにして視力を算定しているのかがわかった．

5　分数視力

さて，まえがきでのべた，分数で表す視力のことを述べよう．

日本では小数で視力を表すが，欧米では分数で視力を表すことが多いと翻訳の仕事を通じて知った訳だが，分数視力とはどういうものであろうか．眼科でもらったコピー [3] によれば，つぎのようである．

1909 年の国際的合意にもかかわらず，欧米ではスネレン (Snellen)*7の提唱による方式（スネレン視標 [4]）が普及している．日本の方式を小数視力というのに対し，6/6, 6/12, 6/60, または 20/20, 20/40, 20/200 と表し，

*7 スネレンはオランダの眼科学者であった．

分数視力という．両者はそれぞれ，次のように定義されている．

$$\text{分数視力} = \text{検査距離}/\text{見ることができた最小視標を視角 } 1' \text{ になるようにしたときの距離} \tag{5.1}$$

たとえば，分数視力 6/12(=0.5 小数視力) という場合，分子は検査を 6 m で行ったことを示し，分母は，この視標（の大きさ）は（視力 1.0 の人が）12m の距離で見れば，視角 $1'$ になる（ので識別できる大きさである）ことを示している[*8]．

$$\text{小数視力} = 1/\text{視角} \tag{5.2}$$

視力，すなわち遠見視力は，日本では，検査距離が 5 m であり，欧米では 6 m または 20 ft (=6.096 m) である[*9]．したがって 3 者は検査距離が異なる．視角に関しての換算値を表 5.1 に示す．

視角	分数視力		小数視力	log MAR
	m	ft		
10	6/60	20/200	0.1	+1.0
8	6/48	20/160	0.125	+0.9(=0.9031)
6.25	*	20/125	0.16	+0.8(=0.7959)
5	6/30	20/100	0.2	+0.7(=0.6990)
4	6/24	20/80	0.25	+0.6(=0.6021)
3	6/18	20/60	0.333	+0.5(=0.4949)
2.5	6/15	20/50	0.4	+0.4(=0.3979)
2	6/12	20/40	0.5	+0.3(=0.3010)
1.67	6/10	*	0.6	+0.2(=0.2014)
1.5	6/9	20/30	0.667	*
1.25	*	20/25	0.8	+0.1(=0.0969)
1.111	*	*	0.9	*
1	6/6	20/20	1.0	0.0
0.8	*	20/16	1.25	-0.1(=-0.0969)
0.667	6/4	*	1.5	*
0.5	6/3	20/10	2.0	-0.3(=-0.3010)

表 5.1　分数視力と小数視力の換算表．∗ の箇所は適当な数で表せない．

さらに重要なことは，標準視標の相違である．欧米の標準視標は E（字）視標である（E（字）視標の図は省略する）．

以上が眼科でもらったコピーからの引用である[*10]．

[*8] 引用者注： 分数視力の定義式 (5.1) の分母は視力 1.0 の人なら，どれだけの距離からその大きさのスネレン視標を識別できるかを示している．視力表の視標の右横にその分数が示されているので、識別できた最小の視標ですぐにその人の分数視力がわかる．

[*9] 1 ft=30.479 cm である．

[*10] ただし，カッコ内にわかりやすくなるように引用者が説明を付加した．分数視力の分母については付録 3 にも述べている．表 5.1 の log MAR の定義は付録 4 を参照せよ

6　度数法の角への変換

ところで，(5.2) は実は (3.2) とは違っている．これはどうしてだろうか．これは実は角度を測る単位が違うからである．(3.2) では角度は弧度法で測っているが，(5.2) では度数法で測っている．このことは単位の換算の問題であるが，少しわかり難いのでここで説明をしておこう．

まず，簡単に考えて角度を度数法で測るとき最小視角と視力が反比例の関係にあるとして，その比例定数を決めよう[*11]．(3.2) のときとは角度の測り方が違うので，その比例定数を k ではなくて，k_d で表すことにしよう．角度の測り方が違うと一般にその比例定数も違ってくるだろう．ただ，視力 I と最小視角 θ_d とが反比例するという法則は変わらない．そうすると (3.2) の代わりに

$$I = \frac{k_d}{\theta_d} \tag{6.1}$$

と表される．もし，いま最小視角が $1^{'}$ のときにその視力が 1.0 であるとすれば（これが普通に言われている小数視力の定義であるが，前に述べたように精確ではない），そのときに比例定数 k_d は (6.1) から

$$k_d = I\theta_d = 1.0 \times 1^{'} = 1^{'} \tag{6.2}$$

となる．これからわかるように比例定数 $k_d = 1^{'}$ となる．この比例定数 k_d に含まれている角度の単位である分は (6.1) の分母の角度の分と約分されてしまうから，簡単のために比例定数を $k_d = 1$ としたらしい．だが正しくは (6.2) のように角度の単位を含んでいる．したがって，小数視力を

$$I = \frac{1}{\theta_d} \tag{6.3}$$

と書き表したのであった．これが (5.2) である．

ところが，3 節で述べたように実は 1 分 $1^{'} = 0.000291$ rad で 0.0003 rad に等しくはない．それで，角を弧度法で測ったときの比例定数 k から，度数法で測った角の場合の比例定数 k_d への換算をしてみよう．このとき

$$\begin{aligned} k &= 0.0003 \text{ rad} \\ &= 0.0003 \times \frac{1^{'}}{0.000291} \\ &= 1.0309 \times 1^{'} \\ &:= k_d \end{aligned} \tag{6.4}$$

この式で $1.0309 \approx 1$ とみなすことができると考えれば，(6.2) で比例定数 $k_d = 1^{'}$ としたことと符合している．

さらに，(3.2）を角度が度数法で測られたときに書き換えてみよう．このときには付録 1 の (9.2) から $1 \ \text{rad} = (\frac{1}{0.000291})^{'}$ であるから，ラディアンで測った角 θ に $\frac{1}{0.000291}$ をかければ，

$$\theta_d = \frac{\theta}{0.000291} \tag{6.5}$$

[*11] 2 つの量 x, y が比例関係にあるとき，この 2 つの量の商 $\frac{y}{x} = k$ が一定となるが，この量 k を比例定数という．また，2 つの量 x, y が反比例関係にあるとき，この 2 つの量の積 $xy = k$ が一定となる．しかし，この場合も 2 つの量の積 k を比例定数という．反比例定数とはいわない．どうして比例の場合と同じ名で呼ぶのか，その理由は知らないが，y が $\frac{1}{x}$ に比例しているためであろう．

は度数法で測った角度となる．したがって，

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{k}{\theta} \\
&= \frac{k \times \left(\frac{1}{0.000291}\right)'}{\theta \times \left(\frac{1}{0.000291}\right)'} \\
&= \frac{k_d}{\theta_d}
\end{aligned} \tag{6.6}
$$

ここで，(6.4), (6.5) を用いた．また，精確な k_d の値は (6.4) から $k_d = 1.0309'$ で与えられる．

7　おわりに

このエッセイでは視力の単位について述べた．また日本で使われている小数視力だけでなく，欧米で使われている分数視力についても述べた．そして視力の検査に使われているランドルト環の大きさと視力との関係が反比例していることを知った．視力の単位は実生活で現れる反比例の一つのよい例となっている．

私の眼の担当医師である，船坂恭介先生に文献と分数視力等についてご教示を頂いたことを感謝します．また対数視力における AGO 単位の式がまちがっていることをご指摘いただいた世戸憲治さんに感謝します．

8　付録 0　最小視角の評価

視力 1 の人の最小視角 3.0×10^{-4} rad は次のような計算から出てくる．

$r = 5$ m のところから $\ell = 1.5$ mm の環の切れ目がどちらかにあるかを見分けられる人である．すなわち，

$$
\begin{aligned}
\theta &= \frac{\ell}{r} \\
&= \frac{1.5 \text{ mm}}{5 \text{ m}} \\
&= 3.0 \times 10^{-4} \text{ rad}
\end{aligned}
$$

である[*12]．

つぎに視力 0.1 の人の最小視角は 3.0×10^{-3} rad は上の計算と同様にすることができる．

$r = 5$ m のところから $\ell = 15$ mm の環の切れ目がどちらかにあるかをなんとか見分けられる人である．すなわち，

$$
\begin{aligned}
\theta &= \frac{\ell}{r} \\
&= \frac{15 \text{ mm}}{5 \text{ m}} \\
&= 3.0 \times 10^{-3} \text{ rad}
\end{aligned}
$$

である．

9　付録 1　度数法と弧度法

この度とラディアンで測った角とはどういう関係にあるのであろうか．

[*12] 弧度法での角 $\theta = \frac{\ell}{r}$ で，ℓ は円弧の長さであるが，視力表上での長さは円弧の長さではなく，直線の長さなので，ここでの議論は正しくないのではないかと気になる人もおられるかもしれない．その指摘は正しいのだが、ここで議論しているような小さな視角の場合には円弧の長さを直線の長さで置き換えたとき差はきわめて小さいので，問題がない．

いま半径 r の円の円周の長さ ℓ は $2\pi r$ であるから，1 点のまわりの角を弧度法で測れば，この角は $\theta = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ となるが，これが $360°$ である．したがって，

$$
\begin{aligned}
2\pi \text{ rad} &= 360° \\
\pi \text{ rad} &= 180° \\
1 \text{ rad} &= \frac{180°}{\pi} \approx 57.296°
\end{aligned}
$$

である．実は

$$\pi \text{ rad} = 180° \times 60^{'} = 10800^{'} \tag{9.1}$$

であるから，

$$1^{'} = \frac{3.14159}{10800} = 0.000291 \text{ rad} \tag{9.2}$$

であり，$1^{'} = 0.0003$ rad ではない．したがって，上に「精確にはほぼ一分角」と書いたのはそのためであった．しかし，このことはかなり細かなことなので，大抵の文献には最小視角が $1^{'}$ のときに視力が 1.0 と書いている．多分眼科の医師の中でもそのことまで知っている人は少ないのではなかろうか．いい加減だと言われればそうかもしれないが，そのことをあまり厳密にいわなくてもよいだろう．

10　付録 2　なぜ 1 点のまわりの角度は $360°$ か

度分法で角度を測ることは小学校以来，私たちのなじんできた角度の測り方であるが，1 点のまわりの角度を $360°$ とするのはどうしてだろうか．歴史的にこれがどこから来たのかは諸説があるようだが，普通には太陽のまわりを地球が回る一年が 365 日であることから来ていると考えられている．地球の軌道は円に近いが正確には円ではなく，長円（楕円）であることから 1 年は 360 日ではなく，365 日となっている．

11　付録 3　視角と視力 1 の人が $1^{'}$ に見える距離

表 5.1 の分数視力の分母は，ある視角 θ を視力 1 の人が $1^{'}$ に見える距離 r である．これはどうやって決められるのであろうか．ここでは度数法で角度 θ を測ることにする．

前にも述べたように視力 I は視力検査を受ける人の識別できる最小視角 θ に反比例（すなわち，$\frac{1}{\theta}$ に比例）するから，いま問題にしている最小視角 θ と視力 1 の人が $1^{'}$ に見える距離 r とは比例していると考えられる．それで

$$r = k\theta, \ (k : \text{比例定数}) \tag{11.1}$$

と表わすことができる．ところで，検査距離 $r_0 = 20$ ft から見たときに最小視角が $\theta_0 = 1^{'}$ である人を視力 1 とするように検査距離を決めている．このことから比例定数 k は

$$k = \frac{r_0}{\theta_0} = \frac{20 \text{ ft}}{1'} \tag{11.2}$$

と決められる．この (11.2) で求めた比例定数 k を (11.1) に代入すれば，

$$r = \frac{\theta}{\theta_0} r_0 \tag{11.3}$$

が求められる．

$\theta_0 = 1^{'}$ であるから，視力検査されている人の識別できる最小視角 θ が与えられれば，(11.3) から求めたい距離 r が求められる．求められた距離を表 11.1 に示しておこう．

$\theta(')$	10	8	5	4	3	2	1	0.8	0.6	0.5
r(ft)	200	160	100	80	60	40	20	16	12	10

表 11.1　最小視角と距離

12　付録 4　対数視力

インターネットのサイト [5], [6] によれば，視力の表示法として対数視力というのがある[*13]．

これは視力の表し方として対数を用いたもので，合理的であるとしていろいろな方式が提案されたが，実際的にはあまり使われていない．代表的なものとして中川式と AGO 単位（アメリカ軍事局発表）がある．それらは小数視力を v とし，対数視力を v_1 と表せば

$$v_1 = 50\log_{10} v + 100, \quad \text{（中川式）}$$
$$v_1 = 4\log_2 2^{10} v, \quad \text{（AGO 単位）}$$

したがって，小数視力 $v = 1.0$ が中川式 $v_1 = 100$，AGO 単位 $v_1 = 40$ である[*14]．

なお，対数視力の一種として最小視角（分を単位）の常用対数を視力とした $\log\mathrm{MAR}$ がある．この視力の表し方は視標の最小視角の対数をとったものがほぼ等間隔となるところに特徴がある．

ここで，$\log\mathrm{MAR}$ は logarithmic minimum angle of resolution の略であり，

$$\log\mathrm{MAR} = \log_{10}(\text{最小視角})$$

で定義されている．これの小数視力との対比は表 5.1 に載せてある．

(2010.9.22)(2023.12.11 改訂)

参考文献

[1] 矢野　忠，視力の基準，数学・物理通信，1 巻 6 号 (2011.3.20) 14-22

[2] www.kaiteki-eye.jp/modules/weblog/details.php?blog_ id-28

[3] 増田寛次郎編，『眼科学大系 1，眼科診断学・眼機能』（中山書店,1993.5）31

[4] 鈴木宣民，『屈折異常と眼鏡入門』（金原出版，1982) 13

[5] http://homepage2.nifty.com/kaituka/vision.html

[6] http://patents.google.com/patent/JPWO2004018998A1/ja

*13 サイト [5] は現在では参照することができなくなっている．

*14 AGO 単位の対数視力 v_1 を $v_1 = 4\log_2 v + 40$ と書くべきだという主張もある．単に見かけ上の簡潔さを優先しただけなのかもしれないが，一見してこの方がわかりやすい．（中川式）の式を見倣えば，当然のこととして（AGO 単位）でもこの注釈の式で表すべきだったろう．

三角形の数（改訂版）

矢野　忠 [*1]

Number of Equilateral Triangles (Revised Version)

Tadashi YANO [*2]

まえおき

このエッセイはすでに『数学・物理通信』に掲載したものである [1]．表現が適切でないために理解が難しかった箇所を修正した．

1　はじめに

愛数協の『研究と実践』に私が生まれて初めての数学エッセイ「家中でクイズを $\cdots$」を書いたのは 1984 年 10 月のことであり，そのテーマが三角形の数を数えることであった [2]．

2013 年 4 月に愛数協[*3]の学習会に出たら，H. Y. 先生が定年退職後に週 3 回小学校に勤務している状況の話の中で，三角形の数を数えたり，正方形の数を数えたりした算数の授業をされたという．

三角形の数の総和を数えることに関しては，すでに『研究と実践』にエッセイを書いたことを話して，そのときの経験の一部をそのときに述べた．三角形の数を数えることに関しては，このおよそ 30 年前のエッセイにつけ加えることはほとんどない．

しかし，三角形が n 段に積み重ねられたとき三角形の総数を表す式を故矢野　寛（ゆたか）先生が親切にも

$$\frac{1}{8}n(n+2)(2n+1)+\frac{1}{16}[(-1)^n-1] \tag{1.1}$$

と表されることをコメントして下さったが，それがどうやって導かれたかを考えたことがなかった．

ところが 2013 年にインターネットを調べたところ，この三角形の総数を与える式の導出を述べたサイトがあった [3][*4]．それを参考にしながら，約 30 年前の矢野先生の推論を追ってみたい[*5]．

2　5 段の正三角形の総数

小手調べとしてつぎのような問題を考えよう．

（問題）図 2.1 のように，1 辺の長さ 1 の正三角形が 5 段に並べられている．この図 2.1 の中に正三角形は大小合わせていくつあるか．

（解答）　その数え方を考えてみよう．1 辺の長さ 1 の正三角形の面積を S とおく．いま記号として N_{pS} を面積 $pS, (p:$ 正の整数$)$ の三角形の数と定義すると

[*1] 元愛媛大学工学部

[*2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[*3] 愛媛県数学教育協議会の略称

[*4] このサイトの表示には多くのミスプリントがある．しかし，根本的には正しい．式の入力の段階で省力のために前の部分をコピーをしたためにミスプリントが出たのであろう．

[*5] 本文ではできるだけ推論の筋が明らかになるように述べた．具体的な計算はすべて付録に述べている．

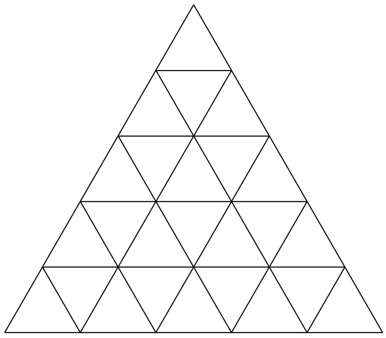

図 2.1　5 段積の三角形

$$
\begin{aligned}
N_S &= 25 \\
N_{4S} &= 13 \\
N_{9S} &= \ 6 \\
N_{16S} &= \ 3 \\
N_{25S} &= \ 1
\end{aligned}
$$

である．したがって，求める正三角形の個数は

$$25 + 13 + 6 + 3 + 1 = 48 \quad 個$$

ここで大小さまざまな三角形の総数を 5 段の三角形では数えることができたが，それを n 段の三角形に一般化することは難しい．すこし立ち入って n 段の三角形の数え方を 3 節で考えてみよう．

3　一般の正三角形の数

図 3.1 を見てほしい[*6]．正三角形の底辺が下にあるものを**正置の三角形**，底辺が上にある三角形を**倒置の三角形**ということにしよう．この正置の三角形の数と倒置の三角形の数は明らかに規則性があることは図 3.1 の表の中の式を考えたら明白に見てとれる．ただ正置の三角形の総数は段数 n が奇数であっても，偶数であってもその規則性に差はまったくない．しかし，倒置の三角形の方はその規則性が段数 n が奇数か偶数かで少し異なっている．それで，まず倒置の正三角形の数から考えてみよう．

3.1　倒置の正三角形の数

それは図 3.1 の表の倒置三角形の数を示す右の 3 つ列の欄を見れば，三角形の段数 n が偶数のときは左から右へと横に見て行くと数が記載された一番左の欄に数 1 があるが，n が奇数のときには数 1 がない[*7]．これは三角形の段数が奇数のときは倒置三角形が 1 個だけ現れることはないことを示している．これが大小とりまぜて可能な大きさの正三角形を数を数えるときの注意点である．

上の説明はすこし理解が難しいので n が小さいときを例として述べてみよう．$n = 1$ のときはその行を左から右に見て行っても正置三角形のところにもちろん 1 は現れるが，倒置三角形のところには 1 は現われない．$n = 2$ のときには左から数えて 9 列目に 1 が現れる．$n = 3$ のときには 9 列目に $1+2$ があるが，1 は現われない．$n = 4$

[*6] 図 3.1 は [2] からとった．

[*7] 行と列という語を説明しておく．いま行とは段数 $n = 3$ なら，その横の左右のことをいう．列とは縦に見た真上とか真下とかの上下のことをいう．これは線形代数では行列 (matrix) の行 (row) と列 (column) をそのような意味に使っている．

のときには，10 列目に 1 が現れる．要するに奇数段の三角形においては倒置の三角形が 1 個だけ単独で現れることはない．

数える三角形 / 数えられる三角形										
1	1									
2	1+2	1						1		
3	1+2+3	1+2	1					1+2		
4	1+2+3+4	1+2+3	1+2	1				1+2+3	1	
5	1+2+3+4+5	1+2+3+4	1+2+3	1+2	1			1+2+3+4	1+2	
6	1+2+3+4+5+6	1+2+3+4+5	1+2+3+4	1+2+3	1+2	1		1+2+3+4+5	1+2+3	1
7	1+2+3+4+5+6+7	1+2+3+4+5+6	1+2+3+4+5	1+2+3+4	1+2+3	1+2	1	1+2+3+4+5+6	1+2+3+4	1+2

図 3.1　三角形の数の表

倒置三角形の数の規則性を見つけるために段数 n が $n=1$ からその数が表からどうなっているかを見て行こう．このとき表の中に 1 から n までの整数の和が出てくるので，それを記号として導入しておこう．すなわち

$$A(0) := 0 \tag{3.1}$$
$$A(n) := 1+2+3+\cdots+(n-1)+n \tag{3.2}$$

とする[*8]．ここで n は自然数である．また例外的に $n=0$ のときの $A(0) := 0$ を定義している．

図 3.1 の表からわかるように倒置三角形の数は

$$\begin{aligned}
n=1 &: A(0)\\
n=2 &: A(1)\\
n=3 &: A(2)\\
n=4 &: A(1)+A(3)\\
n=5 &: A(2)+A(4)\\
n=6 &: A(1)+A(3)+A(5)\\
n=7 &: A(2)+A(4)+A(6)
\end{aligned}$$

これくらい n が小さい値の例を調べてみれば，後はこれを一般化することはそれほど難しくない．また，この図

[*8] := はあまり見慣れない記号だが，最近よく使われる記号で右辺の式で $A(n)$ を定義するという記号である．いまでも幾何学における合同という意味ではなく，数式の定義という意味で ≡ を使う人もいるが，だんだん := を使う人が増えて来ている．この記号が使われるようになったのは数式処理ソフト Mathmatica の影響もあるのであろう．

3.1 の表には載っていないけれども

$$
\begin{aligned}
n = 8 &: A(1) + A(3) + A(5) + A(7) \\
n = 9 &: A(2) + A(4) + A(6) + A(8)
\end{aligned}
$$

となるであろう．以下同様である．これらの結果をよく見れば段数 n が偶数か奇数かにしたがって和を表す式は変わってくることがわかる．

このことから，2 段積（すなわち $n \geq 2$）以上の一般の n 段積の三角形について倒置の正三角形の個数を考えるときには段数 n が偶数か奇数かに分けて考える必要がある．

まず段数 n が偶数 ($n = 2m, m$: 自然数) のときを考えよう．図 3.1 の表から $n = 2, 4, 6, 8$ について

$$
\begin{aligned}
n = 2 &: A(1) \\
n = 4 &: A(1) + A(3) \\
n = 6 &: A(1) + A(3) + A(5) \\
n = 8 &: A(1) + A(3) + A(5) + A(7)
\end{aligned}
$$

であるから，一般の偶数 n 段の倒置の三角形の数を N_i^e と表せば，

$$
\begin{aligned}
N_i^e &= A(1) + A(3) + A(5) + \cdots + A(n-1) \\
&= \sum_{k=1}^{m} A(2k-1), \quad \left(A(2k-1) = \frac{2k(2k-1)}{2} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} k(2k-1) \\
&= \frac{m(m+1)(4m-1)}{6} \\
&= \frac{n(n+2)(2n-1)}{24} \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

と求められる[*9]．ここで，m は $\frac{n}{2}$ を越えない自然数である．

つぎに段数 n が奇数 ($n = 2m + 1, m$: 自然数) のときを考えよう．やはり図 3.1 の表から $n = 1, 3, 5, 7$ について

$$
\begin{aligned}
n = 1 &: A(0) \\
n = 3 &: A(2) \\
n = 5 &: A(2) + A(4) \\
n = 7 &: A(2) + A(4) + A(6)
\end{aligned}
$$

[*9] この和を求める計算は難しいものではないが，付録 1 に少し詳細に述べる．また，(3.3)-(3.8) 等で用いられる三角形の数を表す記号 N_r, N_i^e, N_i^o の添字の r, i, e, o はそれぞれ regular, inverse, even, odd を表している．順に正置三角形，倒置三角形，偶数，奇数を意味する．

であるから，一般の奇数 n 段の倒置の三角形の数を N_i^o と表せば，

$$\begin{aligned} N_i^o &= A(2)+A(4)+A(6)+\cdots+A(n-1) \\ &= \sum_{k=1}^{m} A(2k), \quad \left(A(2k)=\frac{2k(2k+1)}{2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} k(2k+1) \\ &= \frac{m(m+1)(4m+5)}{6} \\ &= \frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{24} \end{aligned} \tag{3.4}$$

と求められる[*10]．ここで，m は $\frac{n-1}{2}$ を越えない自然数である．

以上で n が偶数と奇数のときの大小とりまぜた倒置の三角形の数は式に表された．

3.2 正置の正三角形の数

前に正置の三角形の数を数式に表すことに問題がないと述べたが，正置の三角形の数はどのように数式で表されるだろうか．

この場合も図 3.1 の表にしたがって $n=1$ から $n=7$ までの数をまず調べてみよう．図 3.1 の表からわかるように正置三角形の数は

$$\begin{aligned} &n=1 : A(1) \\ &n=2 : A(1)+A(2) \\ &n=3 : A(1)+A(2)+A(3) \\ &n=4 : A(1)+A(2)+A(3)+A(4) \\ &n=5 : A(1)+A(2)+A(3)+A(4)+A(5) \\ &n=6 : A(1)+A(2)+A(3)+A(4)+A(5)+A(6) \\ &n=7 : A(1)+A(2)+A(3)+A(4)+A(5)+A(6)+A(7) \end{aligned}$$

以上から，一般の n 段の三角形において，正置の正三角形の個数は段数 n が偶数か奇数かにはよらず同じ形の式で表される．求める正置の三角形の総数を N_r と表せば

$$\begin{aligned} N_r &= A(1)+A(2)+\cdots+A(n-1)+A(n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A(k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned} \tag{3.5}$$

と求められる[*11]．

3.3 正三角形の総数

さて，これから大小とりまぜた正置と倒置の正三角形の数の和を表す式を求めよう．

[*10] この和を求める計算も付録 2 に述べる．

[*11] この和の計算も付録 3 に示しておく．

n が偶数と奇数の場合の三角形の数の和を別々に求めておいて，最後にこの二つをまとめて表すことを考えよう．

まず n が偶数のとき，正三角形の総数 N は (3.5) の N_r と (3.3) の N_i^e とを用いて

$$\begin{aligned} N &= N_r + N_i^e \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{24}n(n+2)(2n-1) \\ &= \frac{1}{8}(2n^3+5n^2+2n) \qquad (3.6) \\ &= \frac{1}{8}n(n+2)(2n+1) \qquad (3.7) \end{aligned}$$

と求められる．

つぎに n が奇数のとき，正三角形の総数 N は (3.5) の N_r と (3.4) の N_i^o とを用いて

$$\begin{aligned} N &= N_r + N_i^o \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{24}(n-1)(n+1)(2n+3) \\ &= \frac{1}{8}(n+1)(2n^2+3n-1) \\ &= \frac{1}{8}(2n^3+5n^2+2n) - \frac{1}{8} \qquad (3.8) \\ &= \frac{1}{8}n(n+2)(2n+1) - \frac{1}{8} \qquad (3.9) \end{aligned}$$

となる．

奇数の場合の正三角形の数の和は偶数の場合と比べて $-\frac{1}{8}$ という項が付加されることだけが違っている．

すなわち，付加項は n が偶数なら 0 となり，奇数ならば $-\frac{1}{8}$ となるように一般的な付加項を決めればよい．そのような付加項は

$$\frac{1}{16}[(-1)^n - 1] \qquad (3.10)$$

と表せる[*12]．

したがって，1 辺 n の正三角形において，大小合わせた正三角形の数の和は

$$\frac{1}{8}n(n+2)(2n+1) + \frac{1}{16}[(-1)^n - 1] \qquad (1.1)$$

と表される[*13]．

4　おわりに

約 30 年前に故矢野　寛先生が示してくださった，一般的な n 段の正三角形の大小とりまぜた正三角形の数の和を表す式がどのようにして導かれたかが解明された．

私がどうしてこの式を導出しなかったのかはわからない．[2] を『数学散歩』に収録したとき付記として「私はどうしたものか式で表すことなど考えもしなかった」と書いた．図 2 の表にすべての手がかりがあったのに．

それで矢野先生も蛇足としてつぎのようなコメントを下さったのであろう．

*12 この付加項の求め方を付録 5 に述べる．

*13 [4] に奇数段の三角形の総数を求めた式が載っている．それによると

$$N = \frac{1}{8}(n+1)(2n^2+3n-1)$$

であり，これは (3.8) のすぐ上の式と一致する．

[蛇足]　このように見事に規則がわかってしまったところに，式などはヤボだとは思うが，この規則にしたがって計算すると，n 段のときの総数は

$$\frac{1}{8}n(n+2)(2n+1)+\frac{1}{16}[(-1)^n-1]$$

となる．

現象や結果を数式で表すことが難しかったり，または数式が表すものごとの実体を理解することが難しかったりすることは事実である．しかし，式で表すことがヤボなことはない．もっとも数式の中にものごとの実体や本質があるわけではないと考えている．

そのことはともかくとして，先生が式を与えて下さったおかげであれから約 30 年後ではあるが，やっと式の導出の道筋を解明することができた．

泉下で先生は私のものわかりの悪さに苦笑されていることだろう．

[謝辞]

[2] から図 3.1 を取り込むために元愛媛大学准教授の和田　武氏（愛媛大学メディアセンター）のご尽力をお願いした．ここに同氏に深く感謝をいたします．

5　付録

5.1　付録 1　倒置三角形の数（偶数段）

付録 1 では n が偶数のときの倒置三角形の数を求める式 (3.3) の計算を示す．$n=2m$ とおいて n の和を m の和で表せば

$$\begin{aligned}N_i^e &= \sum_{k=1}^{m} k(2k-1) \\ &= 2\sum_{k=1}^{m} k^2 - \sum_{k=1}^{m} k \\ &= 2\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} - \frac{m(m+1)}{2} \\ &= \frac{m(m+1)(4m-1)}{6} \\ &= \frac{n(n+2)(2n-1)}{24} \qquad (3.3)\end{aligned}$$

である．ここで $A(n)$ は

$$A(n) = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

であることを用いている．また和の公式

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$
$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$$

を用いた．

5.2 付録 2　倒置三角形の数（奇数段）

付録 2 では n が奇数のときの倒置三角形の数を求める式 (3.4) の計算を示す．$n = 2m + 1$ とおいて n の和を m の和で表せば

$$\begin{aligned} N_i^o &= \sum_{k=1}^{m} k(2k+1) \\ &= 2\sum_{k=1}^{m} k^2 + \sum_{k=1}^{m} k \\ &= 2\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(m+1)}{2} \\ &= \frac{m(m+1)(4m+5)}{6} \\ &= \frac{(n-1)(n+1)(2n+3)}{24} \end{aligned} \tag{3.4}$$

である．ここでも付録 1 と同じ関係と公式を用いた．

5.3 付録 3　正置三角形の数

付録 3 では正置の三角形の数を求める式 (3.5) の計算を示す．

$$\begin{aligned} N_r &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right] \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned} \tag{3.5}$$

である．この付録 3 でも付録 1, 2 と同じ関係と公式を用いた．

5.4 付録 4　正三角形の総数

付録 4 では正三角形の総数の (3.7) と (3.9) を導く計算を示す．

偶数段の三角形の総数 (3.7) は簡単に導けるが，奇数段の三角形の総数 (3.9) には (3.8) を経て到達すると思う．なぜかといえば，$2n^3 + 5n^2 + 2n = n(n+2)(2n+1)$ であるから．このことを示すためにわざと (3.6) と (3.8) を因数分解しない展開した形で示しておいた．

しかし，ここでは (3.9) を導く別の可能性を考えてみよう．それには (3.4) の分子 $(n-1)(n+1)(2n+3)$ と (3.3) の分子 $n(n+2)(2n-1)$ との関係を考える必要がある．それぞれの因子の変わり方を見てみると

$$\begin{aligned} n \to n-1, &\quad \Delta n = 1 \\ n+2 \to n+1, &\quad \Delta n = 1 \\ 2n-1 \to 2n+3, &\quad \Delta n = -4 \end{aligned}$$

ここで Δn は差分である。それで $n = A,\ \ n+2 = B,\ \ 2n-1 = C$ とおいて $(n-1)(n+1)(2n+3)$ を $A,\ B,\ C$

で表すことを考えよう．

$$\begin{aligned}(n-1)(n+1)(2n+3) &= (A-1)(B-1)(C+4)\\ &= [AB-(A+B)+1](C+4)\\ &= ABC+[1-(A+B)]C+4[AB+1-(A+B)]\\ &= ABC+CD+4E\\ &= ABC-3 \end{aligned}\tag{5.1}$$

ここで

$$\begin{aligned} A+B &= 2n+2,\\ D &:= 1-(A+B) = -(2n+1),\\ AB &= n^2+2n,\\ E &:= AB+1-(A+B) = n^2-1\\ CD &= 1-4n^2\\ 4E &= 4n^2-4\\ CD+4E &= -3 \end{aligned}$$

であることを用いた．

この結果を用いると

$$\begin{aligned}\frac{1}{24}(n-1)(n+1)(2n+3) &= \frac{1}{24}(ABC-3)\\ &= \frac{1}{24}ABC-\frac{1}{8}\\ &= \frac{1}{24}n(n+2)(2n-1)-\frac{1}{8}\end{aligned}\tag{5.2}$$

したがって n が奇数のとき，正三角形の和を N は (3.5) と (5.2) を用いて

$$\begin{aligned} N &= N_r+N_i^o\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)+\frac{1}{24}(n-1)(n+1)(2n+3)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)+\frac{1}{24}n(n+2)(2n-1)-\frac{1}{8}\\ &= \frac{1}{8}n(n+2)(2n+1)-\frac{1}{8}\end{aligned}\tag{3.9}$$

となる．

この 5.4 節のはじめに述べたように，n が偶数のとき，正三角形の総数 N はすぐに (3.7) が求められる．しかし，n が奇数のとき，上に述べたように (5.2) を用いてこの (3.9) を求められない場合には (3.8) はどうしても必要な式である．いずれにしても (3.8) まで求められれば，(3.9) を導くのは難しくはない．

5.5 付録 5 付加項の一般式

この付録 5 では式の付加項の求め方を示す．

まず n が偶数のときには付加項が 0 となるから，これは

$$0 = (-1)^n - 1$$

とすればよいであろう．そのときに n が奇数であれば，

$$(-1)^n - 1 = -2$$

となる．そこで n が奇数のとき

$$a[(-1)^n-1]=-\frac{1}{8}$$

となるように係数 a を決めれば，$a=\frac{1}{16}$ と求められる．

したがって，付加項の形を

$$\frac{1}{16}[(-1)^n-1]$$

と求めることができる．

(2015.12.17)(2023.12.11 改訂)

参考文献

[1] 矢野　忠，三角形の数，数学・物理通信，5 巻 11 号（2015.12.30) 21-29

[2] 矢野　忠，家中でクイズを $\cdots$，研究と実践（愛数協），No.16 (1984.10) 2-8
（『数学散歩』（国土社，2005）5-10 に所収）
矢野　忠，家中でクイズを（改訂版），数学・物理通信，13 巻 5 号（2023.9.22) 21-26

[3] http://www004.upp.so-net.ne.jp/s-honma/number/nur

[4] 秋山　仁，『数学の証明のしかた』，（森北出版，2014）174-176

編集後記

2023 年も 12 月となった．この 13 巻 6 号でもって 13 巻は終わりである．9 月からは休刊にするつもりであったが，そのように宣言した私の自分勝手な都合でもって 9 月以降に，結局のところ 5 号と 6 号および号外号を発行した．こういったことになった私のわがままをお許し願いたい．

今号は常連の投稿者である，世戸さんの論文と編集者である私の数学エッセイ 2 編の計 3 編を掲載する．世戸さんの論文は数式一杯でなかなか読むのも難しい．それを私などが読むのでも難しいことを，はじめから自ずから問題を立て，かつ独自に解くということのできる人がいるのだと思うとすばらしいと思う．今回は編集者もすこし数式をフォローしてみたが，途中で息切れしてしまった．

世戸さんにはいつも私のエッセイのみならず他の投稿者の論文にも適切なコメントを頂いており，論文の著者としてだけではなく，編集者としても働いてもらっている．今後もご活躍を祈る次第である．

私のエッセイは以前にこの「数学・物理通信」に掲載したものの改訂版であるが、この夏の 8 月に修正をしていたものである。しかし，編集段階で読み直してみて，いくつかの細かな再修正をせざるを得なかった．

読者の皆様には来年の 2024 年がよい年であることをお祈りしている．

（矢野　忠）