数学・物理通信

14巻1号　　2024年3月

編集　新関章三・世戸憲治・矢野　忠

2024年3月21日

目次 (Contents)

1. 座屈現象のモデル （１）

世戸憲治 **2**

2. 四元数（補遺 **3**）（改訂版）

矢野　忠 **11**

3. 定係数線形常微分方程式の固有値**,** 固有ベクトルを用いた解法

根本藤人 **26**

4. 編集後記

矢野　忠 **38**

1. Model of Buckling Phenomenon (1)

Kenji SETO 2

2. The Quaternion (Appendix 3) (Revised Version)

Tadashi YANO 11

3. A Solution of Constant Coefficient Linear Ordinary Differential Equations Using Eigenvalues and Eigenvectors

Fujito NEMOTO 26

4. Editorial Comments

Tadashi YANO 38

座屈現象のモデル (1)

世戸 憲治 *

Model of Buckling Phenomenon (1)

Kenji SETO*

1　はじめに

座屈現象の最も簡単な例は，定規を机の上に立てて，上から手で押さえることである．このとき押さえる力が一定の範囲内であれば，定規はそのまま立っているが，ある一定限度を超える力で押さえてしまうと定規は撓 (たわ) んでしまう．一度撓んでしまうとかなり弱い力でも撓みは進行してしまう．この現象は，建築学では重要な問題で，柱にどの程度の荷重を掛けられるかは，この座屈を目安にして決められる．

この柱で起こる座屈に関しては，弾性理論を用いて解析されるが，より簡単なモデルが作れないか調べてみたところ，「工学のための非線形解析入門」(藪野浩司著，数理科学別冊，サイエンス社) という本の第 4 章「分岐現象とその解析法」の中に 1 つのモデルが載っていることが分かった．しかし，この本での方程式の導入方法は分かり難いものだったので，ここでは，Lagrangian 形式を用いたより簡便な方法で紹介することにする．

2　方程式の導入とその解法

図 1 に示すように，水平に x 軸，鉛直上方に y 軸をとる．この x 軸に沿って質量 m の質点が自由に動けるようにしておき，さらに，この質点に，質量が無視できる長さ ℓ の棒を結びつける．棒の他端は，y 軸上を自由に動くように設定し，さらに，この棒の y 軸上の端と座標原点 O とを，自然長 L, ばね定数 k のばねで結んでおく．この棒の y 軸に接するところで，一定の下向き力 P を加えたとき，質点 m がどのような動きをするかを解析する．ただし，質点 m とばねは立体的に交差するようにしておき，互いに衝突することなく，すり抜けられるものとする．また，ばねの自然長 L は棒の長さ ℓ よりも大きいものとする．

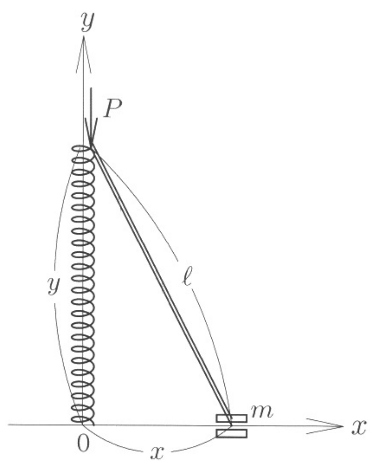

図 1　座屈モデル

この問題を Lagrangian 形式を使う方法で解析してみよう．時刻 t における質点 m の x 座標を $x(t)$, また，棒の他端の y 座標を $y(t)$ とする．このときの質点 m の運動エネルギーを T とすると，

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \tag{2.1}$$

* 北海学園大学名誉教授

となる．ここに，x に付けた上付きドットは時間微分を表す．また，ばねの歪みエネルギー U_1 と，棒の y 軸に接するところで加える力 P の位置エネルギー U_2 は[1)]，

$$U_1 = \frac{1}{2}k(L-y)^2, \qquad U_2 = Py \tag{2.2}$$

となる．これらの量から Lagrangian $\mathcal{L} = T - U_1 - U_2$ を時間で積分した作用積分 $\mathcal{I}$ を

$$\mathcal{I} = \int \mathcal{L}\,dt = \int (T - U_1 - U_2)dt \tag{2.3}$$

と定義する．この x, y に関する変分をとると，

$$\delta\mathcal{I} = \int \big[-m\ddot{x}\delta x + k(L-y)\delta y - P\delta y \big] dt \tag{2.4}$$

となる．ここで，被積分関数の 1 項目に関しては，部分積分を実行した．さらに，図 1 から分かるように，

$$x^2 + y^2 = \ell^2, \qquad \text{から}, \qquad x\delta x + y\delta y = 0 \tag{2.5}$$

となり，δy を δx で表し，(2.4) 式の変分をゼロとおくと，

$$m\ddot{x} + \big[k(L-y) - P\big]\frac{x}{y} = 0 \tag{2.6}$$

を得る．ここで，(2.5) 式から

$$y = \sqrt{\ell^2 - x^2} \tag{2.7}$$

となるので，y を x で表すと

$$m\ddot{x} = kx + (P - kL)\frac{x}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} \tag{2.8}$$

となる．これが運動方程式である．この式をさらに簡素化するため，長さについては ℓ を単位とし，また，時間については，$\sqrt{m/k}$ を単位にとることにして，変数 x, t の無次元化をしよう．すなわち，x, t を改めて，

$$x/\ell \;\to\; x, \qquad t/\sqrt{m/k} \;\to\; t \tag{2.9}$$

とおき直し，これにともなって，パラメータ P, L も

$$P/(k\ell) \;\to\; P, \qquad L/\ell \;\to\; L \tag{2.10}$$

とおき直す．これで，方程式は

$$\ddot{x} = x + \alpha\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \alpha = P - L \tag{2.11}$$

と書き直される．ここに，α はこの第 2 式で定義される．この力の部分をポテンシャル形式で書くと，

$$\ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx}, \qquad U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \alpha\big[\sqrt{1-x^2} - 1\big] \tag{2.12}$$

と表される．ここで，U を決めるときの積分定数は $U(0) = 0$ となるように選んだ．このように，ポテンシャル U は，α という 1 個のパラメータのみで記述される．

[1)] この「力 P の位置エネルギー」という言い方については「付録 1」のところに書いておいたので参照されたい．

つぎの図 2 に，α の値に応じた典型的な場合のポテンシャル $U(x)$ のグラフを示す．この図で

$$(1)\ \ \alpha < -1, \qquad (2)\ \ -1 < \alpha < -\frac{1}{2}, \qquad (3)\ \ -\frac{1}{2} < \alpha < 0, \qquad (4)\ \ 0 < \alpha \tag{2.13}$$

の各場合を示す．

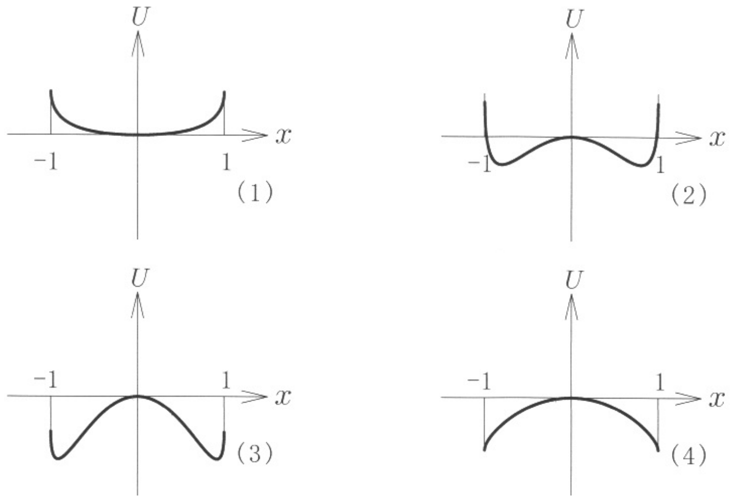

図 2 典型的なポテンシャル図

この図から，(1) の場合は $x = 0$ が安定平衡点となる．(2), (3) の場合は，$x = 0$ が不安定平衡点で，また，ポテンシャルが極小となる

$$x = \pm\sqrt{1-\alpha^2} \tag{2.14}$$

の 2 点が安定平衡点となる[2)]．この (2) と (3) の違いは，(2) では $x = \pm 1$ での U の値が正であるが，(3) ではその値が負となる．また，(4) の場合は $x = 0$ が不安定平衡点となり，安定平衡点は存在しなくなる．

これを座屈の観点から見てみよう．ここでは，ばねの自然長 L は棒の長さ ℓ より大きいものとしているので，ばねは縮めた状態で棒に付いてている．このとき，棒を上から押さえつける力 P が小さければ (2.11) の α の定義から $\alpha < -1$ となり，(1) の状態となる．このときは座屈なしである．押さえる力 P を大きくしていくと (2) の 2 重極小ポテンシャルの状態になる．こうなると，それまでの対称性は破れ，x 正，あるいは，負の側に撓んだ状態になり，座屈が起こる．(3), (4) はその座屈がさらに進んだ状態である．

(2.12) の第 1 式に $\dot{x}$ を掛け，両辺を時間 t で積分すると，エネルギー積分

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E \tag{2.15}$$

を得る．この E は積分定数で，この場合は全エネルギーを表す．これから $\dot{x}$ を求め変数分離し，積分形にすると，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2(E-U)}} = \pm\int dt \tag{2.16}$$

あるいは，(2.12) 第 2 式の U を代入して，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2E + 2\alpha + x^2 - 2\alpha\sqrt{1-x^2}}} = \pm\int dt \tag{2.17}$$

[2)] この式の力学的な意味については「付録 2」を参照されたい．

となる．ここで符号 $\pm$ は錘が動くときの速度の符号に対応する．このときの被積分関数の分母は 2 重の平方根を含むので，$1 - x^2 = u^2$ と変数変換をすると，この式の分母は単一の平方根で表されるが，その中身は u の 4 次式となるので，一般には楕円積分となる．しかしここでは，楕円関数を用いた解ではなく，近似を使うことで，初等関数で表される解のみに限定することにする．

以下，その近似計算による積分例を示す．$|x|$ が十分に小さいときは，

$$\sqrt{1-x^2} \cong 1 - \frac{1}{2}x^2 \tag{2.18}$$

と近似されるので，(2.17) 式は

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2E + (1+\alpha)x^2}} = \pm \int dt \tag{2.19}$$

となる．ここで，$E > 0$ として，図 2 の (1) の場合，すなわち，$\alpha < -1$ のときは，x から p への変数変換

$$\sqrt{|1+\alpha|}\; x = \sqrt{2E}\, \sin p \tag{2.20}$$

をすると，この積分は簡単に実行され，解は

$$x(t) = \pm\sqrt{\frac{2E}{|1+\alpha|}}\; \sin\left(\sqrt{|1+\alpha|}\,(t - t_0)\right) \tag{2.21}$$

となって，これは $x = 0$ の安定平衡点まわりの振動を表す．また， (2) (3) (4) の場合のように，$-1 < \alpha$ のときは，変数変換

$$\sqrt{1+\alpha}\; x = \sqrt{2E}\, \sinh p \tag{2.22}$$

を実行すると，解は，

$$x(t) = \pm\sqrt{\frac{2E}{1+\alpha}}\, \sinh\left(\sqrt{1+\alpha}\,(t - t_0)\right) \tag{2.23}$$

と求められ，この場合は $x = 0$ の点が不安定平衡点であることを示す．

その他として，図 2 の (2) (3) の場合は，2 重極小ポテンシャルとなるが，このうち (3) の場合は，質点はすぐに $x = \pm 1$ の壁にぶつかってしまうが，(2) の場合は，全エネルギー E がある程度の範囲内であれば，壁にぶつからずに運動できる．このときはこのポテンシャルを 4 次式で近似できるであろう．そこで，積分式 (2.17) の被積分関数の分母に含まれる $\sqrt{1-x^2}$ を x の 4 次の項まで展開すると，

$$\sqrt{1-x^2} \cong 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 \tag{2.24}$$

となるので，(2.17) 式は

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2E + (1+\alpha)x^2 + (\alpha/4)x^4}} = \pm \int dt \tag{2.25}$$

となる．これは，一般に，第 1 種楕円積分で実行されるが，このうち $E = 0$ という特別の場合は，

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\alpha + (\alpha/4)x^2}} = \pm \int dt \tag{2.26}$$

となって，この積分は初等関数で実行される．実際，変数変換

$$\frac{\sqrt{|\alpha|}}{2}x = \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\cosh p} \tag{2.27}$$

によって簡単に積分され，解は

$$x(t) = \pm 2\sqrt{\frac{1+\alpha}{|\alpha|}}\frac{1}{\cosh\left[\sqrt{1+\alpha}(t-t_0)\right]} \tag{2.28}$$

と求められる．この解は $t = t_0$ のときポテンシャルがゼロとなる点[3] $x = \pm 2\sqrt{(1+\alpha)/|\alpha|}$ から出発して，時間の経過とともにゆっくりと $x = 0$ に近づいていく解である．これは波動ではないが，時間 t を空間座標とみなすと，ソリトン型の解になっている．

3　もう一つのモデル

前節では，ソリトン型に相当する解を得た．そうであるならば，モデルを多少変更することで，キンク型の解もでるのではと考えられる．少し座屈からは離れてしまうが，このことについて議論を展開してみよう．

図 3 に示す装置を考える．これは，前節のモデルの縦についていたばねを横にしたものである．このばねの左端は x 軸上の負の値のところに固定され，ばねの右端には質量 m の質点が付いている．ただし，ばねが自然長にあるときはその右端はちょうど原点の位置にあるものとする．したがって，この図は，ばねが x だけ伸びた状態を表している．前節と同じく，時刻 t における質点の x 座標を $x(t)$, 棒の y 軸に付けられた点の y 座標を $y(t)$ とする．質点の運動エネルギー T, ばねの歪みエネルギー U_1, 棒に y 軸上で加える力 P の位置エネルギー U_2 は，それぞれ,

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad U_1 = \frac{1}{2}kx^2, \quad U_2 = Py \tag{3.1}$$

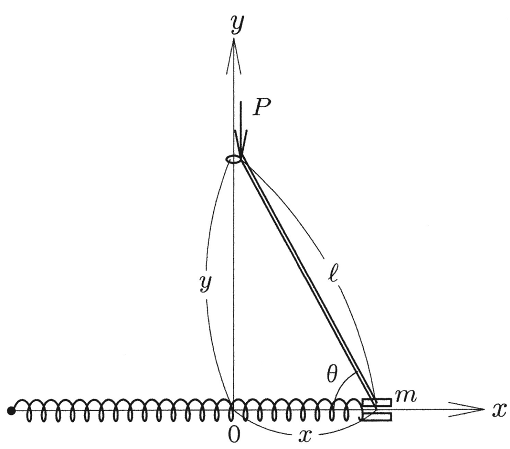

図 3　もう一つのモデル

となるので，Lagrangian $\mathcal{L} = T - U_1 - U_2$ を時間で積分した作用積分 $\mathcal{I}$ は

$$\mathcal{I} = \int (T - U_1 - U_2)dt \tag{3.2}$$

となり，これを変分してゼロとおくと，前節と同様にして，運動方程式

$$m\ddot{x} = -kx + P\frac{x}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} \tag{3.3}$$

を得る．ここで，前節と同じく，x, t, P の無次元化を (2.9) (2.10) 式にしたがって実行すると，方程式は

$$\ddot{x} = -x + P\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.4}$$

となる．これは，(2.11) 式と比べると，右辺 1 項目の x の符号が変わっており，また，2 項目に関しては $\alpha = P - L$ が P に代わっている．これを，ポテンシャル形式で書くと，

$$\ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx}, \qquad U(x) = \frac{1}{2}x^2 + P\left[\sqrt{1-x^2} - 1\right] \tag{3.5}$$

[3] このときの「ポテンシャルがゼロになる点」というのは，あくまでも，(2.24) 式の近似を行ったうえでの議論である．

となる．このときの積分定数は，前と同じく，$U(0)=0$ となるようにとった．

図 4 に，このポテンシャルの典型的な例を挙げる．

$$(1)\quad P<0, \qquad (2)\quad 0<P<1, \qquad (3)\quad 1<P \tag{3.6}$$

の各場合である．

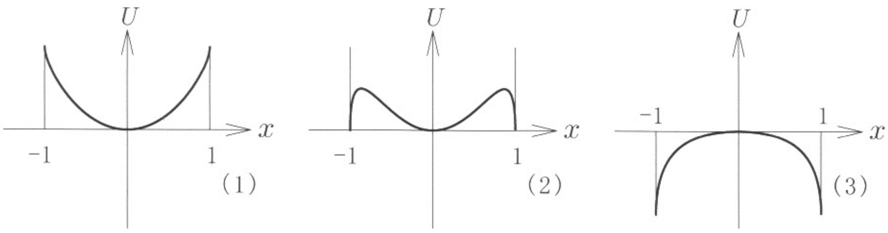

図 4 典型的なポテンシャル図

この図から，(1) (2) の場合は $x=0$ が安定平衡点，(3) では $x=0$ が不安定平衡点となることがわかる．また，(2) の場合は

$$x=\pm\sqrt{1-P^2} \tag{3.7}$$

のところで，2 重極大値をとる[4]．

この 2 重極大点を結ぶ区間を，(2.24) の近似式を用いると，(3.5) のポテンシャル U は，

$$U=\frac{1-P}{2}x^2-\frac{P}{8}x^4 \tag{3.8}$$

となる．この場合も前節の (2.15) (2.16) 式はそのまま成立するので，これを (2.16) 式に代入すると

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2E-(1-P)x^2+(P/4)x^4}}=\pm\int dt \tag{3.9}$$

となる．これは，一般には，楕円積分であるが，被積分関数分母の平方根の中が，完全平方式になる

$$E=\frac{(1-P)^2}{2P} \tag{3.10}$$

のときは，

$$\int\frac{dx}{\dfrac{2(1-P)}{P}-x^2}=\pm\frac{\sqrt{P}}{2}\int dt \tag{3.11}$$

となるので，左辺の積分は，x から p への変数変換

$$x=\sqrt{\frac{2(1-P)}{P}}\tanh p \tag{3.12}$$

によって積分され，解は，

$$x(t)=\pm\sqrt{\frac{2(1-P)}{P}}\tanh\left[\sqrt{\frac{1-P}{2}}(t-t_0)\right] \tag{3.13}$$

[4] この 2 重極大ポテンシャルの力学的な意味については「付録 2」を参照されたい．

と求められる．なお，ここで付け加えておくと，(3.10) 式の E の値は，$x=\pm\sqrt{2(1-P)/P}$ における U の極大値 $U_m=(1-P)^2/(2P)$ であり，この (3.13) の解は，$t=t_0$ のとき，$x=0$ から出発して，時間の経過とともにゆっくりとこの極値に近づいていくことを示す．これは波動の言葉でいうとキンク型の解に相当する．ただし，ここで x が区間 $(-1,\ 1)$ に入るためには，$2/3<P<1$ に限定されることに注意する．

4　おわりに

今回の図 2 (2) の 2 重極小ポテンシャルを見ているうちに，一昔以上前に，場の量子論で，ϕ^4 理論というのが流行ったことを思い出した．今回のものはまさに，この理論の古典バージョンである．ただし，ϕ^4 理論では，キンク型の解が求まるが，今回のものはソリトン型の解になってしまった．そこで，無理やりキンク型の解を求めようとしたのが，3 節での議論である．ただし，後で気が付いたのだが，3 節における装置は，非線形ばねを用いると，こんな大げさなものを用意しないで済むことであった．代表的な非線形ばねの場合，それを x だけ伸ばすのに必要な力 F は，

$$F=kx+\gamma x^3$$

と書かれる．ここで，k は通常のばね定数であるが，その他に，x の 3 乗に比例する項が入っていて，この係数を γ としたとき，γ は正負両方の場合があり得る．γ が正のとき，このばねをハードスプリング，負のときをソフトスプリングと呼ぶ．ここでの 3 節の議論に当てはめると (3.4) 式の $1/\sqrt{1-x^2}$ を x について 2 次の項まで展開したとき，$x/\sqrt{1-x^2}$ 全体としては 3 次の式となるので，ポテンシャル U は 4 次の式になって，この非線形ばねの場合と等価にすることができる．

5　付録 1

ここで扱ったモデルは，図 1，図 3 で見るように，棒が y 軸に接するところで，外部から下向きの力 P を加えるというものであった．しかし，この力 P を作用させる替わりに y 軸に沿って動く質量 m' の錘に棒とばねを結びつけるという方法も考えられる．このときは重力加速度を g として，$P=m'g$ となり，(2.2) 式のところで述べたように，力 P の「位置エネルギー」は $Py=m'gy$ となるのでこのような書き方をした．しかしこのように考えてしまうと，錘 m' による運動エネルギーも考慮しなければならなくなるので，これは 2 体問題になってしまう．これを避けるには，$m'g$ の値を一定値 P に押さえたまま，極限操作 $m'\to 0,\ g\to\infty$ をとるものとする．これで，形式的ではあるが，運動エネルギーをゼロとしたまま，位置エネルギーだけを定義できる．この棒が y 軸に接するところで，もう一つの錘を付けて，2 体問題として扱う方法については次回で考えることにする．

6　付録 2

ここでは，計算式を簡素化するため，変数の無次元化を用いた．確かに，変数の無次元化をすると，パラメータの個数が減るので，計算はし易くなるが，その代償として力学的な構造が見えずらくなる．ここでは無次元化する前の元の変数を用いて，以下の 2 点を補足しておく．

初めに，図 1 に示すメカニズムの場合のポテンシャル U は (2.2) 式より

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}k(L-y)^2 + Py \tag{A.1}$$

と表される．ここで，x と y は $x^2+y^2=\ell^2$ の関係があるので，この U は x の関数と考えてもよく，これを x で微分すると，

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dU}{dy} = -\frac{x}{\sqrt{\ell^2-x^2}}\big[-k(L-y)+P\big] \tag{A.2}$$

となるので，この値が $x=0$ 以外でゼロになるのは，

$$P = k(L-y) \tag{A.3}$$

が成立するときである．これはばねが棒の先端を上向きに押す力 $k(L-y)$ と外から棒の先端に与える力 P が等しいことを示す．この式を x で表わすと

$$x = \pm\sqrt{\ell^2 - \big(L-P/k\big)^2} \tag{A.4}$$

となり，これが 2 重極小点を与える．これを無次元化した式で書くと，$x=\pm\sqrt{1-\alpha^2}$ となって (2.14) 式を与える．

つぎに図 3 に示すメカニズムの場合について，このときのポテンシャル U は，無次元化する前の変数で

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + Py \tag{A.5}$$

と書かれる．ただし，ここでは定数項の調整はしていない．この式の y を x で表して $y=\sqrt{\ell^2-x^2}$ としてから x で微分すると，

$$\frac{dU}{dx} = \left[k - \frac{P}{\sqrt{\ell^2-x^2}}\right]x \tag{A.6}$$

となるので，この値が $x=0$ 以外でゼロ，すなわち，U が極値になるのは，

$$P = k\sqrt{\ell^2-x^2} \quad \big(=ky\big) \tag{A.7}$$

のときである．これはどのようなメカニズムのときに起るかを考察する．いま図 3 に示すように棒と x 軸がなす角を θ とし，棒が斜め右下 θ 方向に錘に加える力を T とする．このとき，錘にはばねから x 軸負の向きに kx の力を受けているので錘が静止するためには，

$$T\cos\theta = kx \tag{A.8}$$

となることが必要である．なお，棒から錘が受ける x 軸に垂直な成分は，錘が x 軸から受ける力で打ち消される．また，棒はその先端部で y 軸にリングを通して結び付けられているが，このリングに斜め左上 $\pi/2-\theta$ 方向に T の力を作用させる．したがって，棒が静止するためには，外から下向きに与える力 P とのあいだに，

$$T\sin\theta = P \tag{A.9}$$

の関係が必要になる．この力 T の y 軸に垂直な成分はリングが y 軸から受ける垂直な力で打ち消される．これら 2 つの式から T を消去すると，

$$P = kx\tan\theta \quad \big(=ky\big) \tag{A.10}$$

となって，(A.7) 式が再現される．また，(A.7) 式を無次元化してから，x を求めると $x=\pm\sqrt{1-P^2}$ となり，図 4 のところの (3.7) 式で述べた U が極大になる x の値と一致する．ただし，この値はポテンシャルを x の 4 次式で近似して求めたものとは当然のことながら一致しないことを注意する．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただきました．先生からいただいたコメントにしたがい修正をしました．先生に，心から感謝いたします．

四元数（補遺 3）（改訂版）

– 四元数とパウリ行列 –

矢野　忠[*1]

The Quaternions (Appendix 3) (Revised Version)

- The Quaternions and Pauli Matrices -

Tadashi YANO[*2]

目次

1. はじめに
2. i, j, k を 2 次の行列で表す 1
3. i, j, k を 2 次の行列で表す 2
4. パウリ行列との対応
5. 四元数の行列表示
6. おわりに
7. 付録　p, q, r の求め方

まえおき

これはエッセイ [1] の改訂版である．節の順序を入れ変えたり，説明や表現を細かく丁寧にしている．また似たような議論が続くので，その視点が前の節の議論とどうちがうかなどをつけ加えている．読みやすくなるようにと思っての改訂ではあるが，かえって複雑になっているかもしれない．その場合には御叱正をお願いしたい．

1　はじめに

四元数の元として $1, i, j, k$ の中で 1 を除いた 3 つの元 i, j, k がパウリ行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ でどのように表されるかを『四元数の発見』 [2] に書いた．

これは i, j, k のしたがう代数と $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ のしたがう代数とを既知の知識として，単に関係づけただけであった．どのようにして i, j, k が 2 次のユニタリー行列で表されるかについては考えていなかった．このエッセイではそのことについて述べてみよう．

2　i, j, k を 2 次の行列で表す 1

『組ひもの数理』 [3] の第 8 話に i, j, k を 2 次の行列でどのように表すかが述べられている．この節ではそのことを計算を補足しながら述べてみよう．

四元数 i, j, k を 2 次の行列で表したいのだが，まず複素数 $z = x + yi$ を 2 次の行列で表すことから考えよう．このときこの複素数を 2 つの実数の組 (x, y) として平面上の一つの点と考える．

*1 元愛媛大学工学部
*2 yanotad@earth.ocn.ne.jp

いま，$z = x + yi$ に右から虚数単位 i をかければ，

$$zi = -y + xi \tag{2.1}$$

となる．そうするとこの複素数 zi はやはり同じ平面上の一つの点 $(-y, x)$ である．つまり複素数 z に i をかける操作 zi は平面上の一点 (x, y) を $(-y, x)$ に対応させる変換にあたっている．すなわち，

$$\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

の中に与えられている行列

$$\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}, \ (s, t, u, v: \text{ 実数}) \tag{2.3}$$

は平面上の一点 (x, y) を $(-y, x)$ に対応させる変換である．(2.2) から

$$\begin{aligned} sx + ty &= -y, \\ ux + vy &= x \end{aligned}$$

であるから，この連立方程式で両辺を比較して，s, t, u, v を求めれば

$$s = 0, \quad t = -1, \quad u = 1, \quad v = 0 \tag{2.4}$$

が得られる．この場合にはこの未定係数 s, t, u, v を求めるのにわざわざ式で表さなくとも視察で

$$\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

であることは直ぐにわかる．

考えとしては同様のことを四元数に行えば，四元数の元を 2 次の行列で表すことができる．以下では，このことを具体的に示す．

そのために四元数 $a + bi + cj + dk$ を 2 つの複素数でつぎのように表す．

$$a + bi + cj + dk = a + bi + (c + di)j \tag{2.6}$$

ここで $k = ij$ を用いている．

いま

$$z = a + bi, \quad w = c + di \tag{2.7}$$

と表すと

$$a + bi + (c + di)j = z + wj \tag{2.8}$$

となる．

ここで四元数 $z + wj$ に右から四元数 u をかけて

$$z' + w'j = (z + wj)u \tag{2.9}$$

とすれば (z, w) から (z', w') が得られる．すなわち，右から四元数 u をかけて (z, w) から (z', w') に変換される．

以下では四元数 u として，$1, i, j, k$ をとって対応する行列を求めてみよう．

(1) $u = 1$ **のとき**

$$z' + w'j = (z + wj) \cdot 1 \tag{2.10}$$

であるから

$$\begin{aligned} z' &= z = a + bi, \\ w' &= w = c + di \end{aligned}$$

となる．これを 2 次の行列で表せば

$$\begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

が成り立つ．したがって

$$1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := E_0 \tag{2.12}$$

と表される．

(2)　$u = i$ のとき

$$\begin{aligned} z' + w'j &= (z + wj)i \\ &= zi + wji \\ &= zi - wij \\ &= (-b + ai) + (d - ci)j \end{aligned} \tag{2.13}$$

となる．ここで $ji = -ij$ を用いた．これを 2 次の行列で表せば

$$\begin{pmatrix} -b+ai \\ d-ci \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

であるから

$$i \to \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} := E_1 \tag{2.15}$$

となる．

(3)　$u = j$ のとき

$$\begin{aligned} z' + w'j &= (z + wj)j \\ &= -w + zj \\ &= -(c + di) + (a + bi)j \end{aligned} \tag{2.16}$$

となる．ここで $j^2 = -1$ を用いた．これを 2 次の行列で表せば

$$\begin{pmatrix} -(c+di) \\ a+bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

であるから

$$j \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} := E_2 \tag{2.18}$$

となる．

(4)　$u = k$ のとき

$$\begin{aligned} z' + w'j &= (z + wj)k \\ &= zij + wi \\ &= (-d + ci) + (-b + ai)j \end{aligned} \tag{2.19}$$

となる．ここで，$k = ij, jk = i$ を用いた．これを 2 次の行列で表せば

$$\begin{pmatrix} -d+ci \\ -b+ai \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

であるから

$$k \to \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} := E_3 \tag{2.21}$$

となる．

ここで E_0, E_1, E_2, E_3 をまとめておこう．

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad E_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

この行列をケイリー (Cayley) が四元数と関係して 18 世紀にすでに見つけていたのでケイリー行列と呼ぶ文献 [7] もある．

3　i, j, k を 2 次の行列で表す 2

$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を 2 次の行列で表す第 2 の方法として，多くの文献がとっているのは 2 次のユニタリー行列 U で，かつその行列式 $\det U = 1$ の行列からの導出である*3．これを SU(2) という．

2 次のユニタリー行列で，α, β は複素数とし，$\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ は α, β の共役複素数とするとき，

(A)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

と表す場合

(1)　$\alpha = a + bi,\ \beta = c + di$ のとき

これは [4]-[9] でとられている．このとき

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \\
&= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + bi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + ci\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + di\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= a\sigma_0 + bi\sigma_3 + ci\sigma_2 + di\sigma_1 \\
&= a1 + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

ここで σ_i, $(i = 1, 2, 3)$ は量子力学でよく知られたパウリ (Pauli) 行列である．

これらのパウリ行列は

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

で定義されている．これらのパウリ行列には普通は入れないが，

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

も定義しておく．

(3.2) では $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を

$$\boldsymbol{i} = i\sigma_3,\ \boldsymbol{j} = i\sigma_2,\ \boldsymbol{k} = i\sigma_1 \tag{3.5}$$

と対応させたことになる．

(2)　$\alpha = a + di,\ \beta = c - bi$ のとき*4

*3 2 節までの i, j, k をこの 3 節から太字の $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ で表す．その主な理由は四元数の元 i, j, k の i を，複素数の場合の i と区別するためである．

*4 この 3 節の (2), (3), (4), (6) の α, β の式中では，(1), (5) の α, β の式中の b と d とが交換されていることに注意せよ．この交換をしないと 4 節に述べる $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とパウリ行列の対応の解と矛盾する．

これは [10] でとられている．このとき

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+di & c-bi \\ -c-bi & a-di \end{pmatrix} \\
&= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + di\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + ci\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - bi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= a\sigma_0 + di\sigma_3 + ci\sigma_2 - bi\sigma_1 \\
&= a1 + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

(3.6) では $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ を

$$
\boldsymbol{i} = -i\sigma_1,\ \boldsymbol{j} = i\sigma_2,\ \boldsymbol{k} = i\sigma_3 \tag{3.7}
$$

と対応させたことになる．

(3) $\alpha = a - di,\ \beta = -c - bi$ **のとき**

これは [11] でとられている．このとき

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a-di & -c-bi \\ c-bi & a+di \end{pmatrix} \\
&= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - di\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - ci\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - bi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= a\sigma_0 - di\sigma_3 - ci\sigma_2 - bi\sigma_1 \\
&= a1 + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

となる．

(3.8) では $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ を

$$
\boldsymbol{i} = -i\sigma_1,\ \boldsymbol{j} = -i\sigma_2,\ \boldsymbol{k} = -i\sigma_3 \tag{3.9}
$$

と対応させたことになる．

(4) $\alpha = a - di,\ \beta = c + bi$ **のとき**

これは [12] でとられている．このとき

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a-di & c+bi \\ -c+bi & a+di \end{pmatrix} \\
&= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - di\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + ci\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + bi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= a\sigma_0 - di\sigma_3 + ci\sigma_2 + bi\sigma_1 \\
&= a1 + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

となる．

これは (3.10) では $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ を

$$
\boldsymbol{i} = i\sigma_1,\ \boldsymbol{j} = i\sigma_2,\ \boldsymbol{k} = -i\sigma_3 \tag{3.11}
$$

と対応させたことになる．

つぎに，2 次のユニタリー行列を，α, β を (A) と同様に複素数として

(B)

$$
\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \tag{3.12}
$$

と表す場合

(5) $\alpha = a + bi,\ \beta = c + di$ **のとき**

これは [13] によってとられている．このとき

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a+bi & -(c+di)\\ c-di & a-bi\end{pmatrix}\\ &= a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + bi\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} - ci\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} - di\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\ &= a\sigma_0 + bi\sigma_3 - ci\sigma_2 - di\sigma_1\\ &= a1 + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k} \end{aligned}\tag{3.13}$$

(3.13) では $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ を

$$\boldsymbol{i} = i\sigma_3,\ \boldsymbol{j} = -i\sigma_2,\ \boldsymbol{k} = -i\sigma_1 \tag{3.14}$$

と対応させたことになる．

(6)　$\alpha = a+di,\ \beta = c-bi$ **のとき**

これは [3] によってとられている．このとき

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a+di & -c+bi\\ c+bi & a-di\end{pmatrix}\\ &= a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + di\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} - ci\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} + bi\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\ &= a\sigma_0 + di\sigma_3 - ci\sigma_2 + bi\sigma_1\\ &= a1 + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k} \end{aligned}\tag{3.15}$$

(3.15) では $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ を

$$\boldsymbol{i} = i\sigma_1,\ \boldsymbol{j} = -i\sigma_2,\ \boldsymbol{k} = i\sigma_3 \tag{3.16}$$

と対応させたことになる*5.

なお [14] では p.45 に $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ と σ_1，σ_2，σ_3 との対応として

$$\boldsymbol{i} = -i\sigma_1,\ \boldsymbol{j} = -i\sigma_2,\ \boldsymbol{k} = -i\sigma_3 \tag{3.9}$$

と正しくとられているが，[14] の p.70 の

$$\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix} \tag{3.12}$$

で $\alpha = a+bi, \beta = c+di$ ととれば，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ は (3.14) の対応になり，対応 (3.7) とは一致しない．

4　パウリ行列との対応

2, 3 節で見たように四元数の元 i, j, k とパウリ行列 σ_1，σ_2，σ_3 との対応がいろいろあることがわかった．この節ではどのような対応があるのか，そのすべてを調べてみる．

問題は四元数 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ の間にある代数関係

$$\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j} \tag{4.1}$$

*5 [3] では

$$\alpha = a+bi,\quad \beta = c-di$$

と表されているが，4 節で見るようにこれは解をもてないので，解をもつように

$$\alpha = a+di,\quad \beta = c-bi$$

と変更している．

とパウリ行列 $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ の間にある代数関係

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3,\ \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1,\ \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2 \tag{4.2}$$

をみたしながら，それらの対応をどうつけられるかである．

$\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ の順序を固定して，$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ の順序をかえることを考えればよい．可能性としてはパウリ行列の添字 $(1,2,3)$ の偶置換の順序 $(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)$ と奇置換の順序 $(3,2,1),(2,1,3),(1,3,2)$ の 6 通りが考えられる．

これらの 6 つの対応のさせ方があるが，$(1,2,3)$ の偶置換の場合にはその中から典型例として $(1,2,3)$ をとることにしよう．このとき $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ を $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ の順に対応づけられる．すなわち，

$$\boldsymbol{i} \to p\sigma_1,\ \boldsymbol{j} \to q\sigma_2,\ \boldsymbol{k} \to r\sigma_3 \tag{4.3}$$

と対応させたときである．このときに p,q,r の値はどうなるか．

もう一つの対応のさせ方として $(1,2,3)$ の奇置換の場合にはその中から典型例として $(3,2,1)$ をとることにしよう．このとき $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ を $\sigma_3,\sigma_2,\sigma_1$ の順に対応づけられる．すなわち，

$$\boldsymbol{i} \to p\sigma_3,\ \boldsymbol{j} \to q\sigma_2,\ \boldsymbol{k} \to r\sigma_1 \tag{4.4}$$

と対応させたときである．このときに p,q,r の値はどうなるか．

まず

(1) $\boldsymbol{i} \to p\sigma_1,\ \boldsymbol{j} \to q\sigma_2,\ \boldsymbol{k} \to r\sigma_3$ **の場合**

このとき

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ij} &= (p\sigma_1)(q\sigma_2)\\ &= pqi\sigma_3\\ &= \frac{ipq}{r}(r\sigma_3)\\ &= \frac{ipq}{r}\boldsymbol{k}\\ &= \boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{4.5}$$

であるから，

$$\frac{ipq}{r} = 1 \tag{4.6}$$

から，方程式

$$r = ipq \tag{4.7}$$

が求まり，同様に $\boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i}$ から，方程式

$$p = iqr \tag{4.8}$$

と $\boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j}$ から，方程式

$$q = irp \tag{4.9}$$

が求められる．

方程式 (4.7)-(4.9) の未知数は p,q,r の 3 つであり，方程式も 3 つあるから解けるであろう．

この解き方は付録に述べることにして方程式 (4.7)-(4.9) の解は

$$\begin{aligned}&(1)\quad p=i,\quad q=i,\quad r=-i,\\ &(2)\quad p=i,\quad q=-i,\quad r=i,\\ &(3)\quad p=-i,\quad q=i,\quad r=i,\\ &(4)\quad p=-i,\quad q=-i,\quad r=-i\end{aligned}$$

である．これらの解のうち (1), (2), (3), (4) はそれぞれ (3.11), (3.16), (3.7), (3.9) に対応している．

つぎに $(1,2,3)$ の奇置換である，$(3,2,1)$ の場合の

(2) $\boldsymbol{i} \to p\sigma_3,\ \boldsymbol{j} \to q\sigma_2,\ \boldsymbol{k} \to r\sigma_1$ **の場合**

このとき

$$\begin{aligned} \boldsymbol{ij} &= (p\sigma_3)(q\sigma_2) \\ &= pq(-i)\sigma_1 \\ &= \frac{-ipq}{r}(r\sigma_1) \\ &= \frac{-ipq}{r}\boldsymbol{k} \\ &= \boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{4.10}$$

であるから，

$$\frac{-ipq}{r} = 1 \tag{4.11}$$

から，方程式

$$r = -ipq \tag{4.12}$$

が求まり，同様に $\boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i}$ から，方程式

$$p = -iqr \tag{4.13}$$

と $\boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j}$ から，方程式

$$q = -irp \tag{4.14}$$

が求められる．

方程式 (4.12)-(4.14) の未知数は p, q, r の 3 つであり，方程式も 3 つあるからやはり解けるであろう．

この解き方もやはり付録に述べることにして，(4.12)-(4.14) の解は

$$\begin{aligned} &(5)\quad p = i,\quad q = i,\quad r = i, \\ &(6)\quad p = i,\quad q = -i,\quad r = -i, \\ &(7)\quad p = -i,\quad q = i,\quad r = -i, \\ &(8)\quad p = -i,\quad q = -i,\quad r = i \end{aligned}$$

である．これらの解のうち (5), (6) はそれぞれ (3.5), (3.14) に対応している．

以上の結果から，四元数の虚数単位 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とパウリ行列 σ_1，σ_2，σ_3 の対応のしかたは (1)-(8) の 8 通りである．

2 節で求めた 2 次のケイリー行列 E_1, E_2, E_3 をパウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

で表せば

$$E_1 = i\sigma_3,\quad E_2 = -i\sigma_2,\quad E_3 = i\sigma_1 \tag{4.16}$$

となる．

しかし，実はこのとき

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} &\to E_1 = i\sigma_3, \\ \boldsymbol{j} &\to E_2 = -i\sigma_2, \\ \boldsymbol{k} &\to E_3 = i\sigma_1 \end{aligned} \tag{4.17}$$

と対応させることができない．端的にいえば，これに対応した解が (5)-(8) の中にないからである．

少し詳しく述べれば，これは

$$\boldsymbol{i} \to p\sigma_3,\ \boldsymbol{j} \to q\sigma_2,\ \boldsymbol{k} \to r\sigma_1$$

と対応させたときに得られる，関係

$$p = -iqr, \tag{4.13}$$
$$q = -ipr, \tag{4.14}$$
$$r = -ipq, \tag{4.12}$$

の解となることができない*6．上の対応 (4.17) では

$$p = i, q = -i, r = i$$

であるが，これは，たとえば (4.13) の

$$p = -iqr,$$

をみたすことができない．左辺に $p = i$ を代入し，右辺に $q = -i, r = i$ を代入しても左辺と右辺が等しくならないから．

ちょっと頭が混乱するが，2 節の四元数 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ に対応した行列を (4.17) からちょっとだけ変更して，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} &\to E_1 = i\sigma_3, \\ \boldsymbol{j} &\to E_2 = -i\sigma_2, \\ \boldsymbol{k} &\to -E_3 = -i\sigma_1 \end{aligned} \tag{4.18}$$

とすれば，$p = i, q = -i, r = i$ が $p = i, q = -i, r = -i$ に変わり，これは上の (6) の場合になるので解の中に入る．しかし，ちょっとした工夫が必要であった．

これらの $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とパウリ行列 σ_i, $(i = 1, 2, 3)$ の対応でつけた未定の定数 p, q, r の求め方については付録に述べたが,『四元数の発見』pp. 115-118 にも説明されている．

5 四元数の行列表示

3 節では 2 次のユニタリー行列から，四元数の 3 つの虚数単位 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ をパウリ行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ とどのように対応させるか調べた．また 4 節では $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とパウリ行列の対応をパウリ行列の添字が偶順列 $(1, 2, 3)$ のときには

$$\boldsymbol{i} \to p\sigma_1,\ \boldsymbol{j} \to q\sigma_2,\ \boldsymbol{k} \to r\sigma_3$$

と対応させた場合を，またパウリ行列の添字が奇順列 $(3, 2, 1)$ のときには

$$\boldsymbol{i} \to p\sigma_3,\ \boldsymbol{j} \to q\sigma_2,\ \boldsymbol{k} \to r\sigma_1$$

と対応させた場合を調べた．ここでは，この 2 例しか調べていないが，他の偶順列の場合の解も $(1, 2, 3)$ の解と同じであり，他の奇順列の場合の解も $(3, 2, 1)$ の解と同じだということが示されている [15].

$$\boldsymbol{i} = p\sigma_1,\ \boldsymbol{j} = q\sigma_2,\ \boldsymbol{k} = r\sigma_3 \tag{5.1}$$

と対応させたとき，解として前に述べた 4 節の (1)-(4) の 4 通りがあり，

$$\boldsymbol{i} = p\sigma_3,\ \boldsymbol{j} = q\sigma_2,\ \boldsymbol{k} = r\sigma_1 \tag{5.2}$$

*6 これらの式 (4.12)-(4.14) の解き方は付録の (7.20)-(7.22) 以下を参照せよ．

と対応させたとき，解としてやはり前に述べた (5)-(8) の 4 通りがあることがすでに分かっている*7.

この 5 節ではこれらの 8 通りの場合について四元数 $w+x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ を 2 次の行列でどう表せるか示す.

まず (1)-(4) については

$$\begin{aligned}
(1)\quad w+x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} &= w\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+xi\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+yi\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}-zi\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}w-zi&y+xi\\-y+xi&w+zi\end{pmatrix} \qquad (5.3)\\
(2)\quad w+x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} &= w\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+xi\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-yi\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+zi\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}w+zi&-y+xi\\y+xi&w-zi\end{pmatrix} \qquad (5.4)\\
(3)\quad w+x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} &= w\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-xi\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+yi\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+zi\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}w+zi&y-xi\\-y-xi&w-zi\end{pmatrix} \qquad (5.5)\\
(4)\quad w+x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} &= w\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-xi\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-yi\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}-zi\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}w-zi&-y-xi\\y-xi&w+zi\end{pmatrix} \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

となる.

つぎに (5)-(8) については一般的に $x\leftrightarrow z$ の交換をした行列を用いるから，最後の行列でこの置換をすれば，

$$\begin{aligned}
(5)\quad w+x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} &= w\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+xi\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+yi\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+zi\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}w+xi&y+zi\\-y+zi&w-xi\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}w+zi&y+xi\\-y+xi&w-zi\end{pmatrix}:\ \text{(5.6) のエルミート共役} \qquad (5.7)\\
(6)\quad w+x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} &= w\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+xi\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}-yi\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}-zi\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}w+xi&-y-zi\\y-zi&w-xi\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}w+zi&-y-xi\\y-xi&w-zi\end{pmatrix}:\ \text{(5.3) のエルミート共役} \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(7)\quad w+x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} &= w\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-xi\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+yi\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}-zi\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}w-xi&y-zi\\-y-zi&w+xi\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}w-zi&y-xi\\-y-xi&w+zi\end{pmatrix}:\ \text{(5.4) のエルミート共役} \qquad (5.9)\\
(8)\quad w+x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} &= w\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-xi\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}-yi\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+zi\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}w-xi&-y+zi\\y+zi&w+xi\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}w-zi&-y+xi\\y+xi&w+zi\end{pmatrix}:\ \text{(5.5) のエルミート共役} \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

となる．この (5.7)-(5.10) の行列は (5.3)-(5.6) の行列のいずれかのエルミート共役となっている.

ここで以上の 8 通りの四元数の表示が 3 節でとった 2 次のユニタリー行列から求められた四元数の表示とどの

*7 『四元数の発見』では (8) の場合に対応した (7.5.14) がミスプリントであった．自分のノートでは正しく計算してあったが，エッセイに転記するときに間違えたらしい．これは第 2 刷で修正をしてある.

ように対応しているか見ておく．

$$
\begin{aligned}
(5.3) &\to (3.10)\\
(5.4) &\to (3.15)\\
(5.5) &\to (3.6)\\
(5.6) &\to (3.8)\\
(5.7) &\to (3.2)\\
(5.8) &\to (3.13)\\
(5.9) &\to \text{対応なし}\\
(5.10) &\to \text{対応なし}
\end{aligned}
$$

である．5 節の可能性のある式で 3 節での対応がないのはたぶん私の調べた文献に限りがあり，まだ調べていない文献には対応のないとされたものも出ているのかもしれない．

それはともかくとしてすべての可能性のある場合がこの 5 節で求められているはずである．

6　おわりに

四元数とパウリ行列との対応はすでに『四元数の発見』の中でも言及してあるが，より詳しく考えてみた．また『組ひもの数理』の第 8 話の四元数に対応した 2 次の行列の求め方を前には読んでもいなかった．今回読んでその解説を試みたのだが，分かりやすくなっただろうか．

7　付録　p, q, r の求め方

これはすでに [2] で述べたことであるが，まず

$$\boldsymbol{i} \to p\sigma_1,\ \boldsymbol{j} \to q\sigma_2,\ \boldsymbol{k} \to r\sigma_3 \tag{7.1}$$

と四元数とパウリ行列とを対応させると p, q, r にどんな値が許されるか．

この場合には $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ の代数と $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の代数とから

$$p = iqr \tag{7.2}$$

$$q = ipr \tag{7.3}$$

$$r = ipq \tag{7.4}$$

の関係が得られる．これからこの 3 つの連立方程式を解いて p, q, r を求める．解は前にあたえた 4 節の (1)-(4) であるが，ここではその導出法を述べる．この導出は初等的なものであり，難しくはないが，私の経験ではなんども同じ方程式を解くので，今後その手間を省くための記録である．

(7.2),(7.3),(7.4) を辺々かけ合わせれば，

$$pqr = i^3 p^2 q^2 r^2, \quad (p \neq 0, q \neq 0, r \neq 0)$$

上の式の両辺を $pqr(\neq 0)$ でわり，i をかければ

$$pqr = i \tag{7.5}$$

(7.2) の両辺に $-i$ をかければ，

$$qr = -ip \tag{7.6}$$

(7.6) を (7.5) に代入し，両辺に i をかければ，

$$\begin{aligned} p^2 &= -1 \\ p &= \pm i \end{aligned} \tag{7.7}$$

まず $p=i$ の場合を考えよう．(7.2) の左辺に $p=i$ を代入して，両辺に $-i$ をかければ

$$qr = 1 \tag{7.8}$$

(7.3) に $p=i$ を代入すれば，

$$q = -r \tag{7.9}$$

(7.9) を (7.8) へ代入して，q を消去して，両辺に -1 をかければ，

$$\begin{aligned} r^2 &= -1 \\ r &= \pm i \end{aligned} \tag{7.10}$$

(7.10) を (7.9) へ代入して

$$q = \mp i \tag{7.11}$$

したがって，$p=i$ の場合には解は

$$\begin{aligned} &(1)\quad p=i,\quad q=i,\quad r=-i \\ &(2)\quad p=i,\quad q=-i,\quad r=i \end{aligned}$$

となる．

つぎに $p=-i$ の場合を考えよう．(7.2) に $p=-i$ を代入し，両辺に i をかければ，

$$qr = -1 \tag{7.12}$$

(7.3) に $p=-i$ を代入すれば，

$$q = r \tag{7.13}$$

(7.13) を (7.12) へ代入して，q を消去すれば

$$\begin{aligned} r^2 &= -1 \\ r &= \pm i \end{aligned} \tag{7.14}$$

(7.14) を (7.13) へ代入して

$$q = \pm i \tag{7.15}$$

したがって，$p=-i$ の場合には解は

$$\begin{aligned} &(3)\quad p=-i,\quad q=i,\quad r=i \\ &(4)\quad p=-i,\quad q=-i,\quad r=-i \end{aligned}$$

となる．

$$\boldsymbol{i} \to p\sigma_2,\ \boldsymbol{j} \to q\sigma_3,\ \boldsymbol{k} \to r\sigma_1 \tag{7.16}$$

と四元数とパウリ行列とを対応させても

$$\boldsymbol{i} \to p\sigma_3,\ \boldsymbol{j} \to q\sigma_1,\ \boldsymbol{k} \to r\sigma_2 \tag{7.17}$$

と四元数とパウリ行列とを対応させても，これらは

$$\boldsymbol{i} \to p\sigma_1,\ \boldsymbol{j} \to q\sigma_2,\ \boldsymbol{k} \to r\sigma_3 \tag{7.18}$$

と四元数とパウリ行列とを対応させたときと同じ方程式 (7.2)-(7.4) が得られるので，p, q, r の解は (1)-(4) と同じである．これは σ の添字の順序 (2,3,1) と (3,1,2) が (1,2,3) の偶置換であることによっている．

つぎに

$$\boldsymbol{i} \to p\sigma_3,\ \boldsymbol{j} \to q\sigma_2,\ \boldsymbol{k} \to r\sigma_1 \tag{7.19}$$

と四元数とパウリ行列とを対応させると p, q, r にどんな値が許されるかを調べよう[*8]．この場合には $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ の代数と $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$ の代数とから

$$p = -iqr \tag{7.20}$$
$$q = -ipr \tag{7.21}$$
$$r = -ipq \tag{7.22}$$

の関係が得られる．これからこの 3 つの連立方程式を解いて p, q, r を求めることは前と同じである．

この (7.20)-(7.22) の解は前にあたえた 4 節の (5)-(8) である．(7.20)-(7.22) の解を求め方もほとんど同じであるが，やはりその解法を記録しておこう．

(7.20),(7.21),(7.22) を辺々かけ合わせれば，

$$pqr = (-i)^3 p^2 q^2 r^2, \quad (p \neq 0, q \neq 0, r \neq 0)$$

上の式の両辺を pqr, $(pqr \neq 0)$ でわり，$-i$ をかければ

$$pqr = -i \tag{7.23}$$

(7.20) の両辺に i をかければ，

$$qr = ip \tag{7.24}$$

であるから，(7.24) を (7.23) に代入し，両辺に $-i$ をかければ，

$$p^2 = -1$$
$$p = \pm i \tag{7.25}$$

まず $p = i$ の場合を考えよう．(7.24) に $p = i$ を代入すれば，

$$qr = -1 \tag{7.26}$$

(7.21) に $p = i$ を代入すれば

$$q = r \tag{7.27}$$

(7.27) を (7.26) へ代入して，q を消去すれば

$$r^2 = -1$$
$$r = \pm i \tag{7.28}$$

(7.28) を (7.27) へ代入して

$$q = \pm i \tag{7.29}$$

*8 (7.19) の $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ に対応した $p\sigma_3$, $q\sigma_2$, $r\sigma_1$ の σ についた添字 $(3, 2, 1)$ は $(1, 2, 3)$ の奇置換となっている．

したがって，$p=i$ の場合には解は

$$
\begin{aligned}
&(5)\quad p=i,\quad q=i,\quad r=i,\\
&(6)\quad p=i,\quad q=-i,\quad r=-i
\end{aligned}
$$

となる．

つぎに $p=-i$ の場合を考えよう．(7.20) に $p=-i$ を代入して，両辺に i をかければ，

$$qr=1 \tag{7.30}$$

(7.21) に $p=-i$ を代入して

$$q=-r \tag{7.31}$$

(7.31) を (7.30) へ代入して，q を消去して，両辺に -1 をかければ

$$
\begin{aligned}
r^2&=-1\\
r&=\pm i
\end{aligned} \tag{7.32}
$$

(7.32) を (7.31) へ代入して

$$q=\mp i \tag{7.33}$$

したがって，$p=-i$ の場合には解は

$$
\begin{aligned}
&(7)\quad p=-i,\quad q=-i,\quad r=i\\
&(8)\quad p=-i,\quad q=i,\quad r=-i
\end{aligned}
$$

となる．

他の対応も考えておく．

$$\boldsymbol{i}\to p\sigma_2,\ \boldsymbol{j}\to q\sigma_1,\ \boldsymbol{k}\to r\sigma_3$$

と四元数とパウリ行列とを対応させても

$$\boldsymbol{i}\to p\sigma_1,\ \boldsymbol{j}\to q\sigma_3,\ \boldsymbol{k}\to r\sigma_2$$

と四元数とパウリ行列とを対応させても，これらは

$$\boldsymbol{i}\to p\sigma_3,\ \boldsymbol{j}\to q\sigma_2,\ \boldsymbol{k}\to r\sigma_1$$

と四元数とパウリ行列とを対応させたときと同じ方程式 (7.20)-(7.22) が得られるので，p,q,r の解は (5)-(8) と同じである．これは (3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2) が (1, 2, 3) の奇置換であることによっている．

(2016.4.23)(2024.3.19 改訂)

参考文献

[1] 矢野　忠，四元数（補遺 3) 数学・物理通信 6 巻 5 号 (2016.6.2) 14-26

[2] 矢野　忠，『四元数の発見』（海鳴社，2014）115-118

[3] 河野俊丈，『新版　組みひもの数理』（遊星社，2009）121-123

[4] 江沢洋，島和久，『群と表現』（岩波講座　応用数学 [基礎 8]）（岩波書店，1994）126-130, 156-166

[5] 高木貞治，『代数学講義』（共立出版，1948）356

[6] 志村五郎,『数学をいかに使うか』(ちくま学芸文庫,2010)53-62
[7] J. Stillwell(上野健爾・浪川幸彦 監訳)『数学のあゆみ』下(朝倉書店)184-186
[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion
[9] http://ja.wikipedia.org/wiki/四元数
[10] H. ゴールドスタイン(瀬川,矢野,江沢 訳),『古典力学』上(第2版)(吉岡書店,1983)193-206
[11] 山内恭彦,『回転群とその表現』(岩波書店,1957)82-94
[12] E. P. Wigner, *Group Theory* (Academic Press) 158
[13] 堀源一郎,『ハミルトンと四元数』(海鳴社,2007)122-126
[14] E. Cartan, *The Theory of Spinors* (Dover Pub., 1981) 45, 70
[15] 今野紀雄,『四元数』(森北出版,2016) 66

定係数線形常微分方程式の固有値,固有ベクトルを用いた解法

根本　藤人

A Solution of Constant Coefficient Linear Ordinary Differential Equations Using Eigenvalues and Eigenvectors

Fujito Nemoto

1　はじめに

遠い昔，常微分方程式の勉強の必要に迫られた時，数学科の友達からポントリャーギンの常微分方程式の教科書を勧められてそれからほぼ 60 年間，時々思い出したように眺めております．（間違って読んだと言おうものなら，大学時代の先生から，「読んだと言うのは、本に穴が空く程勉強した人が言う言葉で，君の場合は眺めたというのが正しい」とたしなめられていましたので）

上記教科書によれば [1], 定係数の n 階線形同次微分方程式を演算子法で解く時, 特性多項式が重根を持つ場合には $e^{\lambda t}$ と言う形では n 個の異なる解を見つける事はできないのでそれ以外の $te^{\lambda t}$，$t^2e^{\lambda t}$ 等は仮定するものとし, その後, 数ページに渡ってその妥当性が証明されています．なるほど, 数学の解というものは全てが演繹出来るものではないのだと感じておりました．

2023 年の夏は極端に暑い夏でした．夏の間，自分で何かする気が起こらないので，ラジオ体操の後, ユーチューブで W. G. Strang 教授（MIT）の Lecture of Linear Algebra(2000 年度) の講義を見るのを日課にしておりました．第 23 回目の講義，Differential Equation and exp(At)，の最後に Fibonacci 数列の値を求める時に用いた差分方程式［2］の類推から，定係数の n 階線形同次微分方程式を n 次元のベクトルと n 行 n 列の行列を導入することによって 1 階微分方程式に還元出来ると言う話があり, 例として

7 階線型同次微分方程式

$$x^{(7)}+a_6x^{(6)}+a_5x^{(5)}+a_4x^{(4)}+a_3x^{(3)}+a_2x^{(2)}+a_1x^{(1)}+a_0x=0$$

について

縦ベクトル　$z = (x^{(6)} \quad x^{(5)} \quad x^{(4)} \quad x^{(3)} \quad x^{(2)} \quad x^{(1)} \quad x)^T$　と置くと

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} x^{(7)} \\ x^{(6)} \\ x^{(5)} \\ x^{(4)} \\ x^{(3)} \\ x^{(2)} \\ x^{(1)} \end{pmatrix} = Az = \begin{pmatrix} -a_6 & -a_5 & -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(6)} \\ x^{(5)} \\ x^{(4)} \\ x^{(3)} \\ x^{(2)} \\ x^{(1)} \\ x \end{pmatrix}$$

が成り立つ．　よって　$z = e^{At}z_0$ が解である，というところで講義は終わりました．

講義を見ながら，数学って色々な解き方があるものだと感じ入っておりました．暫くして，あれ，この方法だと重根を持つ場合，行列 A が Jordan 行列になるはずだから，演算子法のように解を仮定しなくても 必然的に$e^{\lambda t}$ 以外の他の解　$te^{\lambda t}$，　$t^2e^{\lambda t}$ などが出てくることに気づきました．

既によく知られている事かも分かりませんが，私にとっては初めて知った面白い方法なので紹介させて頂きます．

2　特性多項式が異なった根を持つ場合

n 階線型同次方程式

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \cdots + a_1x^{(1)} + a_0x = 0 \qquad (2.1)$$

について最初に形式的な解を求めます．

以後，縦ベクトル zは（2.2）式のように導入します．

$$z = (x \; x^{(1)} \; x^{(2)} \cdots x^{(n-2)} \; x^{(n-1)})^T \qquad (2.2)$$

理由は固有値が重根を持つ場合，この方が固有ベクトルの求め方が簡単になるためです．

方程式

$$\frac{dz}{dt} = Az \qquad (2.3)$$

具体的に書き下すと

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ \vdots \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \\ x^{(n)} \end{pmatrix} = Az = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ x^{(n-2)} \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} \qquad (2.3')$$

に対して$z = e^{At}z_0$ とおけば $e^{At}z_0$は確かに (2.3)式を満たします．

ここで z_0は初期値の縦ベクトルです．

行列Aが異なった固有値を持つとき，$A = S\Lambda S^{-1}$と対角化可能で

$$z(t) = e^{At}z_0 = e^{S\Lambda S^{-1}t}z_0 = Se^{\Lambda t}S^{-1}z_0 = Se^{\Lambda t}C = S\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}C \tag{2.4}$$

$$C = S^{-1}z_0 \tag{2.5}$$

と表されます [3]. Sは固有ベクトルからなる行列, Cは積分定数の縦ベクトルです.
ベクトルzの 1 行目 x が方程式 (2.1)式の解です.
では早速,具体的な問題について解いて行きます.

2. 1 異なった固有値を持つ具体的な問題

（例題 1） $x^{(3)} - 2x^{(2)} - x^{(1)} + 2x = 0$

について解いてみます.

$$z = (x \quad x^{(1)} \quad x^{(2)})^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \end{pmatrix} = Az = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix}$$

特性方程式 $\det(A - \lambda E) = 0$を解き固有値を求めると, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ になります.

$\lambda_1 = 1$に対応する固有ベクトルを $(A - \lambda E)S_i = 0$ より消去法で求めます.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \\ S_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{21} \\ S_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$に対して$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 同様な操作で $\lambda_2 = -1$ に対して$S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\lambda_3 = 2$に対して$S_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ が求まります.

一応, 計算チェックのために逆行列を求めて以下の計算で確認します.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ S^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1}AS = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \Lambda$$

よって OK.

固有ベクトルの行列Sが求まったから(2.5)式を用いて

$$z(t)=\begin{pmatrix}x\\x^{(1)}\\x^{(2)}\end{pmatrix}=e^{At}z_0=Se^{\Lambda t}C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&e^{-t}&0\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

例題 1 の解はベクトル $z(t)$ の 1 行目で

$x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3e^{2t}$ と求まります.

$z(t)$の各行はx の 0 階, 1 階, 2 階微分に対応していますから

初期条件 $z_0=z(t=0)=(a \quad b \quad c)^T$ が与えられた時, 初期条件と不定積分定数の関係は

(2.4)式において$t=0$を代入したもので

$$z_0(t=0)=\begin{pmatrix}x \quad (t=0)\\x^{(1)}(t=0)\\x^{(2)}(t=0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=SC$$

両辺に逆行列を掛ければ $C=S^{-1}z_0(t=0)$ と(2.5)式を満たしております.

初期条件が与えられた時, z(t)の具体的な表現は

$$\mathrm{z(t)}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&e^{-t}&0\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&3&-3\\2&-3&1\\-2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

です.

（例題２） 固有値が複素数の場合， $x^{(3)}-x^{(2)}+4x^{(1)}-4x=0$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\4&-4&1\end{pmatrix}$$

$$\frac{dz}{dt}=\begin{pmatrix}x^{(1)}\\x^{(2)}\\x^{(3)}\end{pmatrix}=Az=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\4&-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\x^{(1)}\\x^{(2)}\end{pmatrix}$$

特性方程式 $\det(A-\lambda E)=0$ より 固有値が $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2i,\ \lambda_3=-2i$ と求まります.

例題 1 と同様に計算して固有ベクトルは $\lambda_1=1$ に対して$S_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$， $\lambda_2=2i$ に対して

$S_2=\begin{pmatrix}1\\2i\\-4\end{pmatrix}$， $\lambda_3=-2i$ に対して$S_3=\begin{pmatrix}1\\-2i\\-4\end{pmatrix}$ となります.

これから

$$S=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2i&-2i\\1&-4&-4\end{pmatrix}\ ,\ S^{-1}=\frac{-1}{20i}\begin{pmatrix}-16\mathrm{i}&0&-4i\\2(2-i)&-5&2i+1\\-2(2+i)&5&2i-1\end{pmatrix}$$

$$z(t)=\begin{pmatrix}x\\x^{(1)}\\x^{(2)}\end{pmatrix}=e^{At}z_0=Se^{\Lambda t}C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2i&-2i\\1&-4&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&e^{2it}&0\\0&0&e^{-2it}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

よって $x(t)=c_1e^t+c_2e^{2it}+c_3e^{-2it}$

初期条件が与えられた時の z(t)の具体的な表現は

$$\mathrm{z(t)}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2i&-2i\\1&-4&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{t}&0&0\\0&e^{2it}&0\\0&0&e^{-2it}\end{pmatrix}\frac{-1}{20i}\begin{pmatrix}-16\mathrm{i}&0&-4i\\2(2-i)&-5&2i+1\\-2(2+i)&5&2i-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

です.

2. 2 異なる固有値を持つ場合の固有ベクトルからなる行列 Sの一般形

異なる固有値を持つ場合，固有値が分かれば対応する固有ベクトルからなる行列 Sは簡単に求まります. 理由は以下に述べる様に行列 Aの単純さによります.
一つの固有値をλ_kとすれば対応する固有ベクトルS_kは

$$\begin{pmatrix}-\lambda_k&1&0&\dots&0\\0&-\lambda_k&1&\dots&0\\0&0&-\lambda_k&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\dots&-a_{n-1}-\lambda_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S_{1k}\\S_{2k}\\S_{3k}\\\vdots\\\vdots\\S_{n-1\,k}\\S_{nk}\end{pmatrix}=0 \qquad (2.6)$$

から求まります.

上記行列 Aの 1 列, n 行を取り除いた小行列式の値は 1，もちろん　$\det(A-\lambda_0E)=0$　で

特性行列（2.6)式の階数は(n-1)です. 独立な列として一目で判る様に 1 列から n-1 列をとることが出来ます.
例えば以下の計算を行うと，
縦ベクトル（1 列＋2 列×λ_k＋3 列×λ_k^2+4 列×λ_k^3・・・・・・＋n 列×λ_k^{n-1}）の 1 行から
(n-1)行は明らかに 0 です. n 行目は(2.1)式に一つの固有値e^{λ_k}を代入した e^{λ_k}の係数でこれも 0 です. よって (2.6)式の n 列目は前の列に従属が確認できました.
(2.6)式の連立同次方程式を消去法により解き，固有ベクトルを求めると n 行目は 0 になり，
固有ベクトルは上位(n-1)行で決まります. 即ち，

$$\lambda_k S_{ik}=S_{(i+1)k} \quad i=1\sim(n-1)$$

自由変数$S_{nk}=\lambda_k^{n-1}$ とおけば

$$\begin{pmatrix}S_{1k}\\S_{2k}\\S_{3k}\\\vdots\\\vdots\\S_{n-1\,k}\\S_{nk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\lambda_k\\\lambda_k^2\\\vdots\\\vdots\\\lambda_k^{n-2}\\\lambda_k^{n-1}\end{pmatrix}$$

従って n 個の固有値がわかれば(2.4)式は

$$z(t) = Se^{\Lambda t}C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \qquad (2.4')$$

となります．行列 Sの 2 行目以下は$e^{\lambda_k t}$ を 2 階，3 階，・・・，n-1 階微分したものであり，その点からも行列 Sの形の正しいことがわかります．

例題 1, 2 の行列 Sは確かにこの関係を満たしています．

3 縮重した 1 個の根を持つ場合（本題）

以下では固有値が縮重した 1 個の実数根を持つ場合だけ考えます．

演算子法で特性多項式が重根を持つ場合は，今，述べている解き方を用いれば，行列 Aの固有値が縮重する場合に対応します．

解 $z = e^{At}z_0$の行列 Aは Jordan 行列 J で表現でき, 形式的な解は(2.4)式にならって

$$z(t) = e^{At}z_0 = e^{MJM^{-1}}z_0 = Me^{Jt}M^{-1}z_0 = Me^{Jt}C \qquad (3.1)$$

ここで 行列M は行列 A を Jordan 形式に導く正方行列． J は

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 E + N \qquad (3.2)$$

(3.2)式で E は単位行列． 行列 N はべき零行列です．

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n 次正方行列 Aに対して

$$e^{At} = E + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots \qquad (3.3)$$

単位行列Eはいかなる行列とも可換だから、$e^{Jt} = e^{\lambda_0 tE + tN} = e^{\lambda_0 tE}e^{tN}$ が成り立ち[4],

(3.3)式 より

$$e^{\lambda_0 tE} = E + \lambda_0 tE + \frac{(\lambda_0 tE)^2}{2!} + \frac{(\lambda_0 tE)^3}{3!} + \cdots = e^{\lambda_0 t}E$$

べき零行列 N が n 次正方行列の場合 N^nは零行列となり，e^{Nt} のべき級数展開は n 個の項で終わります．

$$e^{Nt} = E + tN + \frac{(tN)^2}{2!} + \frac{(tN)^3}{3!} + \cdots + \frac{(tN)^{n-1}}{(n-1)!}$$

よって

$$e^{Jt} = e^{\lambda_0 tE+tN} = e^{\lambda_0 tE}e^{tN} = e^{\lambda_0 t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.4)$$

(3.4)式を用いて(3.1)式を書き下すと

$$z(t) = e^{At}z_0 = Me^{Jt}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{z}_0 = e^{\lambda_0 t}M\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}C \qquad (3.1')$$

となります.

ここでも具体的な問題を解いて(3.1')式を理解した方が早いと思います.

3.1　縮重した 1 個の根を持つ場合の 例題

以下の例題では節 3.2 の一般化に備えて重根の値は数値ではなくλ_0とします.

（例題 3）2 階微分方程式

$$x^{(2)} - 2\lambda_0 x^{(1)} + \lambda_0^2 x = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} = Az = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_0^2 & 2\lambda_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x^{(1)} \end{pmatrix}$$

特性方程式 $\det(A-\lambda E) = 0$　を解き固有値を求めると，確かに固有値 λ_0 は重根で，λ_0に対応する固有ベクトルは既に節 2．2 で述べたように$(M_{11} \quad M_{21})^T$＝$(1 \quad \lambda_0)^T$となります.

特性行列 $A-\lambda E$　の階数は 1 で零空間の階数も 1 で固有ベクトルは 1 個しかなく,もう 1 個のベクトル$(M_{12} \quad M_{22})^{\mathrm{T}}$ は $M^{-1}AM = J$ を変形して　$AM = MJ$ より求めます.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_0^2 & 2\lambda_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & M_{12} \\ \lambda_0 & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & M_{12} \\ \lambda_0 & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

簡単な計算より　$(M_{12} \quad M_{22})^{\mathrm{T}}$＝$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$　ともう一つのベクトルが見つかります.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_0 & 1 \end{pmatrix},\ M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda_0 & 1 \end{pmatrix}$$

よってベクトルzは

$$z=\begin{pmatrix}x\\x^{(1)}\end{pmatrix}=Me^{Jt}C=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda_0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\lambda_0 t}&0\\0&e^{\lambda_0 t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$$

$$=e^{\lambda_0 t}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda_0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1e^{\lambda_0 t}+C_2te^{\lambda_0 t}\\C_1\lambda_0e^{\lambda_0 t}+C_2(e^{\lambda_0 t}+\lambda_0te^{\lambda_0 t})\end{pmatrix}$$

求める解は　$x=C_1e^{\lambda_0 t}+C_2te^{\lambda_0 t}$ となり自動的に $te^{\lambda_0 t}$ が導かれます.

（例題４）３階微分方程式

$$x^{(3)}-3\lambda_0x^{(2)}+3\lambda_0^2x^{(1)}-\lambda_0^3x=0$$

$$\frac{dz}{dt}=\begin{pmatrix}x^{(1)}\\x^{(2)}\\x^{(3)}\end{pmatrix}=Az=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\\lambda_0^3&-3\lambda_0^2&3\lambda_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\x^{(1)}\\x^{(2)}\end{pmatrix}$$

特性方程式 $\det(A-\lambda E)=0$　を解き固有値を求めると, 固有値はλ_0で重根です.

λ_0に対応する固有ベクトルは例題３と同様に $(M_{11}\quad M_{21}\quad M_{31})^T=(1\quad\lambda_0\quad\lambda_0^2)^T$ となります.

特性行列 $(A-\lambda_0E)$ の階数は２ですから零空間の階数は１で固有ベクトルは１個しかなく,

行列M の残り２個のベクトル　$(M_{1k}\quad M_{2k}\quad M_{3k})^T$，$k=2,3$ は例題３と同様に $AM=MJ$ より求めます.

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\\lambda_0^3&-3\lambda_0^2&3\lambda_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&M_{12}&M_{13}\\\lambda_0&M_{22}&M_{23}\\\lambda_0^2&M_{32}&M_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&M_{12}&M_{13}\\\lambda_0&M_{22}&M_{23}\\\lambda_0^2&M_{32}&M_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_0&1&0\\0&\lambda_0&1\\0&0&\lambda_0\end{pmatrix}$$

計算を実行すると最もシンプルな行列として

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0\\\lambda_0&1&0\\\lambda_0^2&2\lambda_0&1\end{pmatrix}\text{ で，逆行列 }M^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\lambda_0&1&0\\\lambda_0^2&-2\lambda_0&1\end{pmatrix}$$

が求まります. 従って

$$z=\begin{pmatrix}x\\x^{(1)}\\x^{(2)}\end{pmatrix}=e^{\lambda_0 t}\begin{pmatrix}1&0&0\\\lambda_0&1&0\\\lambda_0^2&2\lambda_0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t&\frac{t^2}{2!}\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}$$

$$x=C_1e^{\lambda_0 t}+C_2te^{\lambda_0 t}+C_3\frac{t^2}{2!}e^{\lambda_0 t}=C_1'e^{\lambda_0 t}+C_2'te^{\lambda_0 t}+C_3't^2e^{\lambda_0 t}$$

ここでも $te^{\lambda_0 t}$, $t^2e^{\lambda_0 t}$　の解が自動的に導入されます.

（例題５）４階微分方程式

$$x^{(4)}-\binom{4}{1}\lambda_0 x^{(3)}+\binom{4}{2}\lambda_0^2 x^{(2)}-\binom{4}{3}\lambda_0^3 x^{(1)}+\lambda_0^4 x=0$$

$$\frac{dz}{dt}=\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ x^{(4)} \end{pmatrix}=Az=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda_0^4 & \binom{4}{3}\lambda_0^3 & -\binom{4}{2}\lambda_0^2 & \binom{4}{1}\lambda_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \end{pmatrix}$$

問題の設定からわかるように λ_0 がただ一個の固有値で 4 重根．対応する固有ベクトルは

$(M_{11} \quad M_{21} \quad M_{31} \quad M_{41})^T=(1 \quad \lambda_0 \quad \lambda_0^2 \quad \lambda_0^3)^T$

この問題でも特性行列 （$A-\lambda E$）の階数は 3，零空間の階数は 1．固有ベクトルは 1 個しか存在しないので，残りのベクトルは例の如く $AM=MJ$ より求めます．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda_0^4 & \binom{4}{3}\lambda_0^3 & -\binom{4}{2}\lambda_0^2 & \binom{4}{1}\lambda_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ \lambda_0 & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ \lambda_0^2 & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ \lambda_0^3 & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ \lambda_0 & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ \lambda_0^2 & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ \lambda_0^3 & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

計算は省略しますが，行列 Aの単純な形を反映して，行列Mは以下のように求まります．

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 1 & 0 \\ \lambda_0^3 & 3\lambda_0^2 & 3\lambda_0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_0^2 & -2\lambda_0 & 1 & 0 \\ -\lambda_0^3 & 3\lambda_0^2 & -3\lambda_0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$z=\begin{pmatrix} x \\ x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \end{pmatrix}=e^{\lambda_0 t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 1 & 0 \\ \lambda_0^3 & 3\lambda_0^2 & 3\lambda_0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

求める解xは

$$x=C_1 e^{\lambda_0 t}+C_2 t e^{\lambda_0 t}+C_3\frac{t^2}{2!}e^{\lambda_0 t}+C_4\frac{t^3}{3!}e^{\lambda_0 t}=C_1' e^{\lambda_0 t}+C_2' t e^{\lambda_0 t}+C_3' t^2 e^{\lambda_0 t}+C_4' t^3 e^{\lambda_0 t}$$

ここでも $te^{\lambda_0 t}$，$t^2 e^{\lambda_0 t}$ などの解が自動的に導入されました．

3.2 n 重に縮重した 1 個の実数根を持つ場合の変換行列Mの一般形

通常 行列 Aを Jordan 形式に導く行列Mの計算は簡単ではないですが，上記例題で分かるように行列 Aの単純さから容易に一般化できます．

１個の n 重根λ_0を持つ場合の n 階微分方程式は

$$x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+a_{n-2}x^{(n-2)}+\cdots+a_1x^{(1)}+a_0x=\sum_0^n\binom{n}{i}(-\lambda_0)^i x^{(n-i)}$$

$$=x^{(n)}+-n\lambda_0x^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_0^2x^{(n-2)}+\cdots+n(-\lambda_0)^{n-1}x^{(1)}+(-\lambda_0)^nx=0$$

となり, 対応する行列 Aは

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(-\lambda_0)^n & -n(-\lambda_0)^{n-1} & -\frac{n(n-1)}{2}(-\lambda_0)^{n-2} & \dots & n\lambda_0 \end{pmatrix}$$

固有値に対応する固有ベクトルは既に節 2.2 で説明したように

$$\begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{21} \\ M_{31} \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{(n-1)1} \\ M_{n1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_0 \\ \lambda_o^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_o^{n-2} \\ \lambda_o^{n-1} \end{pmatrix}$$

となります.

残りの(n-1)個の縦ベクトルは実は例題 2, 3, 4 のように$AM=MJ$　の関係式を用いずとも簡単に求まり, 行列Mは対角線上に 1 が並んだ以下のような下三角行列です.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_0^3 & 3\lambda_0^2 & 3\lambda_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_0^4 & 4\lambda_0^3 & 6\lambda_0^2 & 4\lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_0^5 & 5\lambda_0^4 & 10\lambda_0^3 & 10\lambda_0^2 & 5\lambda_0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_0^{n-1} & (n-1)\lambda_0^{n-2} & \binom{n-1}{2!}\lambda_0^{n-3} & \binom{n-1}{3!}\lambda_0^{n-4} & \binom{n-1}{4!}\lambda_0^{n-5} & \binom{n-1}{5!}\lambda_0^{n-6} & \cdots & (n-1)\lambda_0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

理由は簡単です.　(3.1’)式を別の形でもう一度書き出します.

$$z(t)=e^{\lambda t}\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & M_{n3} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \qquad (3.1'')$$

縦ベクトル$z(t)$の 2 行目以下は$x(t)$ の 1 階, 2 階, ・・・, (n-1)階微分を表しており, 例えば, (3.1’’)式の前 2 個の行列の積の 3 行k列目は　$C_k\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_0 t}$の$\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_0 t}$を 2 階微分したもので項の数は最大 3 項で　$e^{\lambda_0 t}(\lambda_0^2\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}+2\lambda_0\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}+1)$ となります.

よって行列Mの３行目は$(\lambda_0^2 \quad 2\lambda_0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)$ となります．もちろん，$k=0,\ k=1$の場合も成り立っています．同様に行列の積のｎ行ｎ列目は $C_n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda_0 t}$ の$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda_0 t}$を(n-1)階微分したもので，いま $f(t)=e^{t\lambda_0}$, $g(t)=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ と置けば，良く知られた Leibniz の法則

$$\frac{d^{n-1}(fg)}{dt^{n-1}}=\sum_0^{n-1}\binom{n-1}{i}f^{n-1-i}g^i$$

より行列Mのｎ行目は

$$\left(\lambda_0^{n-1} \quad (n-1)\lambda_0^{n-2} \quad \binom{n-1}{2!}\lambda_0^{n-3} \quad \cdots \quad \binom{n-1}{2!}\lambda_0^2 \quad (n-1)\lambda_0 \quad 1\right)$$

となります．

以上が(3.4)式の証明です．例題 3, 4, 5 の各行列Mは(3.4)式を満足しています．

４おわりに

１)差分方程式の類推から導かれた今回の解法では初期の目論見通り$e^{\lambda t}$以外の解　$te^{\lambda t}$, $t^2e^{\lambda t}$ などが自動的に導入されました．　行列 Sの一般形 (2.4')式，行列Mの一般形 (3.4)式を求めて置いた理由は縮重した固有値，縮重の無い固有値が共存する一般の場合をこの方法で解く時，行列 S , Mの一般形が分かっていれば，解の一般化が簡単になるためですが，長くなるのでここで終わりにします．

２)今まで代数方程式の数値解をどの様なプログラムで求めるのか興味を持ったことがありませんでした．今回，問題を解きながら，あれ，もし複素数まで含んだ固有値を求めるプログラムがあれば(2.3')式に現れる行列 Aの固有値を求めればｎ次の代数方程式

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

の解が求まることに気がつきました．これも常識でしょうか?

３)演算子法と今回の解法はどちらが単純か? という質問には，どちらにしてもｎ次の代数方程式を解くことにつきますから，困難は同じだと思います．今回の解法の利点は別のところ（教育的側面）にあるのではないかと思います．私のような実学の世界で生きて来た者には固有値問題といえば，対称行列に限られて来ました．そのため，Jordan 形式の説明を読んでも 実が入らないのも一因ですが，だからなん何だ，という感が 60 年間拭えませんでした．今回のように固有値と固有ベクトルを使って常微分方程式を解く場合，微分方程式を解くという目的がはっきりしています．具体的な問題を解きながら Jordan 形式に慣れる事が出来るという意味で Jordan 形式の練習問題として最適ではないかと思います．問題も簡単に作れます．

参考文献

[1] ポントリャーギン　(木村俊房訳),『常微分方程式』, (共立出版, 1963) 49-54

[2] G.ストラング（井上昭訳）,『線形代数とその応用』, (産業図書, 1978) 214-218

[3] G.ストラング（井上昭訳）,『線形代数とその応用』, (産業図書, 1978) 226-227

[4](3.3)式のように定義された行列の指数関数は行列 A, B が交換可能ならば $e^{(A+B)} = e^{A}e^{B}$ の指数法則が成立する. この証明は例えば
ア・イ・マリツェフ（柴岡泰光訳）,『演習　線形代数学』, (東京図書, 1960) 115-116

編集後記

2024 年 3 月半ばとなった．この 14 巻 1 号で 14 巻を始める．

今号は常連の投稿者である，世戸さんの論文と昔の同僚である根本さんの論文に加えて，相も変わらずの私の四元数のエッセイを掲載する．

上司だった荒木次郎先生の講義の一端を担うために原子力工学の一部を教えることとなったときに，原子炉の原理がよくわからなかったので，あちこち文献を見た中に武谷三男・豊田利幸の岩波講座「現代物理学」の『原子炉』があった．この中に用語としてバックリングがあったと思う．そこで見たぐらいでそれも中身を知ることなく来た．今後，世戸さんのこのテーマの論文がしばらく続くらしい．

いつも新しい問題を見つけてきて，それを解くというのだからちょっと他でも類を見ない方ではある．世戸さんという方は.

多くの方に初めてお見えした根本さんはもとは化学者なのだが，愛媛大学や一般の化学関係の会社を経て，大阪工大で物理を教えていた経歴の持ち主である．その方が書いた常微分方程式の解法についての論文如何ですか．ご賞味下さい．根本さんは昨年の 5 月に MIT を退職した数学者ストラングの有名な講義「線形代数」のファンでもある．

私のエッセイは以前に書いた四元数（補遺 3）の改訂版であるが，改訂にずいぶん時間がかかった．それでもまだ不十分かもしれない．

（矢野　忠）