数学・物理通信

15巻1号　　2025年3月19日

編集　新関章三・世戸憲治・矢野　忠

目次(Contents)

1. 心柱モデル (5)
世戸憲治 2
2. 「Levi-Civita 記号の縮約」再論 2
矢野　忠 13
3. 「Levi-Civita 記号の縮約」再論 3
矢野　忠 24
4. 編集後記
矢野　忠 33

1. Model of Central Pillar (5)
Kenji SETO 2
2. The Contraction of Levi-Civita Symbols Revisited 2
Tadashi YANO 13
3. The Contraction of Levi-Civita Symbols Revisited 3
Tadashi YANO 24
4. Editorial Comments
Tadashi YANO 33

心柱モデル (5)

世戸 憲治 *

Model of Central Pillar (5)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「心柱モデル (4)」(『数学・物理通信』14 巻 7 号) では，東京スカイツリーに付いている心柱を力学的にモデル化し，塔と心柱の間にダンパー (damper 減衰器) を入れたときの解析を試みた．しかしこの前回のものは，方程式を解きやすくするために，塔と心柱を，構造的にまったく同じモデルにしてしまったために，せっかく付けたダンパーの効果が発揮されないものになってしまった．そこで今回は，この塔と心柱という 2 つの振動系に構造的違いを持たせ，ダンパー効果が発揮されるような解析を試みる．

2 モデルの設定とその力学的解析

2.1 方程式の導入

モデルの設定と，その方程式の導入に関し，この 2.1 節で書くことは前回導入したものと同じであるが，記述の独立性のため，くり返し記載しておく．

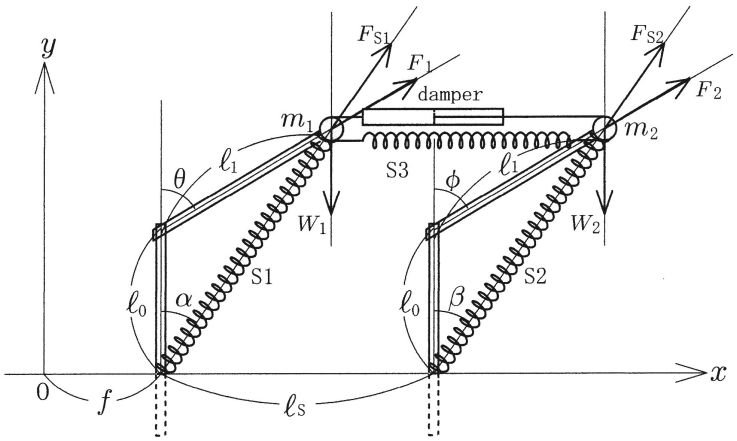

図 1 今回，考慮した心柱モデル (これは前回の**図 2** と同じもの)

ここでは図 1 に示すようなモデルを考える．すなわち，一定の長さを持つ棒を地面に垂直に立て，その地上に

* 北海学園大学名誉教授

出ている部分の長さを ℓ_0 とする．さらにこの先に長さ ℓ_1 の棒を自由に回転できるように取り付け，この先には，質量 m_1 の錘を付けておく．このままでは，この 2 番目に付けた棒は倒れてしまうので，自然長が $\ell_0+\ell_1$ よりも長いばね S1 を用意し，最初に地面に埋めた棒の根本と錘 m_1 の間に取り付けておく．さらにここでは，これまで述べた構造と同種のものをもう一つ用意し，水平距離で，ℓ_S だけ離れたところに設置しておく．ただし，この後で設置した 2 本の棒の長さは，最初に設置した棒の長さと同じく ℓ_0, ℓ_1 とするが，錘とばねについては，それぞれ， m_2 , S2 としておく．さらに，この 2 個の錘 m_1, m_2 の間には，ばね定数 k, 自然長が地中に埋めた 2 本の棒の距離と同じ ℓ_S のばね S3 と，ダンパー係数 c のダンパーを取り付ける．以下では，この初めに述べた方の振動系を m_1 系，後で述べた方の振動系を m_2 系と呼ぶことにする．

運動方程式を立てるにあたって，水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸をとり，原点は地面が動いていないときの初めに立てた棒の根元にとることにする．この座標設定で，錘 m_1, m_2 の座標を，それぞれ，$(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ とする．地震が起きたときは地面全体が水平方向に動くので，時刻 t における地震による動きを，右向きを正として，$f(t)$ とする．また，地震が起きたときの時刻 t における錘 m_1, m_2 を付けている長さ ℓ_1 の 2 本の棒の傾き角を，それぞれ，θ, ϕ とすると，

$$\begin{aligned} x_1 &= f(t)+\ell_1\sin\theta, & y_1 &= \ell_0+\ell_1\cos\theta, \\ x_2 &= f(t)+\ell_1\sin\phi+\ell_S, & y_2 &= \ell_0+\ell_1\cos\phi \end{aligned} \tag{2.1}$$

と表わされる．また，m_1 系，m_2 系それぞれの上に付けた 2 本の棒が，錘 m_1, m_2 に作用する力の大きさを，それぞれ，F_1, F_2 とする．また，ばね S1, S2 が，錘 m_1, m_2 に作用する力の大きさを，それぞれ，F_{S1}, F_{S2} とし，これら力が鉛直線となす角を，それぞれ，α, β とする．以上の準備の基に，錘 m_1, m_2 の運動方程式を書き下すと

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 =& F_1\sin\theta+F_{S1}\sin\alpha+k(x_2-x_1-\ell_S)+c(\dot{x}_2-\dot{x}_1), & m_1\ddot{y}_1 &= F_1\cos\theta+F_{S1}\cos\alpha-W_1, \\ m_2\ddot{x}_2 =& F_2\sin\phi+F_{S2}\sin\beta-k(x_2-x_1-\ell_S)-c(\dot{x}_2-\dot{x}_1), & m_2\ddot{y}_2 &= F_2\cos\phi+F_{S2}\cos\beta-W_2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

となる．ここでは以下でも説明するように，錘 m_1, m_2 の微小振動しか考えないので，これら錘の間に付けたばね S3 とダンパーによる力は水平方向にしか作用しないものとし，y 方向の運動方程式には入れていない．また，y 方向の方程式に含まれる W_1, W_2 は，それぞれ，錘 m_1, m_2 に作用する重力で，重力加速度 g を用いて，$W_i=m_ig$, $(i=1,\ 2)$ と書かれる．

さらに，ばね S1, S2 の傾き角 α, β は，θ, ϕ によって決まる量であることを注意しておく．何故なら，m_1 系の棒 ℓ_0, ℓ_1 とばね S1 が作る三角形，および，m_2 系の棒 ℓ_0, ℓ_1 とばね S2 が作る三角形のそれぞれに，三角関数の正弦定理を適用すると，

$$\frac{\sin\alpha}{\ell_1}=\frac{\sin\theta}{S_1}, \qquad \frac{\sin\beta}{\ell_1}=\frac{\sin\phi}{S_2} \tag{2.3}$$

が成立するからである．ここに，S_1, S_2 は，それぞれ，ばね S1, S2 の装着時の長さである．

以上で，求めるべき方程式はすべて求めたが，このまま解析的に解くには，あまりに煩雑すぎて扱えない．ここでは，錘 m_1, m_2 の微小振動だけを扱うことにして，上に付けた棒の傾き角 θ, ϕ は微小量として，三角関数の線形近似式

$$\sin\theta\simeq\theta, \quad \cos\theta\simeq 1, \quad \sin\phi\simeq\phi, \quad \cos\phi\simeq 1 \tag{2.4}$$

を採用する．また，ばねの傾き角 α, β もこれに準じるものとし，このときは，2 本のばねの装着時の長さ S_1, S_2

は $S_1 \simeq S_2 \simeq \ell_0 + \ell_1$ と近似されることを考慮して，(2.3) 式を

$$\alpha = \lambda\,\theta, \quad \beta = \lambda\,\phi, \qquad \lambda = \frac{\ell_1}{\ell_0 + \ell_1} < 1 \tag{2.5}$$

と書き換えるものとする．

以上の近似式を用いて，(2.1) (2.2) 式を書き直すと，

$$\begin{aligned} x_1 &= f(t) + \ell_1\theta, & y_1 &= \ell_0 + \ell_1, \\ x_2 &= f(t) + \ell_1\phi + \ell_S, & y_2 &= \ell_0 + \ell_1 \end{aligned} \tag{2.6}$$

および，

$$\begin{aligned} m_1\big(\ddot{f} + \ell_1\ddot{\theta}\big) =& F_1\theta + \lambda F_{S1}\theta + k\,\ell_1(\phi - \theta) + c\,\ell_1(\dot{\phi} - \dot{\theta}), \quad 0 = F_1 + F_{S1} - W_1, \\ m_2\big(\ddot{f} + \ell_1\ddot{\phi}\big) =& F_2\phi + \lambda F_{S2}\phi - k\,\ell_1(\phi - \theta) - c\,\ell_1(\dot{\phi} - \dot{\theta}), \quad 0 = F_2 + F_{S2} - W_2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

となる．ここで，$0 =$ で始まる 2 つの式から未知数 F_1，F_2 を求め，残る 2 式に代入し，整理すると，

$$\begin{aligned} m_1\ell_1\ddot{\theta} + \Big[(1-\lambda)F_{S1} + k\,\ell_1 - W_1\Big]\theta + c\,\ell_1\dot{\theta} - k\,\ell_1\phi - c\,\ell_1\dot{\phi} = -m_1\ddot{f}, \\ m_2\ell_1\ddot{\phi} + \Big[(1-\lambda)F_{S2} + k\,\ell_1 - W_2\Big]\phi + c\,\ell_1\dot{\phi} - k\,\ell_1\theta - c\,\ell_1\dot{\theta} = -m_2\ddot{f} \end{aligned} \tag{2.8}$$

となる．これら 2 式の右辺にある $-m_1\ddot{f}$，$-m_2\ddot{f}$ は地震動による慣性力である．また，ここで，F_{S1}，F_{S2} がまだ残っているが，ここでは，錘 m_1，m_2 の微小振動を仮定しているので，ばね S1, S2 の装着時の長さは振動中も一定としてよく，F_{S1}，F_{S2} も一定値となる．したがって，これは振動系を最初に決める段階で決まってしまう量と考えてよい．

以下では，この方程式 (2.8) を，より簡素化するために係数を

$$\begin{aligned} {\omega_1}^2 &= \frac{(1-\lambda)F_{S1} + k\,\ell_1 - W_1}{m_1\ell_1}, & {\omega_2}^2 &= \frac{(1-\lambda)F_{S2} + k\,\ell_1 - W_2}{m_2\ell_1}, \\ {\tau_1}^2 &= \frac{k}{m_1}, \quad {\tau_2}^2 = \frac{k}{m_2}, \quad \gamma_1 = \frac{c}{m_1}, \quad \gamma_2 = \frac{c}{m_2} \end{aligned} \tag{2.9}$$

と置き換える．ここで，2 つのことを注意しておく．この新しく導入した 6 個の係数 ω_1，ω_2，τ_1，τ_2，γ_1，γ_2 はいずれも時間の逆数の次元を持つこと．もう一つは，これらの量は，すべて独立という訳ではなく，${\tau_1}^2$，${\tau_2}^2$，γ_1，γ_2 の間には，

$$\frac{{\tau_1}^2}{{\tau_2}^2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \tag{2.10}$$

の関係があることを注意しておく．

実際の地震動は，種々の振動数が混じったものであるが，ここでは，一つの試行実験をするだけなので，以下では，地震振動を振動数 ω_e の単振動と仮定して，

$$f(t) = f_0 \sin(\omega_e t) \tag{2.11}$$

と置くことにする．

以上をまとめて，方程式 (2.8) を，行列形式で書き直すと，

$$\begin{pmatrix} d^2/dt^2 + {\omega_1}^2 + \gamma_1 d/dt & -{\tau_1}^2 - \gamma_1 d/dt \\ -{\tau_2}^2 - \gamma_2 d/dt & d^2/dt^2 + {\omega_2}^2 + \gamma_2 d/dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \frac{f_0\,{\omega_e}^2}{\ell_1} \sin(\omega_e t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

となる．

2.2 方程式の解法

2 個の未知変数 θ, ϕ に関する連立微分方程式 (2.12) の一般解を求めるには，斉次部分の一般解と非斉次部分の特解を求めて，それらの和をとるとよい．ここでは，先に斉次部分

$$\begin{pmatrix} d^2/dt^2 + {\omega_1}^2 + \gamma_1 d/dt & -{\tau_1}^2 - \gamma_1 d/dt \\ -{\tau_2}^2 - \gamma_2 d/dt & d^2/dt^2 + {\omega_2}^2 + \gamma_2 d/dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

について考察してみよう．ここで，θ, ϕ を

$$\theta = \frac{f_0}{\ell_1} A_1\, e^{\Omega\, t}, \qquad \phi = \frac{f_0}{\ell_1} A_2\, e^{\Omega\, t} \tag{2.14}$$

と置くが，無次元数 f_0/ℓ_1 付けて定義したのは，後の式を簡素化するためである．これを方程式に代入すると，A_1, A_2 に関する代数方程式

$$\begin{pmatrix} \Omega^2 + {\omega_1}^2 + \gamma_1 \Omega & -{\tau_1}^2 - \gamma_1 \Omega \\ -{\tau_2}^2 - \gamma_2 \Omega & \Omega^2 + {\omega_2}^2 + \gamma_2 \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

を得る．ここで係数 A_1, A_2 が両方ともゼロにならないためには，係数行列の行列式の値がゼロでなければならない．そこで，Ω の関数 $D(\Omega)$ を

$$\begin{aligned} D(\Omega) &= \begin{vmatrix} \Omega^2 + {\omega_1}^2 + \gamma_1 \Omega & -{\tau_1}^2 - \gamma_1 \Omega \\ -{\tau_2}^2 - \gamma_2 \Omega & \Omega^2 + {\omega_2}^2 + \gamma_2 \Omega \end{vmatrix} \\ &= \Omega^4 + \big(\gamma_1 + \gamma_2\big)\Omega^3 + \big({\omega_1}^2 + {\omega_2}^2\big)\Omega^2 + \Big[\big({\omega_1}^2 - {\tau_1}^2\big)\gamma_2 + \big({\omega_2}^2 - {\tau_2}^2\big)\gamma_1\Big]\Omega + {\omega_1}^2{\omega_2}^2 - {\tau_1}^2{\tau_2}^2 \end{aligned} \tag{2.16}$$

と定義したとき，

$$D(\Omega) = 0 \tag{2.17}$$

となるような Ω を求めなければならない．これは 4 次の代数方程式であり，解析的に解くことは，L. Ferrari の方法を用いて可能ではある．しかし，たいへん面倒なことになってしまいそこから定性的なことを理解することはほとんど不可能である．そこで，数式処理ソフト Maxima を用いて解かせたところ，スタートしてから 10 分ほど待たされてから出た答えは，画面上で 100 行ほどもあり，そこから何かを解釈できるようなものではなかった．そこで，6 個の係数 ω_1, ω_2, τ_1, τ_2, γ_1, γ_2 に具体的値を入れてから解かせると，簡潔な解がでるはずで，1 例として，

$$\omega_1 = 100, \quad \omega_2 = 1, \quad \tau_1 = 1, \quad \tau_2 = 2, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 4 \tag{2.18}$$

という値を入れて解かせてみた．得られた 4 個の答えを，有効数字 5 桁の精度で書くと，

$$\Omega = -0.49914 \pm 99.963\, i, \qquad \Omega = -2.0009 \pm 0.21195\, i \tag{2.19}$$

という結果であった．ここで，i は虚数単位である．これから想像するに，この 4 次方程式 (2.17) の解は，一般に

$$\Omega_{H(\pm)} = -\gamma_H \pm i\,\omega_H, \quad \text{および，} \quad \Omega_{L(\pm)} = -\gamma_L \pm i\,\omega_L, \qquad \gamma_H,\ \gamma_L > 0 \tag{2.20}$$

の形をしていると考えられる．ここで，添え字の H， L は，虚数部分 ω_H，ω_L，すなわち後で，固有振動数になる部分の振動数が高い方に H，低い方に L を付けることにし，実数部もそれに準じて γ_H，γ_L と添え字を付けることにした．

4 次方程式 (2.17) がこのような解を持つということは，$D(\Omega)$ が

$$D(\Omega) = \Big[\big(\Omega+\gamma_H\big)^2 + \omega_H^2\Big]\Big[\big(\Omega+\gamma_L\big)^2 + \omega_L^2\Big] \tag{2.21}$$

と因数分解されることを意味する．そこで，$D(\Omega)$ の定義式 (2.16) とこの式とで，Ω の各巾の係数を比較してみると，

$$\begin{aligned}
&\gamma_1+\gamma_2 = 2(\gamma_H+\gamma_L),\\
&{\omega_1}^2+{\omega_2}^2 = \gamma_H^2+\gamma_L^2+4\gamma_H\gamma_L+\omega_H^2+\omega_L^2\\
&\big({\omega_1}^2-{\tau_1}^2\big)\gamma_2+\big({\omega_2}^2-{\tau_2}^2\big)\gamma_1 = 2\Big[\gamma_H\big(\gamma_L^2+\omega_L^2\big)+\gamma_L\big(\gamma_H^2+\omega_H^2\big)\big)\Big],\\
&{\omega_1}^2{\omega_2}^2-{\tau_1}^2{\tau_2}^2 = \big(\gamma_H^2+\omega_H^2\big)\big(\gamma_L^2+\omega_L^2\big)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

という 4 本の式を得る．ここで注意すべきは，ダンパーを付けたことによる減衰効果を示すためには，γ_H，γ_L は正の量でなければならない．この理由から，この 4 本の式の右辺はすべて正になるので，左辺の値もすべて正にならなければならない．第 1 式，第 2 式の左辺は正になるが，この第 3 式，第 4 式の左辺も正になることが，(2.20) 式の形の解を持つための必要条件となる．なお，この (2.20) 式の解を持つための十分条件も求めたいところであるが，あまりに面倒になるので，これ以上，このことに関しては考察しないことにする．

以上で，斉次部分の方程式 (2.13) の一般解を，形式的ではあるが，(2.20) 式の $\Omega_{H(\pm)}$，$\Omega_{L(\pm)}$，および，添え字付き定数 $A_{(\pm)i}$，$B_{(\pm)i}$，$(i=1,2)$ を用いて，

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{f_0}{\ell_1}\Big[A_{(+)1}e^{\Omega_{H(+)}t}+A_{(-)1}e^{\Omega_{H(-)}t}+B_{(+)1}e^{\Omega_{L(+)}t}+B_{(-)1}e^{\Omega_{L(-)}t}\Big]\\
\phi &= \frac{f_0}{\ell_1}\Big[A_{(+)2}e^{\Omega_{H(+)}t}+A_{(-)2}e^{\Omega_{H(-)}t}+B_{(+)2}e^{\Omega_{L(+)}t}+B_{(-)2}e^{\Omega_{L(-)}t}\Big]
\end{aligned} \tag{2.23}$$

と表わされる．ただしここで，$A_{(\pm)1}$，$A_{(\pm)2}$ 等は独立ではなく，(2.15) 式，1 行目，および，2 行目から，

$$\begin{aligned}
&\Big[\Omega_{H(\pm)}^2+{\omega_1}^2+\gamma_1\Omega_{H(\pm)}\Big]A_{(\pm)1}+\Big[-{\tau_1}^2-\gamma_1\Omega_{H(\pm)}\Big]A_{(\pm)2}=0,\\
&\Big[-{\tau_2}^2-\gamma_2\Omega_{H(\pm)}\Big]A_{(\pm)1}+\Big[\Omega_{H(\pm)}^2+{\omega_2}^2+\gamma_2\Omega_{H(\pm)}\Big]A_{(\pm)2}=0
\end{aligned} \tag{2.24}$$

の関係が成り立っている．したがってここでは，これ以降，$A_{(\pm)1}$ の添え字 1 は付けないことにして，$A_{(\pm)}$ と書き， $A_{(\pm)2}$ の方を，

$$A_{(\pm)2} = P_{(\pm)}A_{(\pm)}, \qquad P_{(\pm)} = \frac{\Omega_{H(\pm)}^2+{\omega_1}^2+\gamma_1\Omega_{H(\pm)}}{{\tau_1}^2+\gamma_1\Omega_{H(\pm)}} = \frac{{\tau_2}^2+\gamma_2\Omega_{H(\pm)}}{\Omega_{H(\pm)}^2+{\omega_2}^2+\gamma_2\Omega_{H(\pm)}} \tag{2.25}$$

と書くことにする．ここで，$P_{(\pm)}$ を定義する式が 2 本あるのは，$\Omega_{H(\pm)}$ が，方程式 (2.16) (2.17) の解だからである．

まったく同じことが，$B_{(\pm)1}$，$B_{(\pm)2}$ にも言えて，以後，$B_{(\pm)1}$ の添え字 1 は付けないで，$B_{(\pm)}$ と書くことにし，$B_{(\pm)2}$ の方を，

$$B_{(\pm)2} = Q_{(\pm)} B_{(\pm)}, \qquad Q_{(\pm)} = \frac{\Omega_{L(\pm)}^2 + {\omega_1}^2 + \gamma_1 \Omega_{L(\pm)}}{{\tau_1}^2 + \gamma_1 \Omega_{L(\pm)}} = \frac{{\tau_2}^2 + \gamma_2 \Omega_{L(\pm)}}{\Omega_{L(\pm)}^2 + {\omega_2}^2 + \gamma_2 \Omega_{L(\pm)}} \tag{2.26}$$

と書くことにする．

この書き方で斉次部分の一般解 (2.23) 式を書き直して，

$$\begin{aligned} \theta =& \frac{f_0}{\ell_1}\Big[A_{(+)} e^{\Omega_{H(+)}\, t} + A_{(-)} e^{\Omega_{H(-)}\, t} + B_{(+)} e^{\Omega_{L(+)}\, t} + B_{(-)} e^{\Omega_{L(-)}\, t}\Big], \\ \phi =& \frac{f_0}{\ell_1}\Big[P_{(+)} A_{(+)} e^{\Omega_{H(+)}\, t} + P_{(-)} A_{(-)} e^{\Omega_{H(-)}\, t} + Q_{(+)} B_{(+)} e^{\Omega_{L(+)}\, t} + Q_{(-)} B_{(-)} e^{\Omega_{L(-)}\, t}\Big] \end{aligned} \tag{2.27}$$

としておく．

つぎに求めることは非斉次方程式 (2.12) の特解である．ここでは，θ，ϕ が f_0/ℓ_1 に比例することは確定的なので，

$$\theta = \frac{f_0}{\ell_1}\Big[C_1 \sin(\omega_e t) + D_1 \cos(\omega_e t)\Big], \qquad \phi = \frac{f_0}{\ell_1}\Big[C_2 \sin(\omega_e t) + D_2 \cos(\omega_e t)\Big] \tag{2.28}$$

と置いて方程式 (2.12) に代入し，行列の 1 行目，2 行目のそれぞれで，$\sin(\omega_e t)$，$\cos(\omega_e t)$ それぞれの係数合わせをすると，4 本の式

$$\begin{aligned} \big(-{\omega_e}^2 + {\omega_1}^2\big) C_1 - {\tau_1}^2 C_2 - \gamma_1 \omega_e \big(D_1 - D_2\big) &= {\omega_e}^2, \\ \big(-{\omega_e}^2 + {\omega_1}^2\big) D_1 - {\tau_1}^2 D_2 + \gamma_1 \omega_e \big(C_1 - C_2\big) &= 0, \\ -{\tau_2}^2 C_1 + \big(-{\omega_e}^2 + {\omega_2}^2\big) C_2 + \gamma_2 \omega_e \big(D_1 - D_2\big) &= {\omega_e}^2, \\ -{\tau_2}^2 D_1 + \big(-{\omega_e}^2 + {\omega_2}^2\big) D_2 - \gamma_2 \omega_e \big(C_1 - C_2\big) &= 0 \end{aligned} \tag{2.29}$$

を得る．この 4 本の式から，C_1，C_2，D_1, D_2 を求めるとよいのだが，ここでは先に，2 行目，4 行目の式から，D_1，D_2 を $C_1 - C_2$ の関数として求めると，

$$D_1 = \frac{1}{\Lambda}\omega_e \big[\gamma_1 \big({\omega_e}^2 - {\omega_2}^2\big) + \gamma_2 {\tau_1}^2\big]\big(C_1 - C_2\big), \qquad D_2 = -\frac{1}{\Lambda}\omega_e \big[\gamma_2 \big({\omega_e}^2 - {\omega_1}^2\big) + \gamma_1 {\tau_2}^2\big]\big(C_1 - C_2\big),$$
$$\Lambda = \big({\omega_e}^2 - {\omega_1}^2\big)\big({\omega_e}^2 - {\omega_2}^2\big) - {\tau_1}^2 {\tau_2}^2 \tag{2.30}$$

となる．ここで，分母に付く Λ はこの第 3 式で定義するが，この式は

$$\Lambda = \big[{\omega_e}^2 - \omega_{(+)}^2\big]\big[{\omega_e}^2 - \omega_{(-)}^2\big], \qquad \text{ここに} \qquad \omega_{(\pm)}^2 = \frac{1}{2}\Big[{\omega_1}^2 + {\omega_2}^2 \pm \sqrt{({\omega_1}^2 - {\omega_2}^2)^2 + 4{\tau_1}^2 {\tau_2}^2}\Big] \tag{2.31}$$

と因数分解されるので，${\omega_e}^2$ が $\omega_{(+)}^2$ または $\omega_{(-)}^2$ に等しくなるような事態は避けなければならない．これは振動系を設計する段階で $\omega_{(+)}^2$ はできるだけ大きく，また，$\omega_{(-)}^2$ はできるだけ小さくなるように作り，振動系と地震動が共振しないようにしなければならない．

この (2.30) 式から $D_1 - D_2$ を求めると，

$$D_1 - D_2 = \frac{\Gamma}{\Lambda}\big(C_1 - C_2\big), \quad \text{ここに} \quad \Gamma = \omega_e \Big[\big(\gamma_1 + \gamma_2\big){\omega_e}^2 + \gamma_1 \big({\tau_2}^2 - {\omega_2}^2\big) + \gamma_2 \big({\tau_1}^2 - {\omega_1}^2\big)\Big] \tag{2.32}$$

となるので，これを (2.29) の第 1 式，第 3 式に代入すると，ただし，以下では式が煩雑にならないように，

$$\frac{\varGamma}{\varLambda} = \alpha \tag{2.33}$$

と置くことにして，C_1, C_2 を求めるための方程式

$$\begin{pmatrix} -{\omega_e}^2 + {\omega_1}^2 - \alpha\gamma_1\omega_e & -\big({\tau_1}^2 - \alpha\gamma_1\omega_e\big) \\ -\big({\tau_2}^2 - \alpha\gamma_2\omega_e\big) & -{\omega_e}^2 + {\omega_2}^2 - \alpha\gamma_2\omega_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = {\omega_e}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

を得る．これを解くと，C_1, C_2 が，

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\varPi}{\omega_e}^2\big[-{\omega_e}^2 + {\omega_2}^2 + {\tau_1}^2 - \alpha\big(\gamma_1+\gamma_2\big)\omega_e\big], \quad C_2 = \frac{1}{\varPi}{\omega_e}^2\big[-{\omega_e}^2 + {\omega_1}^2 + {\tau_2}^2 - \alpha\big(\gamma_1+\gamma_2\big)\omega_e\big] \\ &\text{ここに}\quad \varPi = \big(-{\omega_e}^2 + {\omega_1}^2 - \alpha\gamma_1\omega_e\big)\big(-{\omega_e}^2 + {\omega_2}^2 - \alpha\gamma_2\omega_e\big) - \big({\tau_1}^2 - \alpha\gamma_1\omega_e\big)\big({\tau_2}^2 - \alpha\gamma_2\omega_e\big) \end{aligned} \tag{2.35}$$

と求められる．これから，$C_1 - C_2$ は，

$$C_1 - C_2 = \frac{1}{\varPi}{\omega_e}^2\big[\big({\tau_1}^2 - {\omega_1}^2\big) - \big({\tau_2}^2 - {\omega_2}^2\big)\big] \tag{2.36}$$

となるので，これを (2.30) 式に代入すると，D_1, D_2 が，最終的に

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{\varLambda\varPi}{\omega_e}^3\big[\gamma_1\big({\omega_e}^2 - {\omega_2}^2\big) + \gamma_2{\tau_1}^2\big]\big[\big({\tau_1}^2 - {\omega_1}^2\big) - \big({\tau_2}^2 - {\omega_2}^2\big)\big], \\ D_2 &= -\frac{1}{\varLambda\varPi}{\omega_e}^3\big[\gamma_2\big({\omega_e}^2 - {\omega_1}^2\big) + \gamma_1{\tau_2}^2\big]\big[\big({\tau_1}^2 - {\omega_1}^2\big) - \big({\tau_2}^2 - {\omega_2}^2\big)\big] \end{aligned} \tag{2.37}$$

と求められる．

以上で非斉次部分の特解 (2.28) 式で使用する係数 C_1, C_2, D_1, D_2 が求められたが，以下では数式簡素化のため，この (2.28) 式の形のままで使用することにし，非斉次方程式 (2.12) の一般解は，斉次部分の一般解 (2.27) に，この非斉次部分の特解を加えることで，

$$\begin{aligned} \theta =& \frac{f_0}{\ell_1}\Big[A_{(+)}e^{\varOmega_{H(+)}t} + A_{(-)}e^{\varOmega_{H(-)}t} + B_{(+)}e^{\varOmega_{L(+)}t} + B_{(-)}e^{\varOmega_{L(-)}t} + C_1\sin(\omega_e t) + D_1\cos(\omega_e t)\Big], \\ \phi =& \frac{f_0}{\ell_1}\Big[P_{(+)}A_{(+)}e^{\varOmega_{H(+)}t} + P_{(-)}A_{(-)}e^{\varOmega_{H(-)}t} + Q_{(+)}B_{(+)}e^{\varOmega_{L(+)}t} + Q_{(-)}B_{(-)}e^{\varOmega_{L(-)}t} \\ &\qquad\qquad + C_2\sin(\omega_e t) + D_2\cos(\omega_e t)\Big] \end{aligned} \tag{2.38}$$

と得られたことになる．

2.3 初期条件の設定

初期条件として，2 個の錘 m_1, m_2 は，地震が始まる瞬間 $t = 0$ には，両方とも直立で，完全に静止していたとして，

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = \ell_S, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0 \tag{2.39}$$

とする．この条件を x_1，x_2 に適用するには，$f(t) = f_0 \sin(\omega_e t)$ とした (2.6) 式と，θ，ϕ の一般解 (2.38) 式を用いて，

$$
\begin{aligned}
x_1(t) =& f_0 \Big[A_{(+)} e^{\Omega_{H(+)}\, t} + A_{(-)} e^{\Omega_{H(-)}\, t} + B_{(+)} e^{\Omega_{L(+)}\, t} + B_{(-)} e^{\Omega_{L(-)}\, t} \\
& \qquad\qquad + \big(1 + C_1\big) \sin(\omega_e t) + D_1 \cos(\omega_e t) \Big], \\
x_2(t) =& f_0 \Big[P_{(+)} A_{(+)} e^{\Omega_{H(+)}\, t} + P_{(-)} A_{(-)} e^{\Omega_{H(-)}\, t} + Q_{(+)} B_{(+)} e^{\Omega_{L(+)}\, t} + Q_{(-)} B_{(-)} e^{\Omega_{L(-)}\, t} \\
& \qquad\qquad + \big(1 + C_2\big) \sin(\omega_e t) + D_2 \cos(\omega_e t) \Big] + \ell_S
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

と，x_1，x_2 の一般解を求めておき，最後に残された 4 個の未知数 $A_{(+)}$. $A_{(-)}$，$B_{(+)}$，$B_{(-)}$ を求めることになる．ただし，このままでは複素数がたくさん残っているので，ここで x_1，x_2 が実数のみで表示されるように，変えたほうが，初期条件を適用し易くなるはずである．そもそも，複素数が入り込んだのは，微分方程式の段階で，時間の 2 階微分の他に，1 階微分が入り込んだために，sine 関数の他に cosine 関数も入り込み解析が困難になったためである．それ故ここでは，三角関数は使わずに，1 階微分も 2 階微分も同様に扱える指数関数を用いた解析をした．そのため，(2.20) 式

$$
\Omega_{H(\pm)} = -\gamma_H \pm i\,\omega_H, \qquad \Omega_{L(\pm)} = -\gamma_L \pm i\,\omega_L \tag{再掲 2.20}
$$

が入り込んでしまい，これに伴い (2.25) (2.26) 式の $P_{(\pm)}$，$Q_{(\pm)}$ という複素数が入り込むことになった．当然ながら，$\Omega_{H(+)}$ と $\Omega_{H(-)}$. および，$\Omega_{L(+)}$ と $\Omega_{L(-)}$ は，それぞれ，互いに複素共役なので，それらから作られた $P_{(+)}$，$P_{(-)}$ および， $Q_{(+)}$，$Q_{(-)}$ も，それぞれ，互いに複素共役になる．そこで，これらも実部，虚部に分けることにして，

$$
P_{(\pm)} = P_R \pm i\,P_I, \qquad Q_{(\pm)} = Q_R \pm i\,Q_I \tag{2.41}
$$

と置くことにする．残るは未知数の $A_{(\pm)}$，$B_{(\pm)}$ であるが，$x_1(t)$，$x_2(t)$ が，任意時間で実数になるためには，$A_{(\pm)}$，$B_{(\pm)}$ それぞれの添え字の $(+), (-)$ 同士が，複素共役でなければならず，

$$
A_{(\pm)} = \frac{1}{2}\big[A_R \pm i\,A_I\big], \qquad B_{(\pm)} = \frac{1}{2}\big[B_R \pm i\,B_I\big] \tag{2.42}
$$

と置くことにする．ここで，1/2 を付けて定義したのは，後の式を簡素化するためである．

これらの式を用いて，(2.40) の x_1，x_2 を書き直すと，長い式になるが，虚数部はすべて消え，

$$
\begin{aligned}
x_1(t) =& f_0\, e^{-\gamma_H t} \Big[A_R \cos(\omega_H t) + A_I \sin(\omega_H t) \Big] + f_0\, e^{-\gamma_L t} \Big[B_R \cos(\omega_L t) + B_I \sin(\omega_L t) \Big] \\
& \qquad\qquad + f_0 \Big[\big(1 + C_1\big) \sin(\omega_e t) + D_1 \cos(\omega_e t) \Big], \\
x_2(t) =& f_0\, e^{-\gamma_H t} \Big[\big(P_R A_R - P_I A_I\big) \cos(\omega_H t) + \big(P_I A_R + P_R A_I\big) \sin(\omega_H t) \Big] \\
& + f_0\, e^{-\gamma_L t} \Big[\big(Q_R B_R - Q_I B_I\big) \cos(\omega_L t) + \big(Q_I B_R + Q_R B_I\big) \sin(\omega_L t) \Big] \\
& \qquad\qquad + f_0 \Big[\big(1 + C_2\big) \sin(\omega_e t) + D_2 \cos(\omega_e t) \Big] + \ell_S
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

と表わされる．

ここで，初期条件 (2.39) の最初の 2 式，$x_1(0)=0,\ x_2(0)=\ell_S$ を適用すると，

$$A_R+B_R=-D_1,\qquad P_RA_R-P_IA_I+Q_RB_R-Q_IB_I=-D_2 \tag{2.44}$$

という式を得る．さらに，(2.39) の残りの 2 式 $\dot{x}_1(0)=0,\ \dot{x}_2(0)=0$ を適用して，

$$\begin{aligned}&\gamma_HA_R-\omega_HA_I+\gamma_LB_R-\omega_LB_I=\omega_e\big(1+C_1\big)\\&\gamma_H\big(P_RA_R-P_IA_I\big)-\omega_H\big(P_IA_R+P_RA_I\big)+\gamma_L\big(Q_RB_R-Q_IB_I\big)-\omega_L\big(Q_IB_R+Q_RB_I\big)\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=\omega_e\big(1+C_2\big)\end{aligned} \tag{2.45}$$

となる．これら (2.44) (2.45) 式から，4 個の未知数 $A_R,\ A_I,\ B_R,\ B_I$ を求めることになるが，ここでは初めに，(2.44) 式から $B_R,\ B_I$ を， $A_R,\ A_I$ の関数として，

$$B_R=-A_R-D_1,\qquad B_I=\frac{1}{Q_I}\Big[\big(P_R-Q_R\big)A_R-P_IA_I-\big(Q_RD_1-D_2\big)\Big] \tag{2.46}$$

と求めておき，これを (2.45) 式に代入すると，$A_R,\ A_I$ を求めるための方程式

$$\begin{pmatrix}S_{11}&S_{12}\\S_{21}&S_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_R\\A_I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T_1\\T_2\end{pmatrix} \tag{2.47}$$

を得る．ここに，

$$\begin{aligned}S_{11}&=\big(\gamma_H-\gamma_L\big)Q_I-\omega_L\big(P_R-Q_R\big),\\S_{12}&=\omega_LP_I-\omega_HQ_I,\\S_{21}&=\big(\gamma_H-\gamma_L\big)P_RQ_I-\omega_HP_IQ_I-\omega_LP_RQ_R+\omega_L\big(Q_R^2+Q_I^{\,2}\big),\\S_{22}&=-\big(\gamma_H-\gamma_L\big)P_IQ_I+\omega_LP_IQ_R-\omega_HP_RQ_I,\\T_1&=Q_I\omega_e\big(1+C_1\big)+\big(\gamma_LQ_I-\omega_LQ_R\big)D_1+\omega_LD_2,\\T_2&=Q_I\omega_e\big(1+C_2\big)-\omega_L\big(Q_R^2+Q_I^{\,2}\big)D_1+\big(\gamma_LQ_I+\omega_LQ_R\big)D_2\end{aligned} \tag{2.48}$$

と定義する．

方程式 (2.47) を，このままの形で解くと，

$$A_R=\frac{T_1S_{22}-T_2S_{12}}{S_{11}S_{22}-S_{12}S_{21}},\qquad A_I=\frac{T_2S_{11}-T_1S_{21}}{S_{11}S_{22}-S_{12}S_{21}} \tag{2.49}$$

となるが，この $S_{ij},\ T_i,\ (i,j=1,2)$ に (2.48) 式を代入すると，分母，分子にある $S_{11}S_{22}-S_{12}S_{21},\ T_1S_{22}-T_2S_{12},\ T_2S_{11}-T_1S_{21}$ の 3 個の要素はいずれも，Q_I という共通因子を持つことが分かる．そこで，

$$S_{11}S_{22}-S_{12}S_{21}=Q_I\,\Delta,\quad T_1S_{22}-T_2S_{12}=Q_I\,U_1,\quad T_2S_{11}-T_1S_{21}=Q_I\,U_2 \tag{2.50}$$

と置き直して，$\Delta,\ U_1,\ U_2$ を求めると，

$$\Delta=\omega_H\omega_L\Big[\big(P_R-Q_R\big)^2+\big(P_I-Q_I\big)^2\Big]-P_IQ_I\Big[\big(\gamma_L-\gamma_H\big)^2+\big(\omega_H-\omega_L\big)^2\Big] \tag{2.51}$$

と，きれいな形で求められる．また，U_1, U_2 の方は長い式になるが

$$\begin{aligned} U_1 = \Big[\omega_e\big(1+C_1\big)+\gamma_L D_1\Big]\Big[\big(\gamma_L-\gamma_H\big)P_I Q_I - \omega_H P_R Q_I + \omega_L P_I Q_R\Big] \\ - \omega_L\big(Q_R D_1 - D_2\big)\Big[\big(\gamma_L-\gamma_H\big)P_I - \omega_H\big(P_R - Q_R\big)\Big] \\ + \Big[\omega_e\big(1+C_2\big)+\gamma_L D_2 - \omega_L Q_I D_1\Big]\Big[\omega_H Q_I - \omega_L P_I\Big] \end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned} U_2 = \Big[\omega_e\big(1+C_2\big)+\gamma_L D_2 - \omega_L Q_I D_1\Big]\Big[\big(\gamma_H-\gamma_L\big)Q_I - \omega_L\big(P_R - Q_R\big)\Big] \\ - \Big[\omega_e\big(1+C_1\big)+\gamma_L D_1\Big]\Big[\big(\gamma_H-\gamma_L\big)P_R Q_I - \omega_H P_I Q_I + \omega_L {Q_I}^2 - \omega_L Q_R\big(P_R - Q_R\big)\Big] \\ + \omega_L\big(Q_R D_1 - D_2\big)\Big[\big(\gamma_H-\gamma_L\big)\big(P_R - Q_R\big) - \omega_H P_I + \omega_L Q_I\Big] \end{aligned} \tag{2.53}$$

と求められる．この Δ, U_1, U_2 を用いて，(2.49) 式の A_R, A_I は，分母，分子で Q_I が消え，

$$A_R = \frac{U_1}{\Delta}, \qquad A_I = \frac{U_2}{\Delta} \tag{2.54}$$

と書き直される．また，B_R, B_I は (2.46) 式から

$$B_R = -\frac{U_1}{\Delta} - D_1, \qquad B_I = \frac{1}{Q_I}\Big[\big(P_R - Q_R\big)\frac{U_1}{\Delta} - P_I\frac{U_2}{\Delta} - \big(Q_R D_1 - D_2\big)\Big] \tag{2.55}$$

となる．

これで，すべての未定係数が求められたので，初期条件 (2.39) 式を満たす $x_1(t)$, $x_2(t)$ の解 (2.43) 式が求められたことになる．この式で特徴的なことは，地震から直接受ける振動数 ω_e の強制振動は，地震が続くかぎり継続するが，固有振動の振動数 ω_H, ω_L の振動は，因子 $e^{-\gamma_H t}$, $e^{-\gamma_L t}$ の形でダンパー効果が作用し，時間と共に減衰することである．

3 おわりに

以上で，ダンパー付心柱モデルの解析が終わったことになるが，この計算を数か月後に読み返したときに，何と煩雑な計算をやったことかと，自分ながら感心してしまった．最終結果は，(2.43) 式であるが，この中には，A_R, A_I, B_R, B_I, P_R, P_I, Q_R, Q_I, C_1, C_2, D_1, D_2 という 12 個もの定数が含まれる．これらすべての定数は，求めてみたのではあるが，もしこの結果をすべて (2.43) 式に代入してしまうと，この式は数十行にもわたる超長い式になってしまうであろう．ということは，いくら解析的に解いたとしても，そこから定性的な中身を拾い出すことは不可能に近く，解析解の限界を感じてしまう．

話し変わって，θ, ϕ に関する斉次部分の方程式 (2.13) の解とした (2.14) 式に含まれる Ω が (2.20) 式のように求まったとすると，その指数関数 $e^{\Omega t}$ は，

$$\begin{aligned} & e^{\Omega_{H(\pm)}t} = e^{(-\gamma_H \pm i\,\omega_H)t} = e^{-\gamma_H t}\big[\cos(\omega_H t) \pm i\,\sin(\omega_H t)\big], \\ \text{および，} \quad & e^{\Omega_{L(\pm)}t} = e^{(-\gamma_L \pm i\,\omega_L)t} = e^{-\gamma_L t}\big[\cos(\omega_L t) \pm i\,\sin(\omega_L t)\big] \end{aligned} \tag{3.1}$$

と，実部，虚部に分けられる．また，解くべき方程式 (2.13) は，θ, ϕ に関する線形斉次方程式なので，この実部，虚部，それぞれが解になることに注意して，その一般解を，任意定数 A_{Si}, A_{Ci}, B_{Si}, B_{Ci}, $(i = 1,\ 2)$ を

用いて，

$$
\begin{aligned}
\theta &= \frac{f_0}{\ell_1}\Big[e^{-\gamma_H t}\big[A_{S1}\sin(\omega_H t) + A_{C1}\cos(\omega_H t)\big] + e^{-\gamma_L t}\big[B_{S1}\sin(\omega_L t) + B_{C1}\cos(\omega_L t)\big]\Big] \\
\phi &= \frac{f_0}{\ell_1}\Big[e^{-\gamma_H t}\big[A_{S2}\sin(\omega_H t) + A_{C2}\cos(\omega_H t)\big] + e^{-\gamma_L t}\big[B_{S2}\sin(\omega_L t) + B_{C2}\cos(\omega_L t)\big]\Big]
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

と置くことができる．この方法を用いると，この段階から虚数を含まない式で解析ができるはずと，初めはこの方法で計算を始めた．しかし，この (3.2) 式で用いた係数間の関係式を求める段階で面倒なことになってしまい，途中で諦めてしまった．今回の本文で採用した方法は．そのまま複素解析を引きずることにし，(2.43) 式のところで初めて実数だけを用いた計算式になっている．ということで，ダンパー付心柱モデルの解析の難しさを思う存分味わされてしまった．

またまた話し変わって，今回の計算があまりに面倒なものになってしまったので，より簡単に解けるダンパー付心柱モデルはないかと，いろいろ考えてみた．そこで思い付いたのが，以下の図 2，図 3 に示すモデルである．図 2 の振子モデルは，左に立っているものが塔本体で，右に立っているものが心柱に相当するモデルである．また，図 3 の方は，より簡単化するために，心柱と塔本体を同じ振動系として，1 次元化したものである．しかしながら，ちょっと計算してみると分かることだが，これら 2 つのモデルとも，一般的に解こうとすると，4 次方程式を解かなければならず，その煩雑さは今回のものと．ほとんど変わらないということが分かった．

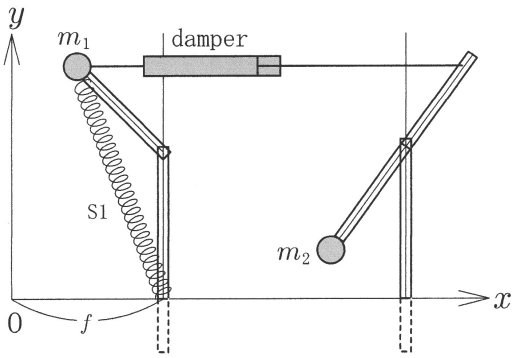

図 2 振り子モデル

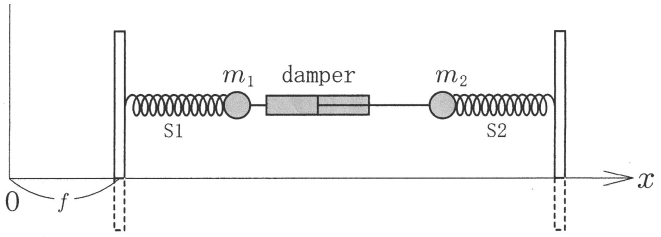

図 3 1 次元モデル

次回はこれら 2 つのモデルについて，先に述べたとおり一般的に解くことは困難なので，特殊な場合に限定して解くことにし，長く続いた「心柱モデル」を終えることにしよう．

「Levi-Civita の記号の縮約」再論 2

矢野　忠[1)]

The Contraction of Levi-Civita Symbols Revisited 2

Tadashi YANO

1. はじめに
2. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}$ の行列式表示
3. Levi-Civita の記号の縮約
4. おわりに
5. 付録

まえおき

このエッセイは「Levi-Civita の記号の縮約」再々論 [1] の改訂版である．話の筋は変えなかったが，記号の定義をきちんと書いたこと，(2.6)-(2.8) の証明を詳しく述べたこと，および，付録 1, 2 を新たにつけ加えた．付録 1, 2 は余計かもしれないが，直観的に正しいと感じることの具体的な内容の記述である．

この度タイトルを「Levi-Civita の記号の縮約」再論 2 と変更しただけでこの以前のエッセイをほぼそのまま再掲するのは，このエッセイの直後に同じタイトルで「Levi-Civita の記号の縮約」再論 3 を掲載するためである．事情をご賢察下さい．もちろん文献等の追加等の細かな修正は行っている．特に， [5] は Levi-Civita の記号の発見法的な理解には重要かもしれない．

1　はじめに

愛数協の機関誌「研究と実践」第 18 号に「テンソル解析の学習における問題点」というテーマでエッセイを載せたが [2]，その中で Levi-Civita の記号とその縮約について述べた．またその再論として「研究と実践」第 64 号に「Levi-Civita の記号の縮約」再論を載せた [3]．またその直後に発行された「研究と実践」第 65 号に前記の「テンソルの学習における問題点」の改訂版を載せた [4]．これらのエッセイで Levi-Civita の記号とその縮約については語り尽くしたと思っていたが，そこで述べたのとは異なった証明を『流体力学』 [6] に見つけた．

天才物理学者 Feynman がどこかで言ったように「人は少なくとも二つ以上の方法で物

1)　元愛媛大学工学部

事を理解しなければ，その事を分かったことにはならない」から，あえて標題のテーマについて３度目の説明を試みてみよう．

2　$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}$ の行列式表示

問題にする重要な関係式について述べる前に，ここで取り扱う記号の定義を述べておこう．

それは Kronecker のデルタ δ_{ij} と Leivi-Civita の記号 ϵ_{ijk} の定義である．

まず Kronecker のデルタ δ_{ij} は

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1,\ i = j \text{ のとき} \\ 0,\ i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.1}$$

で定義される．

つぎに Levi-Civita の記号 ϵ_{ijk} は

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1,\ (i,j,k) = (1,2,3) \text{ または } (2,3,1) \text{ または } (3,1,2) \text{ のとき} \\ -1,\ (i,j,k) = (3,2,1) \text{ または } (2,1,3) \text{ または } (1,3,2) \text{ のとき} \\ 0,\ \text{上の 2 つの場合以外のとき} \end{cases} \tag{2.2}$$

で定義される．

上で定義された Levi-Civita の記号の積と Kronecker のデルタの行列式との間に有用な関係式

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \tag{2.3}$$

が成り立つ[2)]．

『流体力学』（前編） [6] にはこの関係の今まで見たことのなかった証明が与えられている．ここではその証明を述べてみよう．

(2.3) の左辺は ϵ_{ijk} と ϵ_{pqr} のテンソル積として 6 階のテンソルを表す[3)]．一方，右辺の行列式を展開すると $\delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr}$ のような 3 個の 2 階のテンソル積，すなわち，6 階のテンソルの和になる．

2）　ここでは，この (2.3) が与えられた式として証明するという立場だが，その後，ベクトルのスカラー３重積から導くことを [5] で述べている．

3）　この表現はあまり正確ではない．というのは ϵ_{ijk} 等は正確には普通のテンソルではないからである．正確にはこれは相対テンソル（テンソル密度ともいう）と呼ばれているものである．空間反転に対する変換性が普通のテンソルとは異なっている．しかし，ここでは空間反転をとりあつかわないので，普通のテンソルのように扱っている．

この等式を証明するには，右辺の行列式の行を，その添字 ijk から 123 の順序となるように入れ替えれば，行の置換による符号 ϵ_{ijk} がくくり出せるから，

$$\begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

となる．つぎに同様に行列式の列の順序を pqr から 123 の順序となるように入れ替えれば，行列式の列の置換による符号 ϵ_{pqr} がまたくくり出せて

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} \end{aligned} \tag{2.5}$$

が得られて，式 (2.3) が証明された[4]．さすがに流体物理学の研究で業績をあげられた，今井功先生の証明は簡潔で要を得ている．

4） この証明で直観的に十分かとも思うが，納得できない人のために具体的な証明を付録 1 に述べる．

この式 (2.3) から順次縮約を 1 回，2 回，3 回と行えば，

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon_{iqr} &= \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{ji} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{ki} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \\
&= \delta_{ii}\begin{vmatrix} \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} - \delta_{iq}\begin{vmatrix} \delta_{ji} & \delta_{jr} \\ \delta_{ki} & \delta_{kr} \end{vmatrix} + \delta_{ir}\begin{vmatrix} \delta_{ji} & \delta_{jq} \\ \delta_{ki} & \delta_{kq} \end{vmatrix} \\
&= 3\begin{vmatrix} \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{jr} & \delta_{jq} \\ \delta_{kr} & \delta_{kq} \end{vmatrix} \\
&= (3-1-1)\begin{vmatrix} \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \\
&= \delta_{jq}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kq} \qquad (2.6) \\
\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijr} &= \delta_{jj}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kj} \\
&= 3\delta_{kr} - \delta_{kr} \\
&= 2\delta_{kr} \qquad (2.7) \\
\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= 2\delta_{kk} = 6 \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで 2 度現れる添字についてはそれぞれ 1-3 までの和をとるという Einstein の規約が用いられている．

今井先生の証明を今まで見たから，ついでに藤井昭彦先生の代数的な証明も見ておこう[5]．その要点は Levi-Civita の記号 $\epsilon_{ij}\epsilon_{pq}$ の行列式表示の導出に端的に現れているから，そこを見てみよう．

$\epsilon_{ij}\epsilon_{pq}$ は４階のテンソルであるから，２階のテンソル $\delta_{ip}, \delta_{iq}, \delta_{jp}, \delta_{jq}$ の中の２つの積の１次結合で表されるはずである．ただし，$(i,j),(p,q)$ はそれぞれのペアの添字に関して反対称でなければならない．そのような組合わせは $\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$ に限られる．試みに $i \leftrightarrow j$ の交換を行ってみれば，$\delta_{jp}\delta_{iq} - \delta_{jq}\delta_{ip} = -(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp})$ と $i \leftrightarrow j$ の交換に対して反対称となっている．また，同様に $p \leftrightarrow q$ の交換を行ってみれば，やはり反対称になっていることが分かる．したがって，a を未定の定数として

$$
\epsilon_{ij}\epsilon_{pq} = a\begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} \qquad (2.9)
$$

5) これは [7] にエレガントな証明がある．

と表せる．ここで，$i=1, j=2, p=1, q=2$ とおけば，$a=1$ が得られる．したがって

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{pq} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

が成り立つことが分かる．これが分かると

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{kr} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{vmatrix} \delta_{\mu\alpha} & \delta_{\mu\beta} & \delta_{\mu\gamma} & \delta_{\mu\delta} \\ \delta_{\nu\alpha} & \delta_{\nu\beta} & \delta_{\nu\gamma} & \delta_{\nu\delta} \\ \delta_{\rho\alpha} & \delta_{\rho\beta} & \delta_{\rho\gamma} & \delta_{\rho\delta} \\ \delta_{\sigma\alpha} & \delta_{\sigma\beta} & \delta_{\sigma\gamma} & \delta_{\sigma\delta} \end{vmatrix} \tag{2.12}$$

が成り立つことは容易に推量できるであろう[6)]．

3 Levi-Civita の記号の縮約

「研究と実践」第 18 号 [2] に Levi-Civita の記号の応用についても述べた．これらはもちろん私の独創ではなく，テンソル解析の初歩を学んだことのある人なら誰でもよく知っていることである．問題は

$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}$ の行列式表示（または行列式を展開した式）をどう導くか

にかかっていた．しかし，実際に応用として必要とされるのは

$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}$ を縮約したときに成り立つ式，(2.6),(2.7),(2.8)

である．特に，(2.6）が重要である．これらが容易に証明できれば，現実の教育に役立つことになる．『物理数学 (I)』 [8][7)]はこれに挑戦した恐らくははじめての試みであろう[8)]．この試みの教育的実践の成果を詳らかにはしないが，それなりの実績を踏まえていると考えるのが妥当であろう．そうだとすれば，愛媛大学でもこの Levi-Civita の記号の工学教育への導入とそのベクトル解析への積極的活用を図るべきであろう．(2.6),(2.7),(2.8) がどのように用いられるかは前記のエッセイで示したので [4]，ここでは (2.6),(2.7),(2.8) の標準的な証明を与えておこう．

まず (2.6) の証明を $j=k$ と $j \neq k$ とに分けて考えよう．

6） (2.11), (2.12) 等の式の添字でラテン文字は 1-3 をとり，ギリシャ文字は 0-3 または 1-4 をとると約束する．

7） その後 [9] に [8] とほぼおなじ内容が載っていることを知った．これが [8] の文献の原典であろうかと推測される．

8） もちろん，物理学や数学に進む学生を除いての話である．少し高等な古典力学のテクストである，『古典力学』（上）第 2 版 [10] には Levi-Civita の記号が出ている

$j=k$ の場合は，Levi-Civita の記号の定義にしたがって，(2.6) の左辺は

$$\epsilon_{ijj}=0,\text{（}j\text{ について和をとらない）} \tag{3.1}$$

である．一方 (2.6) の右辺は

$$\delta_{jq}\delta_{jr}-\delta_{jr}\delta_{jq}=0,\text{（}j\text{ について和をとらない）} \tag{3.2}$$

で (2.6) が成立することが分かる．

$j\neq k$ の場合は，$(j,k)=(1,2),(2,3),(3,1)$ の場合とその逆順の $(j,k)=(2,1),(3,2),(1,3)$ の場合がある．逆順の場合は新たに考える必要がないことを後に示す．ここでは $(j,k)=(1,2)$ について調べてみよう．このとき (2.6) の左辺は

$$\epsilon_{i12}\epsilon_{iqr}=\epsilon_{312}\epsilon_{3qr}=\epsilon_{3qr}=\begin{cases}1,\ (q=1,r=2)\\ -1,\ (q=2,r=1)\\ 0,\ (\text{上の場合以外})\end{cases} \tag{3.3}$$

である．一方，(2.6) の右辺は

$$\delta_{1q}\delta_{2r}-\delta_{1r}\delta_{2q}=\begin{cases}1,\ (q=1,r=2)\\ -1,\ (q=2,r=1)\\ 0,\ (\text{上の場合以外})\end{cases} \tag{3.4}$$

で，(2.6) が成り立つ．$(j,k)=(2,3),(3,1)$ の場合も同様である[9)]．

$(j,k)=(2,1),(3,2),(1,3)$ の場合は $j\leftrightarrow k$ の交換に対して (2.6) が

$$\epsilon_{ikj}\epsilon_{iqr}=\delta_{kq}\delta_{jr}-\delta_{kr}\delta_{jq} \tag{3.5}$$

となるが，これは

$$-\epsilon_{ijk}\epsilon_{iqr}=-(\delta_{jq}\delta_{kr}-\delta_{jr}\delta_{kq}) \tag{3.6}$$

となり，これは (2.6) と同じであるので，新たに証明する必要がない．

(2.7) の証明は (2.6) で j と q について縮約すれば，

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijr}&=\delta_{jj}\delta_{kr}-\delta_{jr}\delta_{kj}\\&=3\delta_{kr}-\delta_{kr}\\&=2\delta_{kr}\end{aligned} \tag{2.7}$$

9） 話の筋としてはそのとおりであるが，付録 2 に $(j,k)=(2,3),(3,1)$ の場合も示しておく．

と証明される．

さらに，(2.8) の証明は (2.7) で k と r について縮約すれば

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 2\delta_{kk} = 2 \cdot 3 = 6 \tag{2.8}$$

と証明される．

4　おわりに

Levi-Civita の記号の縮約はベクトルの 3 重積 $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ において現れる．テンソル解析を学んだことのない人にとってはなじみの薄い，この Levi-Civita の記号の使い方を覚えれば，ベクトル解析の多くの面倒な公式を覚える必要はあまりなくなるであろう．

5　付録

5.1　付録 1　(2.4) と (2.5) の具体的な導出

(2.4) と (2.5) の導出は直観的に正しいと認められるであろうが，それでももう一つ納得できないと思われるかもしれない．それで具体的に個々の場合を計算してみることにした．これは直観的な説明に納得できない方のためだから，すでに納得できた方は読む必要がない．

まず，(2.4) の導出からはじめよう．(2.4) および (2.5) における添字 i, j, k はすべて $1, 2, 3$ をとるのだが，i, j, k が同じ数を重複して取る場合には $\epsilon_{ijk} = 0$ である．したがって，(i, j, k) が異なった 1, 2, 3 の数となる場合だけを考えればよい．

これから行列式の各行の入れ替えで (2.4) が成り立つことを示したい．

(i, j, k) が $(1, 2, 3)$ の偶置換である場合から考える[10]．この場合は $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ の場合がある．

$(i, j, k) = (1, 2, 3)$ の場合は偶置換の最後に考えることにして，はじめに $(i, j, k) = (2, 3, 1)$

10）すなわち，行列式の各行の入れ替えが偶数回行われる場合を偶置換と言っている．

の場合を考えよう．

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \\ \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \end{vmatrix} &= (-1) \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \end{vmatrix} \\
&= (-1)(-1) \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix} \\
&= (+1) \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix} \\
&= \epsilon_{231} \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

が成り立つ．

これはまったく正しい．しかし，いつも行列式を一々書くのは煩わしいので，つぎのような記号 D_{ijk} を導入しよう．

$$
D_{ijk} := \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \tag{5.2}
$$

ここで，p, q, r はこの段階では固定した数で，行列式の行の入れ替えのときには変えない．

この記号を導入すれば，上の行の入れ替えの計算をもっと簡便に表すことができる．

この記号を導入すれば，上の (5.1) の計算は簡便に

$$
D_{231} = (-1)D_{132} = (-1)(-1)D_{123} = (+1)D_{123} = \epsilon_{231}D_{123} \tag{5.3}
$$

と表すことができる．

以下，この表記で行の入れ替えの計算を示すことにする．

つぎに，$(i, j, k) = (3, 1, 2)$ のとき，行列式の行の入れ替え演算は

$$
D_{312} = (-1)D_{132} = (-1)(-1)D_{123} = (+1)D_{123} = \epsilon_{312}D_{123} \tag{5.4}
$$

となる．

偶置換の場合の最後に，はじめにスキップした $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ のときを考える．このとき，行列式の行の入れ替えは行わないので，

$$
D_{123} = (+1)D_{123} = \epsilon_{123}D_{123} \tag{5.5}
$$

である．この場合を始めにもってきてもよかったのだが，まったく行列式の行の入れ替えをしないのは，特別な場合なので，わざと偶置換の場合の最後に考えた．

この３つの場合では $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$ である．したがって，行の偶置換の場合に (2.4) が成り立つ．

つぎに (i,j,k) が $(1,2,3)$ の奇置換の場合を考えよう．この場合は $(i,j,k) = (3,2,1),(2,1,3),(1,3,2)$ の場合がある．

前に定義した D_{ijk} を奇置換の場合でも続けて用いよう．そうすると

$$D_{321} = (-1)D_{123} = \epsilon_{321}D_{123} \tag{5.6}$$

$$D_{213} = (-1)D_{123} = \epsilon_{213}D_{123} \tag{5.7}$$

$$D_{132} = (-1)D_{123} = \epsilon_{132}D_{123} \tag{5.8}$$

この３つの場合ではもちろん $\epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1$ である．

したがって，行の奇数回のいれかえ（奇置換）の場合にも (2.4) が成り立つ．

(i,j,k) が $(1,2,3)$ の偶置換の場合も奇置換の場合も (2.4) が成り立つ．

つぎに行列式の列の入れ替えについて考えることにしよう．この場合には (2.4) で

$$D_{123} = C_{pqr} := \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix} \tag{5.9}$$

と定義しよう．

$(p,q,r) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)$ のとき偶置換であり，$(p,q,r) = (3,2,1),(2,1,3),(1,3,2)$ のとき奇置換である．

まず偶置換から考えよう．このとき $C_{231}, C_{312}, C_{123}$ の 3 通りの場合がある．それらはそれぞれ

$$C_{231} = (-1)C_{132} = (-1)(-1)C_{123} = (+1)C_{123} = \epsilon_{231}C_{123} \tag{5.10}$$

$$C_{312} = (-1)C_{132} = (-1)(-1)C_{123} = (+1)C_{123} = \epsilon_{312}C_{123} \tag{5.11}$$

$$C_{123} = (+1)C_{123} = \epsilon_{123}C_{123} \tag{5.12}$$

となる．

つぎに奇置換を考えよう．このとき $C_{321}, C_{213}, C_{132}$ の 3 通りの場合がある．それらはそれぞれ

$$C_{321} = (-1)C_{123} = \epsilon_{321}C_{123} \tag{5.13}$$

$$C_{213} = (-1)C_{123} = \epsilon_{213}C_{123} \tag{5.14}$$

$$C_{132} = (-1)C_{123} = \epsilon_{132}C_{123} \tag{5.15}$$

以上で偶置換の場合も奇置換の場合も行列の列の入れ替えに対して

$$D_{123} = C_{pqr} = \epsilon_{pqr} C_{123} \tag{5.16}$$

が成り立つことが示された．

(5.16) は (2.4) から (2.5) への式の変形を証明している．したがって，(2.5) の具体的な証明がなされた．

5.2 付録 2 (2.6) の証明 $(j,k) = (2,3), (3,1)$ の場合

この付録 2 では (2.6) の $(j,k) = (2,3), (3,1)$ の場合の証明をしておく．

まず $(j,k) = (2,3)$ の場合を証明しよう．

この場合，(2.4) の左辺は

$$\epsilon_{i23}\epsilon_{iqr} = \epsilon_{123}\epsilon_{1qr} = \epsilon_{1qr} = \begin{cases} 1, & (q=2, r=3) \\ -1, & (q=3, r=2) \\ 0, & (\text{上の場合以外}) \end{cases} \tag{5.17}$$

であり，また (2.6) の右辺は

$$\delta_{2q}\delta_{3r} - \delta_{2r}\delta_{3q} = \begin{cases} 1, & (q=2, r=3) \\ -1, & (q=3, r=2) \\ 0, & (\text{上の場合以外}) \end{cases} \tag{5.18}$$

である．したがって，$(j,k) = (2,3)$ のとき (2.6) は成り立つ．

つぎに $(j,k) = (3,1)$ の場合を証明しよう．

この場合，(2.6) の左辺は

$$\epsilon_{i31}\epsilon_{iqr} = \epsilon_{231}\epsilon_{2qr} = \epsilon_{2qr} = \begin{cases} 1, & (q=3, r=1) \\ -1, & (q=1, r=3) \\ 0, & (\text{上の場合以外}) \end{cases} \tag{5.19}$$

であり，また (2.6) の右辺は

$$\delta_{3q}\delta_{1r} - \delta_{3r}\delta_{1q} = \begin{cases} 1, & (q=3, r=1) \\ -1, & (q=1, r=3) \\ 0, & (\text{上の場合以外}) \end{cases} \tag{5.20}$$

である．したがって，$(j,k) = (3,1)$ のときも (2.6) は成り立つ．

(2001.8.1) (2002.3.20 改訂) (2021.12.3 三訂)

参考文献

[1] 矢野 忠, 「Levi-Civita の記号の縮約」再々論, 研究と実践（愛数協）77 号 (2001.9) 16-20
（『数学散歩』（国土社，2005），『物理数学散歩』（国土社，2011）に所収）
矢野 忠, 「Levi-Civita の記号の縮約」再々論, 数学・物理通信 11 巻 7 号 (2021.12.9) 13-20

[2] 矢野 忠, テンソル解析の学習における問題点, 研究と実践（愛数協）18 号 (1985.3) 7-17

[3] 矢野 忠,「Levi-Civita の記号の縮約」再論, 研究と実践（愛数協）64 号 (1997.12) 2-10
（『数学散歩』（国土社，2005），『物理数学散歩』（国土社，2011）に所収）
矢野 忠, 「Levi-Civita の記号の縮約」再論 1, 数学・物理通信 14 巻 2 号 (2024.6.18) 2-9

[4] 矢野 忠, テンソル解析の学習における問題点 (改訂版), 研究と実践（愛数協）65 号 (1998.3) 2-17
（『数学散歩』（国土社，2005），『物理数学散歩』（国土社，2011）に所収）

[5] 矢野 忠, Levi-Civita の記号とベクトル解析，数学・物理通信 9 巻 9 号 (2020.1.9) 19-32

[6] 今井功,『流体力学』（前編）（裳華房, 1973）267-268

[7] エイチスン， ヘイ （藤井昭彦訳）『ゲージ理論入門』 II （第 2 版）（講談社, 1992）328-330

[8] 中山恒義,『物理数学』 (I) （裳華房, 2001）37-40

[9] Chung Wa Wong, *Introduction to Mathematical Physics, Methods and Concepts*, (Oxford Univ. Press, 1991) の訳本, （小林，近訳）『物理数学入門』 I – 線形代数とフーリエ級数 –（丸善, 1996）18-22

[10] ゴールドスタイン（瀬川, 矢野, 江沢訳),『古典力学』 第２版（上）（吉岡書店, 1983）225

「Levi-Civita の記号の縮約」再論 3

矢野　忠[1)]

The Contraction of Levi-Civita Symbols Revisited 3

Tadashi YANO

まえおき

まず「Levi-Civita の記号の縮約」についての私の探訪の歴史を述べておきたい．まずはじめに「テンソル解析の学習における問題点」 [1] が ある．つづいて，「Lvei-Civita の記号の縮約」再論シリーズ [2], [3] である．それに加えてベクトル代数・解析等の公式への応用として有用性を述べた「 Levi-Civita の記号とベクトル解析」がある [4].

1　はじめに

このエッセイは大筋では [2], [3] に連なる説明であるが，直接的には [5] の補足である．[5] では「Levi-Civita の記号の縮約」についての藤井昭彦さんの説明をそのはじまりの部分だけを述べて，詳しい説明をしなかったが，実は引用したその文献の中に詳しい説明が述べられていた [6]．それをこのエッセイでは紹介することを主眼とする．というのも，[5] で引用された [6] に述べられた内容を十分に説明しなかったのは重大な手落ちだったからである．これがこのエッセイを書く理由である．

2　藤井の説明

[6] の本の p.117 に

反対称テンソル $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ はテンソル ϵ_{ijk} の４次元的拡張で

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1, & \alpha\beta\gamma\delta \quad \text{が } 0, 1, 2, 3 \text{ の偶順列のとき} \\ -1, & \alpha\beta\gamma\delta \quad \text{が } 0, 1, 2, 3 \text{ の奇順列のとき} \\ 0, & \quad \text{２つ以上の指標が等しいとき} \end{cases} \tag{10.103}$$

で定義される[2)]．定義により

$$\epsilon_{0123} = +1 \tag{10.104a}$$

1)　元愛媛大学工学部

2)　式の番号は引用文献のままである．

であるが，一方

$$\epsilon^{0123} = -1 \tag{10.104b}$$

であることに注意せよ．また 2 個の ϵ テンソルを縮約した結果が必要である．3 次元の ϵ テンソルについては，可能な組み合わせをつくして，容易に

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \begin{vmatrix} \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} \end{vmatrix} \tag{10.105}$$

という結果が得られる．あるいは

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{kl}\delta_{jm} \tag{10.106}$$

と書いても同じである．4 次元の ϵ テンソルの縮約はその拡張であって

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta} = -2! \begin{vmatrix} \delta^\gamma_\alpha & \delta^\gamma_\beta \\ \delta^\delta_\alpha & \delta^\delta_\beta \end{vmatrix} \tag{10.107}$$

になることが示される（問題 10.3）．ここで負号は (10.104) に由来し，因子 2! は添字が 2 つ縮約されたことからきている[3)]．

ここで，p. 122-123 の（問題 10.3）について引用をしよう．

（問題 10.3）

10.3 (a) 次式

$$\epsilon_{12} = +1, \epsilon_{21} = -1, \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0 \tag{2.1}$$

で定義される 2 次元の反対称テンソルを考える．（必要があれば）すべての可能な組み合わせをあからさまに書き上げて

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{lm} = +1(\delta_{il}\epsilon_{jm} - \epsilon_{im}\epsilon_{jl}) \tag{2.2}$$

の結果を導け．これから

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{im} = \delta_{jm} \quad \text{および} \quad \epsilon_{ij}\epsilon_{ij} = 2$$

を証明せよ．2 次元では $\delta_{ii} = 2$ であることに注意せよ．

3) 上の (10.103) の表記を訳書から少し変更している．これについては付録 1 に説明を述べたので参照されたい．また (10.104b) についても付録 2 にその説明を述べておいたので，参照されたい．

(b) 前項の場合とまったく同じ考え方で，3 次元の反対称テンソル ϵ_{ijk} の積は

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

と書くことができる[4]．これから次の結果を証明せよ．

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 3!$$

(c) これらの結果を 4 次元 Lorentz テンソル $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ に拡張せよ．ただし，(Lorentz 空間は擬 Euclid 的だから）$\epsilon_{0123} = +1$ に対して $\epsilon^{0123} = -1$ になることに注意せよ．

これが問題 10.3 である．この解答は訳者の藤井昭彦（上智大学名誉教授）さんが [6] の pp. 328-330 に書いてある．これはかなり長いが，まずはそのまま引用しよう．注意等があれば，後で述べることにする[5]．

（問題 10.3 の解答）

(a) $\epsilon_{ij}\epsilon_{lm}$ は４階のテンソルであるから，2 階のテンソル $\delta_{il}, \delta_{im}, \delta_{jl}, \delta_{jm}$ の２つの積の線形結合として表せるはずである．ただし $(i,j),(l,m)$ に関してそれぞれ反対称でなくてはならないから，その組み合わせは制限される．添字の反対称性を考慮すると $\epsilon_{ij}\epsilon_{lm}$ はつぎの行列式に比例する．

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{lm} = a \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} \tag{2.3}$$

ただし，比例定数を a とおいた．係数を決めるためには特別な添字をとり，たとえば $i=1, j=2, l=1, m=2$ とおけば，$a=1$ であることがわかる．

$l=i$ とおいて縮約 (i について和をとる）すれば，

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{im} = (\delta_{ii}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{ji}) = 2\delta_{jm} - \delta_{jm} = \delta_{jm} \tag{2.4}$$

さらに $m=j$ とおいて縮約（m について和をとる）をすれば，

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} = \delta_{jj} = 2 \tag{2.5}$$

4) [1] にはこの式の直接的な導出について述べてある．

5) 記号の添字は引用にあたって変更してある．

(b) 上の議論を 3 次元に拡張する．$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}$ は $(i,j,k),(l,m,n)$ についてそれぞれ完全反対称であるから，未定係数 a を用いて

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = a\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \tag{2.6}$$

と書ける．$i=1,j=2,k=3,l=1,m=2,n=3$ とおいて両辺を比較すれば，$a=1$ を得る．

$l=i$ とおいて縮約すると $\sum_{i=1}^{3}\delta_{ii}=3$ だから

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} &= \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \\
&= \delta_{ii}\begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} - \delta_{ji}\begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} + \delta_{ki}\begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} \end{vmatrix} \\
&= 3\begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{km} & \delta_{kn} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} \end{vmatrix} \\
&= 3\begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \\
&= (3-1-1)\begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

さらに $m=j$ とおいて縮約すると

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = \begin{vmatrix} \delta_{jj} & \delta_{jn} \\ \delta_{kj} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = 3\delta_{kn} - \delta_{kn} = 2\delta_{kn} \tag{2.8}$$

さらに $n=k$ とおいて縮約すると

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 2\delta_{kk} = 2\cdot 3 = 3! \tag{2.9}$$

(c) 4 次元の擬 Euclid 空間に議論を拡張する．前と同じ理由で

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = a\begin{vmatrix} \delta^{\mu}_{\alpha} & \delta^{\nu}_{\alpha} & \delta^{\rho}_{\alpha} & \delta^{\sigma}_{\alpha} \\ \delta^{\mu}_{\beta} & \delta^{\nu}_{\beta} & \delta^{\rho}_{\beta} & \delta^{\sigma}_{\beta} \\ \delta^{\mu}_{\gamma} & \delta^{\nu}_{\gamma} & \delta^{\rho}_{\gamma} & \delta^{\sigma}_{\gamma} \\ \delta^{\mu}_{\delta} & \delta^{\nu}_{\delta} & \delta^{\rho}_{\delta} & \delta^{\sigma}_{\delta} \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

である．$\alpha=0,\beta=1,\gamma=2,\delta=3,\mu=0,\nu=1,\rho=2,\sigma=3$ とおいて両辺を比較すると，今度は

$$\epsilon_{0123}\epsilon^{0123}=-1=a \tag{2.11}$$

である．

$\mu=\alpha$ とおいて縮約すると

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma}=-\begin{vmatrix}\delta^\alpha_\alpha & \delta^\nu_\alpha & \delta^\rho_\alpha & \delta^\sigma_\alpha\\ \delta^\alpha_\beta & \delta^\nu_\beta & \delta^\rho_\beta & \delta^\sigma_\beta\\ \delta^\alpha_\gamma & \delta^\nu_\gamma & \delta^\rho_\gamma & \delta^\sigma_\gamma\\ \delta^\alpha_\delta & \delta^\nu_\delta & \delta^\rho_\delta & \delta^\sigma_\delta\end{vmatrix} \tag{2.12}$$

第１列で展開しながら α の和をとる．この行列式の $(1,1)$ 要素の余因子を D とおけば，

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma}&=-(4D-D-D-D)\\&=-D\\&=\begin{vmatrix}\delta^\nu_\beta & \delta^\rho_\beta & \delta^\sigma_\beta\\ \delta^\nu_\gamma & \delta^\rho_\gamma & \delta^\sigma_\gamma\\ \delta^\nu_\delta & \delta^\rho_\delta & \delta^\sigma_\delta\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{2.13}$$

さらに $\nu=\beta$ とおいて縮約すれば，同様に

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}&=\begin{vmatrix}\delta^\beta_\beta & \delta^\rho_\beta & \delta^\sigma_\beta\\ \delta^\beta_\gamma & \delta^\rho_\gamma & \delta^\sigma_\gamma\\ \delta^\beta_\delta & \delta^\rho_\delta & \delta^\sigma_\delta\end{vmatrix}\\&=-(4-1-1)\begin{vmatrix}\delta^\rho_\gamma & \delta^\sigma_\gamma\\ \delta^\rho_\delta & \delta^\sigma_\delta\end{vmatrix}\\&=-2\begin{vmatrix}\delta^\rho_\gamma & \delta^\sigma_\gamma\\ \delta^\rho_\delta & \delta^\sigma_\delta\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{2.14}$$

さらに，$\rho=\gamma$ とおいて縮約すれば，

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma}&=-2\begin{vmatrix}\delta^\gamma_\gamma & \delta^\sigma_\gamma\\ \delta^\gamma_\delta & \delta^\sigma_\delta\end{vmatrix}\\&=-2(4\delta^\sigma_\delta-\delta^\sigma_\gamma\delta^\gamma_\delta)\\&=-2\cdot 3\delta^\sigma_\delta\\&=-3!\delta^\sigma_\delta\end{aligned} \tag{2.15}$$

®ή ς = ο Π Κ ν˜ ΰ Ϟ χ "

= 3 = 3! 4 = 4! U k X R e V

j S ˜ “ t

ϰϰ Λ ξ ϩϭ ϯ ά ϫ υ ϫ ϫ Λ ή Φ Ν ϑ ζ υ ξ " Ï υ j Ў I ϯ υ ϩ φ ^ ζ ή ζ ‘ ά ϭ ς
ρ ϫ υ □ ς Κ Ϟ Κ Ϟ ρ ο Ï Ϟ ξ ₆ ξ φ ϰ ϭ Ϟ ϣ Ϭ Μ ς ρ κ ν Κ ϣ ‘ ¡ Π ϫ ¡ ϱ ζ ϰ ضر
υ ¸ ς δ Ϟ Σ Ạ F ΰ Κ Ĩ ξ ϖ ο ϱ ϭ Ϟ ζ ϭ Κ Κ υ ξ φ ρ Κ Ρ ο ◖ κ ν Κ ϣ Σ " ρ Ρ ρ Ρ
δ υ Ï ο Σ ^ ζ β ρ Κ υ φ ■ ϩ ξ Θ ϣ ‘

9 Ç å

9 X RÇ å Ry U R y X Rwy4 V† Ì

φ U R y X R ϫϭ j ή V ς ϫ ϫ ϫ Λ Ϟ ϣ ϑ Τ η κ ζ Ρ ς ή Ϟ ρ Κ Σ " υ Ύ ϫ δ ϭ ή ζ Φ
ρ Κ ζ ϱ ς " Ï υ ϩϭ R ξ ϩϭ ϫ ΰ ϣ Ï ο ς ή ζ ‘
U R y X R y j V = 1 υ ΰ X w υ ϩϭ ς φ ˘ 0123 Π Ϭ ï ˜ ο Κ Μ ϫ Σ ϫ κ ν Κ ζ ‘ ϯ ϩϭ
ϯ υ Θ Ạ ς. κ ν Ï υ ϩϭ ϩϭ ϫ ϫ ⌐ Λ ή ν Κ ϣ ‘ δ υ Σ ϩϭ Ρ ϣ F ΰ Κ ο – Ξ ζ Ρ ϭ ξ Θ ϣ ‘
˜ ϯ ο ϯ υ Θ˜ ο ή ν φ

0123 Π Ϭ ï ξ Σ 0123 υ ˜Α ϩ Ç υ Λ ˝ ς φ

= 1

ο Κ Μ Θ ξ Θ κ ζ Ϟ Μ ‘ θ ϟ κ ο ϫ υ ˜Ḥ ϩϭ α Ρ " δ Ϟ ο ς ẹ ỹ ρ ϩϭ ˜Ḥ ϫ ◖ Κ λ Ρ
ρ Ρ κ ζ ζ ϱ Ρ ς ή Ϟ ρ Κ ‘
ϩϭ ς " U R y X R y j P V ϭ k , υ = 1 υ ΰ X w ς ς ˘ 1023 Π Ϭ ï ˜ ο Κ Μ ϫ
Σ ϫ κ ν Κ ζ Σ " Ï υ ˙ ⌊ ς ⌐ Λ ή ζ ‘ Ï Ï ς
1023 Π Ϭ ï ξ Σ 0123 υ Ṁ ϩ Ç υ Λ ˝ ς φ

= 1

ο Κ Μ Θ ξ Θ Ϟ Μ ‘
ρ Π " ˜Α Λ ο Ṁ Λ φ ˜Α ϩ Ç ο Ṁ ϩ Ç ο ϩϭ í Ρ π Μ Ρ ο Κ Μ Ï ο ς ≠ ϖ ά Ϟ ζ ‘ ϖ κ
ζ Φ ϩϭ í ο φ Κ Ξ ρ Κ Ρ ς ή Ϟ ρ Κ Σ " Ï Ï ξ φ ϩϭ í Θ ς ▬ κ ν Κ ϣ ‘ Ï Ϟ φ 2p2M
T2`Kmi iBQM- Q// Tϫ2`Kmi iBQM Ḥ ς ΰ ο Τ ς T2`Kmi iBQM Ç