数学・物理通信

7巻1号　　2017年3月

編集　新関章三・矢野　忠

2017 年 3 月 18 日

目次(Contents)

超弦理論はなぜつぶれたのか

Why Has the Superstring Theory Collapsed?

中西　襄 [*1]

Noboru NAKANISHI [*2]

1　はじめに

この 30 年間素粒子物理学において，「究極理論の唯一の候補」という触れ込みで一世を風靡したタイタニック「超弦理論」（「超ひも理論」ともいう）は，ついに終焉を迎えたように思われる．人間に例えればすでに脳死の状態にあり，もう復活することは，少なくとも究極理論の候補としては，ありえないという状況であろう [*3]．あとは臓器移植，すなわち部分的に切り取った理論がほかでどの程度役に立つかを見るだけである．

筆者は 30 年前から，超弦理論は正しい物理学の基礎理論にはなりえないことを予見し，その批判を下記の論説に書いた [*4]：

「スーパーストリング病に関する所見」素粒子論研究 **72**, 345 (1986),

「“超弦理論”症候群」パリティ (丸善）1986 年 9 月号,

「超弦理論は物理になるか」日本物理学会誌 **48**, 44 (1993).

ここでは，新しい情報を取り入れながらそれらの主張をまとめて紹介したい．数学の方にもわかるように書いたつもりである．

超弦理論は，その名前が示すように，超対称性と弦理論とを統合したものである．超対称性は広義では超代数（物理では superalgebra，数学では graded algebra という）を対称性としてもつような理論である．ここで考えている超対称性は狭義のもので，ポアンカレ対称性（並進とローレンツ変換より成る時空対称性）のノントリヴィアルな拡張（indecomposable extension）を指す．広義の超対称性と区別するため，狭義のそれは通常 SUSY と記す．他方，弦理論は，通常の場の量子論の基本量が 1 個の時空点 x^μ のオペレータ値 (超) 関数であるのに対し，「弦」と称する 1 次元的に並ぶ時空点の集合（具体的には振動モードを記述するフーリエ級数）のオペレータ値 (超) 関数を基本量とする．これはハドロン [*5] の半現象論的模型として提起された双対共鳴模型を，作用積分から構成するために発明された理論であった．この弦理論を SUSY の対称性をもつように拡張し，重力をも含む究極理論の候補として登場したのが，超弦理論である．

[*1] 京都大学名誉教授

[*2] nbr-nak@trio.plala.or.jp

[*3] 現実の物理としてではなく，数学的なモデルとしての利用価値は残るかもしれないが.

[*4] この 3 篇の英訳（および補注）とそれへのコメントが http://www.math.columbia.edu/~woit/wordpress（P. Woit のブログ）の “Some Early Criticism of String Theory”, October 30, 2006 にある.

[*5] 強い相互作用をする粒子バリオン（核子と重核子）およびメゾン（中間子）の総称で，バリオンは 3 個のクォークの，メゾンはクォークと反クォークのそれぞれ複合粒子と考えられている.

以下，SUSY，弦理論，超弦理論を簡単に解説し，これらの理論がどうして物理として受け入れがたいのかを明らかにしよう．

2 SUSYについて

素粒子物理学の基礎理論である標準理論は，特殊相対論的共変性に基づく場の量子論の枠組みに基づいて定式化されている．その時空対称性はポアンカレ対称性であって，素粒子はポアンカレ代数の既約表現として 2 つの量子数（静止質量の 2 乗と本質的角運動量であるスピン）により特徴づけられる．時空に関係のない対称性を内部対称性という（標準理論では $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ *6 である．）．どういう内部対称性があるべきかを論理的に導くことができればうれしいので，ノントリヴィアルなポアンカレ代数の拡張が存在するかどうかが検討された．しかし，確率の正定値性（物理的 S 行列のユニタリー性）に矛盾しないリー代数は存在しないことが証明された．ただし，もし反交換関係をも許す超リー代数であれば，矛盾のない理論を具体的に構成することが可能であることもわかった．これを SUSY という．SUSY ではボソンとフェルミオンがつねに対になって存在する．これらを互いに「スーパー・パートナー」とよぶ．

SUSY は，既知の対称性の根拠づけには役立たなかったが，ほかのことで有用であると期待された．場の量子論では摂動論の高次項を計算すると紫外発散とよばれる無限大が現れるが，標準理論ではくりこみという処方により，無限大をすべて質量とか結合定数とかいうようなパラメータに押し込めて，見かけ上発散のない S 行列を書き下すことが可能になる．ただし当然その後遺症として，これらのパラメータを計算することは不可能である．ヒッグス粒子の質量補正はエネルギーの 2 乗のような形で発散し，エネルギー積分を重力の量子効果が効いてくるプランク・エネルギーのような巨大数でカットオフする（すなわち積分を有限範囲に限定する）ととんでもないでかい値になってしまう．ところが SUSY を導入すると，スーパー・パートナーからの寄与と相殺する．そのおかげでこのカットオフ依存性がエネルギーの対数になるので，ヒッグス粒子の質量を実験値と矛盾しない大きさにできると期待される．ただしこれはカットオフを入れた場合の話であって，SUSY がなければくりこみができないわけでも，SUSY があれば発散がすべてなくなるわけでもない *7．発散の仕方が穏やかになるというだけのことなのだが，それでも多くの素粒子論研究者が SUSY の美しさに大きな魅力を感じて，その存在は実験的に証明されるはずだと信じたのだった．

しかし，SUSY は最初からいかがわしい話だった．もし SUSY が厳密に成り立っておれば，すべての素粒子について質量が同じでスピンの値が 1/2 だけ異なるスーパー・パートナーが存在しなければならないが，もちろんそんなものはまったく実在しない．そこで，SUSY は自発的に破れた対称性であると考えられた．「対称性の自発的破れ」は標準理論の中の電弱理論を構成する基本的なメカニズムであるので，その可能性はもちろん考慮に値するものである．

*6 数学ではリー代数はドイツ文字で表されるが，物理ではリー群と同じ記号を流用する．

*7 素粒子論が専門でない物理屋の著書に，「SUSY を仮定しなければ標準理論の発散が除けない」とか，「SUSY がなければ重力との統一は不可能なことが証明されている」とかいうようなウソを平気で書いているものがあった．これは，SUSY の専門家による誇大広告が招いた誤解ではないだろうか．

自発的に破れた対称性とは，理論の出発点である作用積分（ラグランジアンの積分）では厳密に成立しているが，観測と直接結びつく量である物理的 S 行列では壊れているようなものである．数学的に言えば，場のオペレータ代数がもつ対称性で，状態ベクトル空間による表現の段階で破れるようなものである．通常，真空が対称性の生成子の固有状態になっていないとする．この場合，一般論の帰結として「南部・ゴールドストーン (NG) 粒子」とよばれる質量がゼロで，スピンが対称性の生成子のスピンと一致する粒子が存在しなければならない．SUSY の場合は質量ゼロ，スピン 1/2 の NG フェルミオンが存在しなければならないのだが，それは実在しない．この時点で SUSY は棄却されてしかるべきなのだった．しかし，電弱理論のカイラル対称性の自発的破れの場合に現れるスピンゼロの NG ボソンがヒッグス場の導入によって非物理的になったのを真似て，NG フェルミオンにも「超ヒッグス機構」が働いて非物理的になるのではないかと期待された．だがそのためには，SUSY はゲージ化されなければならない．SUSY をゲージ化したものは，通常「超重力理論 (SUGRA)」であると信じられている．あとで論ずるようにこの主張はじつはあまり正当とはいえないのだが，そこは目をつむって，超重力のおかげで NG フェルミオンが非物理的になり観測にかからなくなったものとしよう．しかし超重力は名前が示す通り重力理論であり，一般相対論すなわちアインシュタイン重力の拡張である．したがって，重力定数が極端に小さいからという理由で「素粒子物理学を考える時には重力の影響は一切無視してよい」という大原則は，もはや放棄しなければならないことになってしまう．つまり，標準理論の予言がこれほど実験とよく合っていることは，単なる僥倖に過ぎなかったということになるわけだ．これでは元も子もないのではないか．

自発的に破れた SUSY というのは，ポアンカレ代数の唯一の可能なノントリヴィアルな拡張ではない．唯一なのが証明されるのは，**自発的に破れていない対称性**に話を限った場合である (証明は物理的 S 行列で実現されている対称性に関するのものだから)．この点をごまかして，自発的に破れた SUSY までも特権的な対称性であるがごとく信じている人が多い．しかしそうではないことを示す具体的な反例（オペレータのレベルでポアンカレ代数の拡張となっているが現実には現れない対称性で，自発的に破れた SUSY 以外のもの）が作れるのである．

現実の素粒子の一覧表を見ても，これだけたくさんの素粒子があるのに，「SUSY が予言するスーパー・パートナーらしきもの」は 1 つも見つかっていない．筆者は以前から「自然は完全犯罪を目論まない」と主張している．もし SUSY が物理的に正しい対称性だったならば，スーパー・パートナーの片鱗が低いエネルギーで見つかっていそうなものだ．例えば，第 2 世代の素粒子であるミューオンが，第 1 世代の代表的な粒子であるパイオンよりも先に見つかったように，自然は隠し事をするわけがない．それなのに SUSY 教の信者は，加速器のエネルギーがもう少し上がれば必ずスーパー・パートナーが見つかるはずだと信じて疑わなかった．彼らは「あともう少しエネルギーが上がれば・・・」という同じ言い訳を何十年も言い続けてきたのである．しかし結局 CERN の巨大加速器 LHC の最近の実験結果は，**“SUSY is dead”**を宣告したといってよいであろう．

特殊相対論の枠内だけで話が閉じるものならば，SUSY，とくに自発的に破れていない SUSY は純理論的にみて確かに美しい対称性である．しかし重力まで考慮するならば，それは明らかに

不自然な対称性なのだ．一般相対論の枠組みではローレンツ変換は接空間（局所慣性系）での変換だから，それは真の時空対称性ではない．時空変換は一般座標変換であるから，スピノル表現は存在しないのだ．すなわち，スピン 1/2 という概念は，古典アインシュタイン重力とは相容れないものである [*8]．半奇数の角運動量を考えるには，量子論に行かなければならない．アインシュタイン重力は，一般座標変換が局所変換（任意関数を含む変換）なので，そのままでは量子化できない．ゲージ場の量子化と同様，ゲージ固定（座標条件の設定）という操作を導入して局所変換を BRS 化 [*9] することが必要である．この手続きに従って重力場を量子化すると，残り得る最大の時空変換は並進プラス一般**線形**変換である．すなわち重力場の量子論がもち得る時空対称性はアフィン代数である．x^μ の空間がアフィン空間であるのは，非常に自然であると筆者は信じている．なぜなら，量子重力場はオペレータであるから，時空計量ではありえない．また基礎理論である量子重力理論に，何の根拠もない背景時空を設定するのは極めて不合理である．したがって，x^μ がアフィン空間という非自明な計量も接続もない世界の住人であるのは，非常に自然だと考えられるのである．

さて，量子アインシュタイン重力の状態ベクトル空間による表現を考えると，必然的に一般線形代数は自発的に破れる．その生成子が作る行列の対称部分の破れに対応する NG ボソンは，質量ゼロ，スピン 2 の粒子で，重力子に他ならない．反対称部分は内部ローレンツ変換と組み合わさって，自発的に破れていない時空のローレンツ対称性を生む．これと時空並進とから素粒子物理学での時空対称性としてのポアンカレ代数が出来上がるのである．この機構は標準理論の中の電弱理論の対称性 $SU(2) \times U(1)$ が自発的に破れ，$SU(2)$ の中の $U(1)$ と最初からある $U(1)$ との特別な組み合わせである電磁対称性の $U(1)$ が破れずに生き残るのとそっくりである．一般相対論が提起された 20 世紀初頭に試みられた重力と電磁力の統一場理論が悉く失敗したのは，電磁対称性が作用積分に現れる第一義的な対称性ではなかったからである．時空対称性についてもこれと同様に，時空的ローレンツ代数は作用積分に現れる第一義的な対称性ではないわけだ．したがって，作用積分のレベルでポアンカレ代数を拡張した SUSY を導入しようとすることは，統一場理論の試みと同じく無駄な努力だったといえるであろう．

量子アインシュタイン重力との統合を考えるから SUSY と両立しないので，重力場は超重力で考えたら問題ないはずだという反論があるだろう．しかしこれもダメなのである．超重力はアインシュタイン重力を含む理論であり，それは上に述べたように，ローレンツ代数は時空対称性としてではなく，内部対称性として含まれているものだからである．だが，超重力の古典論については確かに SUSY と重力とを融合したものになっている．どうしてそれが可能になったかというと，基本場である四脚場が時空のテンソル添え字 (物理では「足」とよぶ) と内部ローレンツ変換の足の両方をもっているからである．すなわち，足をもつどんなテンソル場でも四脚場を乗じて縮約することにより，時空と内部を自由に行き来できるから，時空対称性と内部対称性の厳密な区別がつかなくなるのだ．ところが超重力の量子論では，そういう四脚場という局所量

[*8] 一般共変化されたディラック理論のディラック場は，スカラー場である．

[*9] 局所変換の無限小任意関数を「FP ゴースト」とよばれるフェルミオン的量子場に置き換え，「BRS」とよばれる広義超対称性をもつようにすることを指す．量子論では，人間の恣意に依存する「任意」関数は許されない．

（x^μ の関数）を用いた変換は一般には許されなくなってしまう．例えば SUSY の代数の生成子はグローバルな量（x^μ 依存性のない量）なので，その足を自由に入れ替えることはできないのである．したがって，ポアンカレ対称性は時空対称性だか内部対称性だかよくわからないものになる．それゆえそれを拡張した SUSY では，その基本的反交換関係における足のミスマッチが生ずる．すなわち，「スーパー・パートナーへ移す変換の生成子とその共役生成子との反交換子が並進生成子になる」という式において，左辺は時空の足を持たず，右辺は時空の足を持つ．この不整合は，四脚場によるガンマ行列の一般共変化が使えないので，救いようがない．つまり，超重力の量子論は SUSY の自然な拡張とはいえない．SUSY と量子重力は根本的に相性が悪いのである．

3　弦理論の概略

弦理論はもともと素粒子物理学の半現象論的モデルである双対共鳴模型を，ラグランジアン形式で再現するものとして導入されたものである．

強い相互作用をするハドロンの量子論では，結合定数の冪展開である摂動論は近似が悪くて使い物にならない．しかし共変的摂動論で開発されたファインマン・ダイアグラムの方法は，S 行列の解析性を論ずるのに便利な手段を与えた．ファインマン・ダイアグラムの外線は，散乱過程における初期状態と終状態にある粒子に対応するのだが，その割り振りをどのようにするか（この分割の仕方を「チャンネル」という）によっていろいろな散乱過程を表すことになる．これを数学的にいうと，1 つの多変数解析関数の異なる実軸上の境界値が，いろいろなチャンネルの散乱振幅（その絶対値の 2 乗が，対応する散乱過程の起こる確率密度になる）を与えることになる．ラグランジアンから出発する通常の理論構成をやめて，S 行列の解析性から理論を構成しようというアプローチを「解析的 S 行列理論」という．特定のチャンネルでは，独立変数にはエネルギーとか散乱角とかが選ばれるが，チャンネルを一括して考える解析関数の独立変数としては，通常 s とか t とかで記されるローレンツ不変量（エネルギーの 2 乗から運動量の 2 乗を引いたもの）が使われ，系のエネルギーに対応する変数が s であるチャンネルは，「s チャンネル」などとよばれる．

解析的 S 行列理論では，粒子は素粒子か複合粒子かの区別なく，すべて極（観測にかかる粒子は留数が正の単純極）に対応する [*10]．量子論では保存量である角運動量 l は量子化されて，整数値 [*11] のみをとるが，それでは解析性を論ずるのに不便なので，それを複素数に拡張した角運動量に関する解析関数を考える．複素角運動量 l の解析関数の極の位置は s に依存するので，それを $l = \alpha(s)$ と書き，「レッジェ軌跡」という．現実に観測される粒子はもちろん角運動量が整数値だから，$\alpha(s)$ が整数のところに粒子（メゾン）[*12] があることになる．実験値と比べると，レッジェ軌跡はほとんど線形になっていて，$\alpha(s) = \alpha_0 + \alpha' s$ のように近似できることがわかっ

[*10] ラグランジアン形式の理論では，ラグランジアンの中にそれの量子場があるのが素粒子で，ダイナミックスの結果現れるのが複合粒子である．

[*11] これはボソン，すなわちメゾンの場合で，フェルミオン，すなわちバリオンに対しては半奇数値になる．

[*12] メゾンの多くは不安定，すなわち共鳴状態だが，この場合極は実軸からちょっとそれたところにある．

た．そして勾配 α' は多くのレッジェ軌跡につきほぼ共通な正の数である．

s チャンネルの散乱角のコサインと 1 次関係にある変数 t をエネルギー変数としてもつ t チャンネル（「交差チャンネル」という）で考えると，散乱振幅の高エネルギー漸近形は実験的に $t^{\alpha(s)}$ $(s \leqq 0)$ で与えられるように見えた．このように，あるチャンネルの粒子のタワーとそれに交差するチャンネルの高エネルギー漸近形が同じレッジェ軌跡で支配されることを「双対性」という．場の量子論の基本的性質から高エネルギー漸近形は，log 因子を除いて t の 1 乗より速く増大できないこと（「フロワサー・マルタン限界」という）が証明されるので，$\alpha_0 \leqq 1$ であることが帰結される．しかも実験を再現するためには，$\alpha_0 = 1$ を実現するレッジェ軌跡が少なくとも 1 つ存在しなければならない．そうすると，これらの要件をすべて正直に満たすようにすれば，レッジェ軌跡が $s < 0$ のところで s 軸と交わる．すなわち角運動量（スピン）がゼロの「タキオン」[*13] が存在することになり，真空が不安定になるので許されない．もちろんこの困難は，理論と実験データをまぜこぜにした推論の破綻を示しているだけであるが．

レッジェ軌跡の線形性と双対性を簡単な関数で実現することが可能であることがわかった．これを「双対共鳴模型」という．外線の総数を N とすると，散乱が実際に起こるのは最小限 2 体 → 2 体であるから，$N \geqq 4$ である．$N = 4$ の最も簡単な例は，オイラーのベータ関数を使って，

$$B(-\alpha(s), -\alpha(t)) = \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))} = \int_0^1 dx\, x^{-\alpha(s)-1}(1-x)^{-\alpha(t)-1}$$

と書くことができる（「ヴェネチアーノ振幅」という）[*14]．一般の N については，$N-3$ 重のパラメータ積分を使って構成できる．それは，ファインマン・ダイアグラムで解釈すると樹木グラフを考えることに相当する．グラフの切り張りのようなことをやって，これをさらにループのあるグラフに相当するものへ拡張できる．

双対共鳴模型は，実験との比較ではかなりいい線をいった．しかしその理論構成はあまりにも曲芸的であった．それでラグランジアン形式に回帰して，理論をもっと標準的な方法で構成できないものかが考えられた．その結果見つけられたのが，弦理論（より正確に言えば，「ボソン弦理論」）である．メゾンはクォークと反クォークの複合粒子であるが，両者をいくら強い力で引き離そうとしても，クォークと反クォークとを単体で取り出すことはできない．それは直観的には，結びつける力線が広がらずに線状に伸びるからだと解釈された．この力線を弦（もしくは「ひも」）と思うと [*15]，弦の量子論になるのである．しかし，この「見てきた」ような解釈は，バリオンには通用しない．ボソン弦にフェルミオン弦をつけ加えたとしても，バリオンは 3 つのクォークから成るので，それらをひもの端点だとするという解釈はどうしても無理だ．双対共鳴模型はまた，上述のタキオンの困難もある．そして何よりも実験結果は，より理論的にすっきり定式化されている $SU(3)$ ゲージ場の量子論に基づく「量子色力学」に軍配をあげたのである．結局，双対共鳴模型ないしボソン弦理論は，物理としては完全に棄却されることとなった．

[*13] いわゆる超光速粒子である．相対論には矛盾しないとされるが，量子化はうまくいかない．

[*14] 正しくは，$N = 4$ では 3 つのチャンネルがあるので，3 つのベータ関数を足した形になる．

[*15] 任意の樹木グラフは，その各点を有限の長さのひもに置き換えると，トポロジカルに円盤になる．これを複素平面上で考えて，円周上に N 個の複素変数をとり，それらの差の複比を上記のパラメータ積分の積分変数に同定すると，双対共鳴模型が見事に再現される．3 つの余分の自由度は，複素平面上で円を決定する自由度に相当する．

とは言っても，ボソン弦理論の構成は数学的に大変興味あるものである．時空間で考えると，点粒子は時間的な方向に曲線を描く．弦であるとそれは曲面になる．曲面を表す座標系の選択はまったく自由とすると，一般座標変換が許されることになる．つまり，2 次元の一般相対論のようなものだ．ただし，2 次元ではリッチ・テンソルはスカラー曲率に比例するので，アインシュタイン・テンソルは恒等的にゼロになる．時空間が D 次元ミンコフスキー空間であるとすると，その各座標は質量ゼロの 2 次元スカラー場のようなものになる．これを量子化すれば *16，物質場として D 個の質量ゼロのスカラー場が存在する 2 次元量子重力理論になる．しかし，ゲージ固定を正しく行った理論で計算すると，量子アインシュタイン方程式（その左辺はゲージ固定に由来する項のみになる）は一般に「アノーマリー（量子異常）」*17 とよばれる矛盾が現れる．ボソン弦，すなわち 2 次元量子重力では，通常，アノーマリー *18 は $D = 26$ のときに限って消失するとされる．これを「臨界次元」という．臨界次元が 4 次元でなく，26 次元であるということは，ボソン弦理論が物理ではないことを如実に示すものといえる．さらに詳しく検討すると，臨界次元の存在自体がゲージ固定の仕方に無縁ではないことがわかった．座標条件が光錐ゲージやコンフォーマル・ゲージのように微分演算子を含まないゲージ固定ならばよいが，微分演算子を含む共変ゲージ（ド・ドンデア条件）では D をどのように選んでもこのアノーマリーを消去することができないのである *19．

4 超弦理論の困難

廃棄された弦理論をリサイクルし，強い相互作用の理論という解釈から決別して究極理論の候補として再登場させたのが，超弦理論である．新しい展望のカギとなったのが，SUSY のような超対称性であった．超対称性があると，ボソン弦理論で頭痛の種だったタキオンが消失するのである．また，端点に物理的意味がなければ，2 つの弦の両端がそれぞれくっついてできる閉じた弦も考慮しなければならないが，その閉弦から $\alpha_0 = 2$ のレッジェ軌跡が得られる．ということは，質量がゼロでスピンが 2 の粒子が存在するということである．それは重力子に違いないと考えられた．

量子重力を特徴づける長さを「プランクの長さ」というが，これは自然単位（光速度 c とプランク定数 h の $1/2\pi$ 倍の $\hbar$ を 1 とする単位系）での重力定数の平方根であり，核力の到達距離よりも 20 桁も小さい．超弦理論はこのプランクの長さでの量子論で，量子重力をも含む究極理論のはずだということになった．もちろんこのような飛躍を多くの人が納得するためには，いくつ

*16 弦の長さが有限という情報は，境界条件の設定で取り込む．

*17 アノーマリーと自発的対称性の破れの違いを説明しておこう．両方とも作用積分のレベルでは存在する対称性が，物理的 S 行列のレベルで失われる現象である．自発的対称性の破れは，状態ベクトル空間での表現において，真空がその対称性の生成子の固有状態になっていないという状況のことである．これに対しアノーマリーは，厳密な表現自体が作れないという状況である．したがって，アノーマリーは特定の対称性に固有のものというより，場の方程式の表現のコンシステンシーに関する問題（「場の方程式アノーマリー」という）と考えたほうが適切である．じっさい，特定の対称性生成子のアノーマリーは消去することが可能だが，もぐらたたきのごとく，そのときは必ずほかの対称性生成子にアノーマリーが現れるのである．

*18 このアノーマリーは「コンフォーマル・アノーマリー」とよばれる．

*19 ただし，共変的摂動論で計算すると $D = 26$ が出せるという論文もあるが，これはコンフォーマル・アノーマリーの摂動論的定義自体に不定性があることを看過している．

もの「奇跡」が起こることが必要であったが.

次元解析から明らかなように，レッジェ軌跡の勾配 α' はプランクの長さの 2 乗ということになり，実現可能な大きさのエネルギー範囲では，レッジェ軌跡は s 軸にほぼ平行になる．したがってレッジェ軌跡が直線 $[l = 整数]$ と交わるのは，実質上 1 点だけとなるわけだ．つまり弦とはいっても事実上基本振動モードのみが実現するのだから，粒子のタワーというよりほとんど粒子そのものだ．じっさい，$\alpha' \to 0$ の極限では，超弦理論は超重力になると考えられる．

ボソン弦理論で 26 次元だった臨界次元は，超弦理論では 10 次元になる．だいぶんましになったとはいえ，4 次元にはならない．しかしここは開き直って，余分の 6 次元はかつてカルーツァ・クラインの 5 次元統一場理論で仮定されたように，プランク・スケールにまで小さくなったと仮定する．そうすると，この 6 次元空間は内部自由度のように見えるはずだから，標準理論に現れるいろいろな素粒子を統一的に記述できる可能性がでてくる．災いを転じて福にしようという考えである．

2 節で述べたように，場の量子論では一般に発散の困難があるが，標準理論は摂動論でくりこみという処方により観測可能量から発散を消し去ることに成功した．しかしこれを安直に量子アインシュタイン重力にまで拡張すると，くりこみが不可能であることがわかった．そして摂動計算ができない量子アインシュタイン重力は予言能力がないので，「物理ではない」とまで言われた（この議論はじつは**正しくない**．*20）．さらにそれは，量子アインシュタイン重力以外の量子重力理論をやりたい人（たとえば超弦理論の信奉者）が，レビュー論文や解説記事のはじめに書く常套句として使われた．

紫外発散は素粒子間距離が無限に小さいところから寄与が際限なく大きく効くことから生ずるものと考えられるので，素粒子が広がった構造を持てばこの困難を解消できるのではないかという期待は，昔から繰り返し述べられてきた．しかしながら，相対論的不変性の要請を満たすコンシステントな理論を作る試みは悉く失敗した．唯一の例外は，1 次元的な広がりのある場合，すなわち柔軟なひも状の場合である．この意味で，弦理論には発散の困難を解決する可能性があるのではないかと期待されたのである．そしてじっさい，超弦理論で摂動論的計算を行うと，発散がないことが証明されたと主張された．

超対称性のもとでは，スピン 1/2 をもつワイル場 *21 の登場は必然的になる．ワイル場があると，通常の場の量子論の枠内で，ただし次元数だけは 4 でなく $4n + 2\,(n = 0, 1, 2, \cdots)$ のときに，「重力アノーマリー」が存在するということが主張された．$n = 2$ のときに 10 次元になるので，超弦理論でも重力アノーマリーが存在することが予想されたが，内部ゲージ対称性として 496 個の生成子をもつ $SO(32)$ もしくは $E_8 \times E_8$ があれば，それが消失するという奇跡が起きた．しかもこれらのリー代数は，標準理論の内部対称性 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を含む単純リー代数 $SU(5)$ または $SO(10)$ *22 を含むのに十分である．

---

*20 重力場の量子論に摂動論を適用しようとすると，第 0 近似として特定の背景時空計量を仮定しなければならない．しかしこれは誤りで，正しい第 0 近似は時空計量のような可換量ではなく，オペレータ（の表現）なのである．したがって，摂動論が使えると仮定した議論では，量子アインシュタイン重力を否定することはできない．

*21 質量がゼロのディラック場は右巻きと左巻きの 2 つのワイル場に分離する．

*22 これらの対称性に基づく理論は「大統一理論」とよばれ，陽子が崩壊することを予言する．しかしこれらの対称性

以上のようなことから，超弦理論が重力をも含む素粒子論の究極理論の候補になるのではないかと，多くの人が期待を寄せるようになったのである．超弦理論の流行は 1985 年ころからだが，その前にカルーツァ・クライン理論の拡張やカルーツァ・クライン超重力の流行があり，それらが失敗した時点で現れたタイミングの良さと，それらの流行により高次元時空を導入することに対する心理的抵抗が著しく弱まっていたことが，超弦理論の理論の流行を後押ししたといえる．その後，1990 年代前半には流行は下火となるが，1995 年ごろから $p+1$ 次元時空多様体のような「Dp ブレイン」なる概念とか，たんなる希望的観測に過ぎない 11 次元時空の「M 理論」とかが導入されて，流行は再燃した．

プランクの長さの（自然単位での）逆数がプランク・エネルギーであるが，プランク・エネルギーは現在の巨大加速器を使って到達可能なエネルギーより 10 数桁も大きい．だから，量子重力プロパーな現象を実験的に検証することは実際問題として不可能であるといってよい．したがって超弦理論は実験的な検証ができない理論である．そのような理論を構築するときは，根拠の乏しい仮説は避け，基本的な第一原理やすでに確立した理論との整合性を尊重して構成されなければならない．ところが，超弦理論の土台となっているのは，基本原理との論理的な結びつきも，実験的支持もまったくない仮説，仮説，仮説のオンパレードである．超弦理論の基礎がどれだけ怪しげなものかを次に見ていこう．

最大の難点は，何と言っても時空が 4 次元でなく，10 次元だということだ．6 次元の余剰次元はプランク・スケールにまで小さくまるまって，実質上見えなくなっているのだと思えという純然たるつじつま合わせのための無責任な仮説である．どんな機構でそんなことが起こるのか，またなぜ 6 次元が選ばれるのか，論理的にまったく不可解である．が，百歩譲って余剰 6 次元の空間がまるまったという仮定を認めたとしよう．そしてこんな超超微小スケールにおいても幾何学的な命題が物理として意味があると仮定するのを容認したとしよう．一般相対論的な考察からして，それは物理的 4 次元時空の各点に 6 次元の空間が付随したバンドル的構造になるであろう．この 6 次元空間の構造が各点でまったく同じでなければならない理由は見いだせない．4 次元時空と極微の 6 次元コンパクト空間の直積のような 10 次元空間になると仮定するのは，どう考えてもあまりにも都合が良過ぎると思われる．

他方，或る意味で**余剰次元が存在しないことはすでに立証されている** [*23]．じっさい，水星の近日点移動の観測値は，4 次元の一般相対論の計算結果と高い精度で一致しているのである．これにカルーツァ・クライン的なコンパクト空間を付け加えたら，計算結果と観測値との不一致は観測誤差を大きく上回る．このような巨視的現象から超超ミクロのプランク・スケールでのことがわかるはずはないと，直観的に期待されるかもしれない．しかし，アインシュタイン方程式は非線形微分方程式なので，どんなに小さいスケールでもそれがゼロでなければ，ゼロの場合と数学的に明白に異なる結果を生むのである．つまり物理と数学における微小量の意味の食い違いだ．超弦理論でも臨界次元を導くときには，どんなに微小なサイズであっても精確にゼロでなければ，次元の存在としては巨視的なサイズと同等であるという数学的立場で考えている．それな

から導かれる寿命での陽子崩壊は，実験的に否定されている．

*23 「余次元は物理として意味があるだろうか」素粒子論研究電子版 **6-1** (2010) 参照．

のに観測されない理由の説明となると，非常に微小ならばゼロとみなしてよいという物理的立場をとる．このような勝手なご都合主義を基礎にする理論が，正しい物理であるはずがないであろう．

とにかく超弦理論では，基底状態で余剰次元がコンパクト化すると仮定しなければならない [*24]．そのようなものを論理的に導けないものだから，いろんな宇宙の可能性があるのだと考える．現宇宙だけが実現したのではなく，人間が存在しえない宇宙には観測者がいないだけだという，いわゆる「人間原理」までもち出してごまかそうとする．これでは何も説明したことにならず，たんなる科学精神の放棄にほかならない．

2 次元量子重力による定式は，いわば 1 粒子問題に相当する．相互作用まできちんと入れるには，オペレータになった時空座標の関数である量子場を導入しなければならない．つまり超弦の場の量子論を定式化することが必要である．これはローレンツ共変性を諦めれば可能のようだが，共変性を壊さないようにすると，作用の伝達の非局所性問題が困難を引き起こし，うまくいかないようだ．とにかく，超弦理論はまともな基礎形式がない，宙ぶらりん理論である．とくに超弦理論の帰結である質量ゼロ，スピン 2 の粒子が本当に重力子だという証拠がない．時空としては手で背景時空の存在が仮定されているので，この「重力子」と時空計量との結びつきが不明なのだ．だいたい，「究極理論」を名乗る理論が，特定の計量構造をもつ背景時空の存在を頭から仮定するのは納得しがたい．重力子の存在と時空の計量構造は，量子アインシュタイン重力で見られたように [*25]，理論から同時に導かれるべきものであろう．

超弦理論の最大のセールスポイントである発散の困難解消の証明も，どうやら眉唾のようだ [*26]．詳しいことはよくわからないが，どのみち証明は摂動論で行われるのだから，余剰 6 次元はコンパクト化しておらず，本物ではありえない．さらに，証明はミンコフスキー空間での積分をユークリッド空間でのそれにすり替えて行われる（「ウィック回転」とよばれる）ようだ．前節のパラメータ積分を見てわかるように，被積分関数の因子は，係数を除き a^s $(a = (1/x)^{\alpha'} > 1)$ のような恰好をしている．ここに $s = p_\mu p^\mu = p_0^2 - \boldsymbol{p}^2$ である．これを p_μ について積分すると，p_0 に関する積分は強烈に発散する．ところが，ユークリディアンにして p_0^2 の符号をマイナスにすると，すべてがガウス積分になってすごく収束性が良くなる．したがって問題はウィック回転の正当性である．「回転」というのは積分路を実軸から虚軸にもっていくことだが，それがコーシーの定理で正当化できるためには，解析接続ができることと，無限遠の積分路からの寄与が落ちることが必要である．しかし後者の不成立は明らかだ．そこで，定式化を最初からユークリディアンで行うことになる．この場合積分されないベクトル変数もすべてユークリディアンになる．こういう解析接続を行った場合，解析接続の一意性により関数等式はすべて保たれるが，不等式は壊れる．確率の正値性は不等式だから，確率解釈ができなくなるだろう．どのみち絶対に

[*24] 我々の時空は D_3 ブレインだとする仮説については前脚注の文献参照．

[*25] 2 節で述べたが，より詳しくは，「素粒子の理論はなぜローレンツ不変なのか」素粒子論研究電子版 **15-3** (2012) 参照．

[*26] これについては L. Smolin がその著書 “The Troubles with Physics”(2006) の p.279-p.282 で状況を解説している．彼が超弦理論屋に超弦理論の有限性の証明について聞くと，ちゃんと答えない人が多いが，答えた人は必ず S. Mandelstam の論文を引用する．しかし，その証明が完全であるとは，Mandelstam 当人を含めて誰も保証できないらしい．発散が生ずる 1 つの可能性について，その不存在を証明しただけということのようである．

実験との比較は行えないのだから，確率が負になっても平気なのかもしれないが.

超弦理論流行の契機となった重力アノーマリーの存在についても疑義がある．この議論の基礎となった 2 次元重力場の量子論を詳しく検討してみると，じつは「時間順序積」の定義に関する誤解が原因であることがわかった．場の量子論の計算では，しばしば量子場のような時空変数のオペレータ値関数の積の真空期待値が重要になる．オペレータの積を時間順序ごとに分け，そのそれぞれで素直に時間順序に従って積を作って（ただしフェルミオン場同士の順序入れ替えから生ずる符号因子は無視して）足し上げたものを「T 積」という．正準量子場同士は同時刻で可換だから，それらの T 積は一般にローレンツ共変になる．しかし時空について微分した量については，T 積の共変性は破れてしまう．そこで共変性を保たせるために量子場の T 積をこしらえてから時空微分を行う．このような時間順序積を「T*積」という．ハミルトニアン形式（正準理論で使われる）では T 積が現れ，ラグランジアン形式（ファインマン理論で使われる）では T*積が現れる．考えるオペレータがすでに量子場の時間微分を含んでいると，一般にその T 積と T*積は一致しない [*27]．重力アノーマリーで考えるのは，2 次元ワイル場に関するエネルギー・運動量テンソル（の積の真空期待値）であるが，それは必然的に時間微分を含んでいる．したがって，この場合 2 つの時間順序積は当然一致しない．この T 積と T*積の不一致が，両者の混同により重力アノーマリー（エネルギー・運動量保存則の破れ）と誤認されたのであった．じっさい 2 次元の量子重力では，理論のコンシステンシーに係わる重力アノーマリーは存在しないことが示せる [*28].

5　おわりに

こうして見ていくと，超弦理論は軟弱な地盤の上に基礎工事抜きで建て増しを繰り返した豪華マンションのようなものであった．倒壊するのは何の不思議もない．不思議なのはむしろ，他人の忠告を無視してそのようなマンションにたくさんの人が喜んで住もうとしたことである．超弦理論屋の弁解は「超弦は “The only game in town”だった」ということだそうだ [*29]．「ほかにやることがなかったのさ」とでもいうことなのだろうか.

The only Game in Town (K. Vonnegut の短編) [*30]：

A guy with the gambling sickness loses his shirt every night in a poker game. Somebody tells him that the game is crooked, rigged to send him to the poorhouse. And he says, haggardly, I know, I know. But it's the only game in town.

[*27] たとえば場の方程式を $\Phi = 0$ と書くとき，Φ を 1 因子として含む T 積はつねにゼロだが，Φ は時間微分を含んでいるので T*積はゼロにはならない．ネーターの定理の証明には場の方程式を使うので，T*積についてはネーターの定理が破れたかのように見える.

[*28] 詳しくは, M. Abe and N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **115**, 1151 (2006) 参照．なお，重力アノーマリーの定義そのものに関する異論に対しては，「旧人類と新人類の重力アノーマリー」素粒子論研究 **113**, 76 (2006) で議論した.（ここの「新人類」とは，「量子化とは経路積分することだ」と信じている人たちのことである.）

[*29] 有名な超弦理論批判の書 “Not Even Wrong”(2006) の著者 P. Woit の記述による.

[*30] B. Schroer, *String theory and the crisis in particle physics*, special volume of I. J. M. P. D (2006) よりの孫引き.

量子力学における周期ポテンシャル問題 (4)

世戸 憲治 *

A Periodic Potential Problem in Quantum Mechanics (4)

Kenji SETO*

1 はじめに

これまでに，量子力学における周期ポテンシャル問題として，デルタ関数が周期的に並んだもの，Kronig-Penney モデルと呼ばれる周期的な矩形波型のもの，1 次式が周期的に並んだ鋸歯状のものの 3 種について述べてきた．ここでは 4 番目のものとして，2 次式が周期的に並んだものを扱う．すなわち，1 次元の Schrödinger 方程式

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\Big]\Psi=E\Psi \tag{1.1}$$

において，ポテンシャル $V(x)$ が周期 2ℓ の周期関数 $V(x+2\ell)=V(x)$ で，$-\ell\le x<\ell$ の範囲で

$$V(x)=V_0\Big(\frac{x}{\ell}\Big)^2 \tag{1.2}$$

と定義された場合を解析する．ここに，V_0 はエネルギーの次元を持つ正定数とする．

ここでは，以下の数式簡素化のため，座標 x, および，ポテンシャルの大きさ V_0, エネルギー E を無次元化し，

$$\frac{x}{\ell}\ \to\ x,\qquad \frac{2m\ell^2}{\hbar^2}V_0\ \to\ V_0,\qquad \frac{2m\ell^2}{\hbar^2}E\ \to\ E \tag{1.3}$$

と改めて置き直すことにする．この置き換えで方程式は,

$$\Big[\frac{d^2}{dx^2}+E-V(x)\Big]\Psi=0 \tag{1.4}$$

となり，ポテンシャル $V(x)$ は周期 2 の周期関数 $V(x+2)=V(x)$ で，$-1\le x<1$ の範囲で

$$V(x)=V_0x^2 \tag{1.5}$$

となる.

2 方程式の解法

この方程式を解きやすくするため，定数 μ を

$$\mu=(4V_0)^{1/4} \tag{2.1}$$

* 北海学園大学名誉教授 E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

と導入し，これを用いて，変数 x から z に，また，エネルギー E から κ に，

$$z = \mu x, \qquad \kappa = \frac{E}{\mu^2} - \frac{1}{2} \tag{2.2}$$

と変換すると，$-1 \le x < 1$ での方程式は，

$$\Big[\frac{d^2}{dz^2} + \kappa + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\Big]\varPsi = 0 \tag{2.3}$$

となる．これは，Weber の微分方程式と呼ばれるもので，その解は，放物柱関数 (Weber 関数) $D_\kappa(z)$ であり，これは合流型超幾何関数 ${}_1F_1$ を用いて，

$$D_\kappa(z) = 2^{\kappa/2}\sqrt{\pi}\,e^{-z^2/4}\Big[\frac{1}{\varGamma((1-\kappa)/2)}{}_1F_1\Big(-\frac{\kappa}{2},\ \frac{1}{2};\ \frac{z^2}{2}\Big) - \frac{\sqrt{2}\,z}{\varGamma(-\kappa/2)}{}_1F_1\Big(\frac{1-\kappa}{2},\ \frac{3}{2};\ \frac{z^2}{2}\Big)\Big] \tag{2.4}$$

と定義される [*1]．この Weber 関数は Hermite の多項式 $H_n(z)$ を拡張したもので，κ が非負整数 n のときは，$D_n(z) = e^{-z^2/4}H_n(z)$ という関係で結ばれる．しかし，ここでは周期ポテンシャルの問題を扱っているので，Hermite 多項式との関係は，特に役立つものではない．

Weber の微分方程式のもう 1 つの独立解は，

$$D_{-\kappa-1}(iz) = 2^{-(\kappa+1)/2}\sqrt{\pi}\,e^{z^2/4}\Big[\frac{1}{\varGamma((\kappa+2)/2)}{}_1F_1\Big(\frac{\kappa+1}{2},\ \frac{1}{2};\ -\frac{z^2}{2}\Big) - \frac{\sqrt{2}\,iz}{\varGamma((\kappa+1)/2)}{}_1F_1\Big(\frac{\kappa+2}{2},\ \frac{3}{2};\ -\frac{z^2}{2}\Big)\Big] \tag{2.5}$$

であるが，ここでは，Floquet の定理を用いる都合上，実関数となる解を求める必要がある．そこで，(2.3) 式は実係数の方程式なので，この式の実部，虚部を，係数は取り除いて，それぞれ，

$$\begin{aligned} S_1(z) =& e^{z^2/4}{}_1F_1\Big(\frac{\kappa+1}{2},\ \frac{1}{2};\ -\frac{z^2}{2}\Big) \\ S_2(z) =& z e^{z^2/4}{}_1F_1\Big(\frac{\kappa+2}{2},\ \frac{3}{2};\ -\frac{z^2}{2}\Big) \end{aligned} \tag{2.6}$$

と定義し，これらの解を，方程式 (2.3) の 2 個の独立解とする [*2]．ここで，$S_1(z)$ は偶関数，$S_2(z)$ は奇関数となることに注意する．さらに，この S_1，S_2 から作られる Wronskian

$$W(z) = S_1(z)S_2'(z) - S_1'(z)S_2(z) \tag{2.7}$$

を求めておく．ここで，プライムは導関数を意味する．これを z で微分すると，S_1，S_2 が方程式 (2.3) を満たすことからゼロとなるので，この Wronskian は定数である．したがって，$z=0$ で見積もると，

$$W(z) \equiv 1 \tag{2.8}$$

となる．

ここまで準備したうえで元の方程式 (1.4) の範囲 $-1 \le x < 1$ での一般解を，A，B を任意定数として，

$$\varPsi(x) = AS_1(\mu x) + BS_2(\mu x) \tag{2.9}$$

[*1] 「数学公式 3」(岩波全書) p.75-78，この公式集での文字 λ を，ここでは，前論文との関連性から，すべて，κ と記すことにした．

[*2] 合流型超幾何関数に関する Kummer の変換式 (前掲 p.67) ${}_1F_1(\alpha,\gamma;z) = e^z{}_1F_1(\gamma-\alpha,\gamma;-z)$ を用いると，ここで定義した関数 S_1，S_2 は (2.4) 式で大括弧をはずしたときの 1 項目，2 項目と定数係数を除いて同じものであることがわかる．

とおく．ポテンシャルが周期的であっても波動関数がそのまま周期的になるわけではない．Floquet の定理によると，波動関数は，周期が 1 つ増えるごとに元の波動関数に，伝播数と呼ばれる定数 K $(0 \le K \le \pi)$ を用いた位相 e^{iK} あるいは e^{-iK} を付けたものが次の周期の波動関数になることが知られている．したがって，範囲 $1 \le x < 3$ での波動関数は

$$\Psi(x) = e^{iK}\big[AS_1\big(\mu(x-2)\big) + BS_2\big(\mu(x-2)\big)\big], \quad \text{or} \quad \Psi(x) = e^{-iK}\big[AS_1\big(\mu(x-2)\big) + BS_2\big(\mu(x-2)\big)\big] \tag{2.10}$$

となる．この K の前に付く符号は縮退した 2 個の波動関数が存在することを意味するが，ここでは当分のあいだこの第 1 式の方で議論を進める．また，$K = 0,\ \pi$ のときは，これら 2 つの波動関数は同じものになってしまうが，そのときは K で微分したものがもう 1 つの解を与えるはずである．ただし，この種の計算は面倒になるので，ここではその場合を例外として扱わない．したがって，以後，K の範囲は $0 < K < \pi$ とする．

つぎになすべきことは，(2.9) 式と (2.10) 式の解を $x = 1$ で関数自身，および，その微係数が連続となるように繋ぐことである．結果は，

$$\begin{aligned} AS_1(\mu) + BS_2(\mu) &= e^{iK}\big[AS_1(\mu) - BS_2(\mu)\big] \\ AS_1'(\mu) + BS_2'(\mu) &= e^{iK}\big[-AS_1'(\mu) + BS_2'(\mu)\big] \end{aligned} \tag{2.11}$$

となる．ここで，S_1，S_2 が，それぞれ，偶関数，奇関数となること，および，S_1'，S_2' が，それぞれ，奇関数，偶関数となることを用いた．これらをまとめると，

$$\begin{pmatrix} (1-e^{iK})S_1(\mu) & (1+e^{iK})S_2(\mu) \\ (1+e^{iK})S_1'(\mu) & (1-e^{iK})S_2'(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

となるが，A，B が共にゼロとならないためには，この係数行列式の値がゼロでなければならず，

$$\cos(K) = S_1(\mu)S_2'(\mu) + S_1'(\mu)S_2(\mu) \tag{2.13}$$

を得る．ここで，(2.8) 式の Wronskian が 1 となることを用いた．この式から伝播数 K が求まるためには，右辺の絶対値が 1 以下でなければならず，これから，S_1，S_2 に含まれる κ, ひいてはエネルギー E の許容帯，および禁止帯が決まることになり，いわゆるエネルギーのバンド構造が現れる．この意味で，以後，この式を固有値方程式と呼ぶことにする．

ここで，係数 A，B を (2.11) 式の第 1 式が満たされるように，

$$A = (1+e^{iK})S_2(\mu), \qquad B = -(1-e^{iK})S_1(\mu) \tag{2.14}$$

ととることにする．これから，一般の x に対する波動関数は，n を任意整数として，$2n-1 \le x < 2n+1$ の範囲で，

$$\Psi(x) = e^{iKn}\big[(1+e^{iK})S_2(\mu)S_1\big(\mu(x-2n)\big) - (1-e^{iK})S_1(\mu)S_2\big(\mu(x-2n)\big)\big] \tag{2.15}$$

となる．もちろん，これはまだ，規格化されたものではない．

3 波動関数の規格化

一般に異なる 2 つのエネルギーを E, E' とし, これに属する κ, K を, それぞれ, κ, κ', および, K, K' とする. また, 以下では, 波動関数, および, 関数 S_1, S_2 のエネルギー依存性を明示するため, $\Psi(x,E)$, $S_i(z,\kappa)$, $i = 1, 2$

のように記すことにする．このときの規格化積分は，(2.15) 式を考慮して，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{2n-1}^{2n+1}\overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')dx=\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-i(K-K')n}\Big)\int_{-1}^{1}\overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')dx \tag{3.1}$$

となる．ここで，上付傍線は複素共役をとることを意味する．この和の部分は，超関数公式

$$\lim_{M\to\infty}\sum_{n=-M}^{M}e^{-i(K-K')n}=2\pi\delta(K-K'),\qquad 0<K,\ K'<\pi \tag{3.2}$$

が使え，デルタ関数を用いた直交性がでる．つぎに，積分の部分を実行するには，E, E' に対応する (1.4) 式を，

$$\Big[\frac{d^2}{dx^2}+E-V(x)\Big]\overline{\Psi(x,E)}=0,\qquad \Big[\frac{d^2}{dx^2}+E'-V(x)\Big]\Psi(x,E')=0 \tag{3.3}$$

と書いておく．ただし，E に対応する方は複素共役を取ったものにしておく．この第 1 式に $\Psi(x,E')$ を，また，第 2 式には $\overline{\Psi(x,E)}$ を掛けてから，辺々を引き算すると，

$$\frac{d}{dx}\Big[\overline{\Psi(x,E)}\frac{d\Psi(x,E')}{dx}-\frac{d\overline{\Psi(x,E)}}{dx}\Psi(x,E')\Big]-(E-E')\overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')=0 \tag{3.4}$$

となり，これを，-1 から 1 まで積分すると，

$$\int_{-1}^{1}\overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')dx=\frac{1}{E-E'}\Big[\overline{\Psi(x,E)}\frac{d\Psi(x,E')}{dx}-\frac{d\overline{\Psi(x,E)}}{dx}\Psi(x,E')\Big]_{-1}^{1} \tag{3.5}$$

となる．ここで，この右辺に $n=0$ とした (2.15) 式を代入すると，16 項がでてくるが，関数 S_1, S_2 の偶奇性を用いると半分は消え，さらに，Wronskian の (2.8) 式，固有値方程式 (2.13) 式を用いると，うまくまとめることができ，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')dx=\frac{2\mu}{E-E'}\Big[&S_1(\mu,\kappa)S_2(\mu,\kappa)\big[(1+e^{-i(K-K')})\cos(K')-(e^{-iK}+e^{iK'})\big]\\&-S_1(\mu,\kappa')S_2(\mu,\kappa')\big[(1+e^{-i(K-K')})\cos(K)-(e^{-iK}+e^{iK'})\big]\Big]\end{aligned} \tag{3.6}$$

となる．これら，(3.2) (3.6) 式の結果を (3.1) 式に代入し，分母の E, E' を (2.2) 式を用いて κ, κ' で表すと，規格化積分の式は，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')dx=\frac{4\pi}{\mu(\kappa-\kappa')}\Big[&S_1(\mu,\kappa)S_2(\mu,\kappa)\big[(1+e^{-i(K-K')})\cos(K')-(e^{-iK}+e^{iK'})\big]\\&-S_1(\mu,\kappa')S_2(\mu,\kappa')\big[(1+e^{-i(K-K')})\cos(K)-(e^{-iK}+e^{iK'})\big]\Big]\delta(K-K')\end{aligned} \tag{3.7}$$

という結果になる．ここで，1 つ注意が必要である．κ を決めると固有値方程式 (2.13) から伝播数 K が一意に決まるが，逆に K を決めたときには，κ は一意に決まるわけではなく，各バンドごとの κ が決まるということである．したがって，κ と κ' が異なるバンドに属するときは，例え，$K=K'$ であっても $\kappa\neq\kappa'$ なので，この式の値はゼロとなり，異なるバンド間の直交性がでる．また，κ と κ' が同じバンドに属するときは，この式は 0/0 の不定形となるので，極限値をとることにする．すなわち，l'Hôpital の定理にしたがって，分母，分子をそれぞれ κ で偏微分してから，$\kappa'\to\kappa$ とおく．結果は，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')dx=\frac{8\pi}{\mu}S_1(\mu,\kappa)S_2(\mu,\kappa)\sin(K)\frac{dK}{d\kappa}\delta(K-K') \tag{3.8}$$

となる．この式のデルタ関数を除いた部分は正定値になるべき量であり，$0 < K < \pi$ で $\sin(K)$ は正なので，積 $S_1(\mu,\kappa)S_2(\mu,\kappa)$ と $dK/d\kappa$ は必ず同符号でなければならない．このことの直接証明はここではしないが，次節の数値計算例では確かに満たされている．さらに，この式のデルタ関数の部分をエネルギー E で表すようにすると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi(x,E)}\Psi(x,E')dx = N^2(E)\delta(E-E'), \qquad N^2(E) = 8\pi\mu\big|S_1(\mu,\kappa)S_2(\mu,\kappa)\big|\sin(K) \tag{3.9}$$

となる．ここに，$N(E)$ は規格化定数で，$\Psi(x,E)/N(E)$ が規格化された波動関数となる．なお，K の符号を変えた (2.10) 式の第 2 式を採用した場合は，$\sin(K)$, $dK/d\kappa$ の符号が両方共に反転するので，ここでの規格化の式はそのまま変更なしに使えることを注意する．

4　数値計算例

(2.6) 式で定義された関数 $S_1(z,\kappa)$, $S_2(z,\kappa)$ のうち，κ の特別な値に対しては,

$$S_1(z,0) = e^{-z^2/4}, \qquad S_2(z,1) = ze^{-z^2/4} \tag{4.1}$$

のようにその形がわかるが，一般の κ に対しこの式から想像することは難しい．ここでは，これらの関数について数値的にグラフ化したものを以下の図 1-1, および，図 1-2 に示す．この図は，水平右向きに z 軸，右斜め上方向に κ 軸，上方向に S_1 (図 1-1)，または，S_2 (図 1-2) をとって，$0 \le z \le 5$, $0 \le \kappa \le 10$ の範囲で立体的に図示したものである．これから，S_1 の方は，κ がゼロより大きくおよそ 1.6 くらいまでの範囲で，z が大きくなるにつれ負方向の発散を起こしていること，また，S_2 の方は，$0 \le \kappa < 1$ の範囲で，z が大きくなるにつれ正方向の発散，κ が 1 より大きくおよそ 2 位までの範囲で z が大きくなるにつれ負方向の発散を起こしていることがわかる．S_1, S_2 共に，κ がおよそ 4 以上では z 方向に振動しているのが見て取れる．通常，このような立体グラフは陰線処理をするのが普通であるが，ここでは，S_2 のグラフが手前の部分で立ち上がっているため，この処理をするとその陰の大部分が見えなくなってしまうため，陰線処理をしないまま載せることにした．

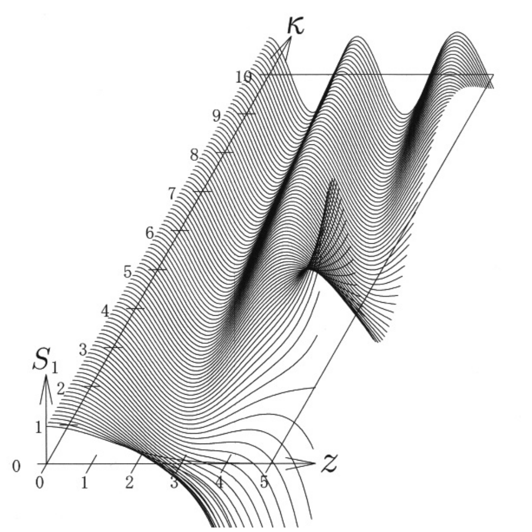

図 1-1　　関数 $S_1(z,\kappa)$ のグラフ

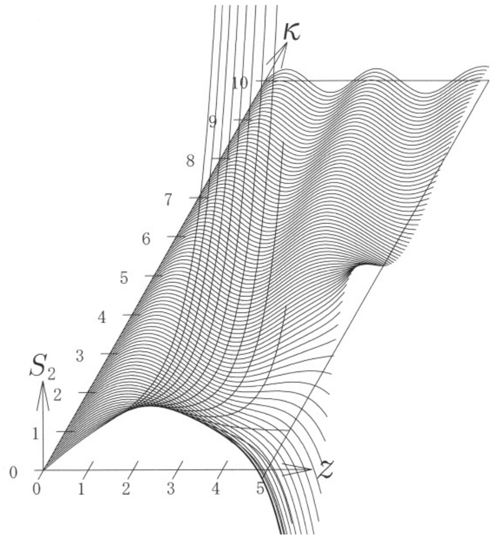

図 1-2　　関数 $S_2(z,\kappa)$ のグラフ

つぎに，固有値方程式 (2.13) を用いて，ポテンシャルの大きさ V_0 を一定値に固定したとき，エネルギー E の値に対し，伝播数 K がどのように決まるかを数値的に求めてみた．$V_0 = 50$ とした場合を，以下の図 2 に示す．エネルギーが小さいときは K の値が一定の幅を持ちながら飛び飛びに決まり，いわゆるエネルギーのバンド構造が現れる．エネルギーが大きくなるにつれ，これらのバンドは癒着してしまい完全なバンドではなくなるが，これらも含めて，バンドということにする．この図で，曲線に付いている色は，(3.8) 式のところで述べたように，積 $S_1(\mu,\kappa)S_2(\mu,\kappa)$ が正のときは赤，負のときは青となるように付けたものである．この $S_1(\mu,\kappa)S_2(\mu,\kappa)$ の正負は，これら曲線の傾き $dK/dE = dK/\mu^2 d\kappa$ の正負と一致していることがわかる．

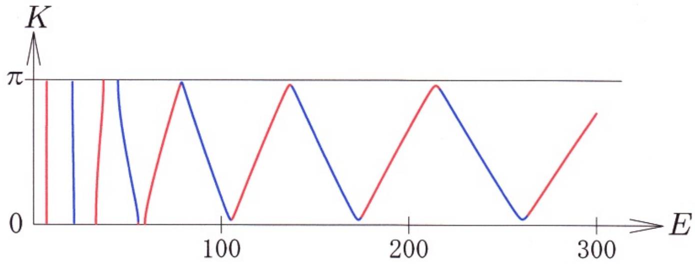

図 2　　K と E の関係 ($V_0 = 50$)

図 3 は，V_0 の値を固定することなく，V_0 - E 平面を細かなメッシュに分割し，各メッシュ間をスキャンさせながら固有値方程式 (2.13) の右辺の値を求めていき，その絶対値が 1 以上のときは何も印さず， 1 のときは赤点で，また，1 より小さくなるにつれ色を連続的に変化させ， -1 のときに青点になるように印したものである．この図から，全体のバンド構造がどのようになっているかが良く理解できる．

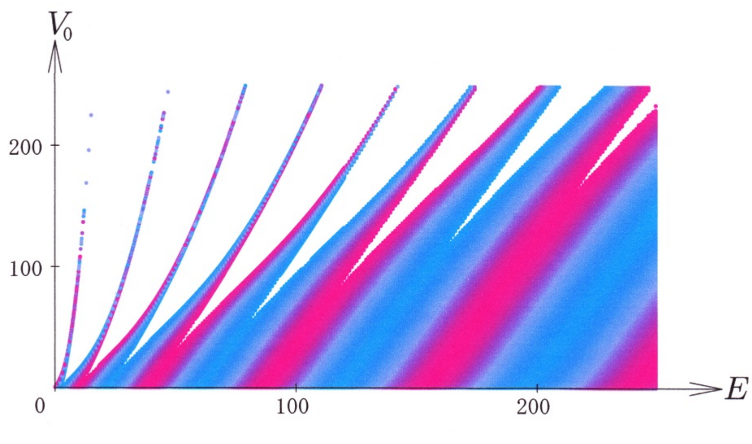

図 3　　V_0 - E 平面におけるバンド構造

5　おわりに

これまで，量子力学における周期ポテンシャル問題を 4 回にわたって掲載してきたが，今回ほど，数値計算に苦労したことはない．合流型超幾何関数で定義される (2.6) 式の $S_1(z)$，$S_2(z)$ は，通常の超幾何関数より収束性は良いはずだが，実際に級数を数値的に求めてみると，意外にも，収束が悪く，普通は 50 項位までとると収束

するはずであるが，今回は 100 項までとってようやく本物らしきものを得ることができた．それでも，z の値が 5.5 位を超えると数値誤差が集積してしまい使い物にならない．こんなときは，z の小さい方は級数で求め，z の大きい方は漸近形を使ってうまく接続するようにするのが通常のやり方である．しかし，合流型超幾何関数の漸近形を用いて実行した結果は，z の小さい方と，大きい方がうまくかみ合ってくれない．仕方なく，今回のものは，漸近形は使わずに，うまく収束してくれる z の値が 5.5 位までに限定した範囲でグラフを描くことにした．

話は変わるが，初めは，ポテンシャルの大きさを示す V_0 が負の場合を解析しようとしたが，(2.1) 式で定義される μ が複素数，したがって，(2.2) 式で定義される z，κ も複素数になってしまい面倒なことになりそうで諦めた．金属中の電子の運動を記述するものとしては，$V_0 < 0$ の方がモデルとしては現実に近いものができるはずである．このことに関しては，次回に再度挑戦してみたいと考えている．はたしてうまくいくかどうか．

[謝辞]

今回もこの原稿を書くにあたって，京都大学名誉教授の中西襄先生にご精読いただき，たくさんのコメントをいただきました．ここに，謹んで感謝いたします．

1 次独立な虚数単位の反可換性

森田克貞 1)

Anti-commutativity among Linearly Independent Imaginary Units

Katsusada Morita2)

要約

任意次元 n の超複素数 a を定義する基底の 1 次独立性が虚数単位の反可換性を要求すること，従って，a が n 元数なら，a^2 も n 元数になることから，ノルム関係式 $|a^2| = |a|^2$ が成り立つことを証明する．これは，任意の複素数 z の満たす関係式 $|z^2| = |z|^2$ の一般化で，代数を張らない三元数や五元数も満足する．

1 はじめに

任意の実数 x, y に対して，その絶対値を $|x|, |y|$ と書けば，$|xy| = |x||y|$ が成り立つ．実数を 2 次元的な複素数 $z = x + iy$ に一般化しても，$|z|^2 = x^2 + y^2$ と定義して 3)，絶対値の法則 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ が成り立つ．ところが，複素数を 3 次元に一般化した，三元数 [1] $a = a_0 + ia_1 + ja_2, b = b_0 + ib_1 + jb_2$，(ただし，$\{1, i, j\}$ は実数体上で 1 次独立 4))，は (分配の法則で定義される) 積のもとで閉じていない， すなわち，ab はもはや三元数にとどまらない:

$$
\begin{cases}
ab = (ab)_0 + i(ab)_1 + j(ab)_2 + ija_1b_2 + jia_2b_1 \\
(ab)_0 = a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 \\
(ab)_1 = a_0b_1 + a_1b_0 \\
(ab)_2 = a_0b_2 + a_2b_0
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

しかし，$i^2 = j^2 = -1$ の他

$$ij + ji = 0 \tag{1.2}$$

を仮定 5) すれば (1.1) 第 1 式最後の 2 項は，$ij(a_1b_2 - a_2b_1) \equiv ij(ab)_3$ とまとまり，$|ab|^2 = (ab)_0^2 + (ab)_1^2 + (ab)_2^2 + (ab)_3^2 = |a|^2|b|^2$ となることが知られている．ここで，三元数 a の絶対値の 2 乗は，$|z|^2 = x^2 + y^2$ を一般化して，$|a|^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2$ で与えられる一方，$|ab|^2$ は 4 平方和 ($\{1, i, j, ij\}$ の各係数の平方を加えたもの) になっている．それは，ij が $\{1, i, j\}$ と独立になることによる．つまり，結合則を仮定すれば，$ij = \alpha + \beta i + \gamma j$,

1) 元名古屋大学理学部物理教室

2) kmorita@cello.ocn.ne.jp

3) $z = 0$ を，$|z|^2 = 0$ で定義すれば，$z = 0 \to x = y = 0$ である． 従って，$\{1, i\}$ はもちろん 1 次独立である．同様に，$a = a_0 + ia_1 + ja_2 = 0$ を $|a|^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = 0$ で定義すれば，$a = 0 \to a_0 = a_1 = a_2 = 0$ となるので，$\{1, i, j\}$ は 1 次独立である．

4) 1 次独立という概念は Hamilton に始まると思われるが，用語としては，その後に生まれたもので，Dickson [2] は代数学の基本定理から出発して，1 次独立性の概念を用い，四元数の虚数単位 $\{i, j, k\}$ の積法則が導けることを指摘している．さらには，その線で Frobenius の定理まで証明している．

5) 可換な場合 $ij = ji$ は $0 = i^2 - j^2 = (i-j)(i+j)$ を意味するので，$j = \pm i$ となり，三元数 a は複素数に退化する：$a = a_0 + i(a_1 \pm a_2)$．すなわち，複素数から三元数への真の一般化は $ij \neq ji$ を要求する．この結果から，もし，$ij = \alpha ji, \alpha(\neq +1) \in \mathbb{R}$ という仮定が許されるとして，そのうえ結合則を仮定すれば，$(ij)^2 = (ji)^2 = \alpha \to \alpha^2 = 1$ となるが，$\alpha \neq 1$ なので，$\alpha = -1$ を得る．もちろん，反可換性 (1.2) を最初に発見した Hamilton の指導原理「絶対値の法則」こそ四元数の発見 [3] への王道であったことは誰も疑わない．

(ただし，α, β, γ は実数)，とは書けない上に，$(ij)^2 = -1$[6)]，$i(ij) = -(ij)i, j(ij) = -(ij)j$ となって，ij は元の虚数単位 $\{i, j\}$ と反可換な虚数単位になるので，$\{i, j, ij\}$ は 1 次独立な虚数単位 [7)] となり，$|ab|^2$ は，ab を $\{1, i, j, ij\}$ で展開したとき，各係数の平方を加えてえられる．それが 3 平方和の積 $|a|^2|b|^2$ に等しくなるのである．従って，この場合のノルム関係式 $|ab|^2 = |a|^2|b|^2$ は Hurwitz の「平方和の定理」には属さない．しかし，$a = b$ のときは，(1.2) の直ぐ下の行で定義された $(a^2)_3 = 0$ となるので，$|a^2|^2 = |a|^4$ は $\{i, j\}$ の反可換性 (1.2) により，左辺は 3 平方和，右辺は 3 平方和の 2 乗になって等しくなる．しかしながら，この反可換性 (1.2) は，$\{1, i, j\}$ の 1 次独立性と等価なので，三元数 a の満たす関係式 $|a^2|^2 = |a|^4$ は $\{1, i, j\}$ の 1 次独立性から得られると考えてもよい．そこで，2 節で，(1.2) は，$\{1, i, j\}$ が 1 次独立であることから導かれ，またその逆も真であることを示す．さらに，五元数の場合も議論する．3 節で，n 次元の超複素数を定義する $(n-1)$ 個の 1 次独立な虚数単位が一般に互いに反可換となることを復習し，その結果，n 次元の超複素数 a はノルム関係式 $|a^2| = |a|^2$ を満たすことを証明する．なお，4 節では，Hamilton のノート [1] の導入部を読み返し，このノートで得られた結果を復習する．

2 三元数・五元数の虚数単位の 1 次独立性と反可換性

前節でも述べたように，Hamilton の三元数 a は次式で定義される [1] :

$$a = a_0 + ia_1 + ja_2, \;\; i^2 = j^2 = -1, \;\; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

同じく三元数 $b = b_0 + ib_1 + jb_2$，$b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ との積を，分配の法則を用いて計算すると，(1.1) となって，ij や ji の項が生ずるので，三元数は積のもとで閉じない．これは，任意の 2 つの複素数の積は，分配の法則を用いて計算すると再び複素数になることと著しく違う．複素数の持つこの性質 (と可換性) のために，$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ が成り立つ．特に，同じ三元数の場合，すなわち，$a = b \to a_\mu = b_\mu$ $(\mu = 0, 1, 2)$ の時でも，a^2 は三元数にとどまらず,

$$a^2 = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + 2ia_0a_1 + 2ja_0a_2 + (ij + ji)a_1a_2 \tag{2.2}$$

となるが，(1.2) を仮定すれば，右辺最後の項は，自動的にゼロになるので，a^2 は再び三元数に戻り，関係式 $|a^2|^2 = |a|^4$ が成り立つ:

$$|a^2|^2 = (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2)^2 + (2a_0a_1)^2 + (2a_0a_2)^2 = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2)^2 = |a|^4 \tag{2.3}$$

逆に，(2.3) を要求すれば，$\{i, j\}$ は反可換 (1.2) でなくてはならない．この反可換性こそ，Hamilton [1] が初めて発見した，当時としては全く新しい概念であった．(これが，Hamilton の発明した四元数という非可換な数体系を生む，決定的に重要な概念であったことは，よく知られている)．これに関する詳細な幾何学的イメージと代数的意味については，Hamilton のノート [1] を詳しく解読している文献 [3] を参照されたい．三元数 $a = a_0 + ia_1 + ja_2$ をベクトル記法で $a = (a_0, a_1, a_2)$ と書くのは，$1 = (1, 0, 0), i = (0, 1, 0), j = (0, 0, 1)$ とおくことに相当する．従って，$\{1, i, j\}$ は明らかに 1 次独立である．これは,

$$\alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 = 0, \; \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

---

6) Hamilton が $k = ij$ の大きさを, $k^2 = -1$ と定めたのは，四元数に対する組成法則からである．

7) 反可換な虚数単位が 1 次独立になるのは 2 節で説明する．

が成り立つのは，$\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=0$ の場合に限ることを意味する．特に，$\{i,j\}$ が 1 次独立，従って，

$$i\alpha_1+j\alpha_2=0,\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R} \tag{2.5}$$

が成り立つのは，$\alpha_1=\alpha_2=0$ の場合に限ることを意味する．実際，(2.5) の 2 乗をとれば，分配の法則によって，

$$-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+(ij+ji)\alpha_1\alpha_2=0,\quad ij+ji\in\mathbb{R} \tag{2.6}$$

となるので，$\{i,j\}$ が反可換 (1.2) のときには，$\alpha_1=\alpha_2=0$ が導かれ，$\{i,j\}$ が 1 次独立になる．逆を証明するには，次のようにする．$\{1,i,j\}$ の 1 次独立性は，$(i\pm j)^2<0$ に導く．なぜなら，もし，$(i\pm j)^2\geq 0$ なら，2 乗すれば非負の実数 $w=1\cdot w=i\pm j$ が存在することになるが，これは，$\{1,i,j\}$ が 1 次独立という仮定に反する．従って，$(i\pm j)^2<0$，それ故，$ij+ji=2\alpha\in\mathbb{R},|\alpha|<1$ が得られる [8]．この α は一般性を失うことなく，0 に出来る [2]．なぜなら，$\{i,j\}$ の代わりに，

$$I=i,J=ai+bj,\ a=\pm\alpha/\sqrt{1-\alpha^2},\ b=\pm 1/\sqrt{1-\alpha^2} \tag{2.7}$$

とおけば，$|\alpha|<1$ より，a,b は共に実数であり，また

$$I^2=J^2=-1,\ IJ+JI=0 \tag{2.8}$$

となる．従って，改めて，$I=i,J=j$ とおけば (それに従って，(2.1) の実係数 $a_{1,2}$ も違った値を取るのは当然であるが)，(1.2) が成り立つ．つまり，1 次独立な虚数単位 $\{i,j\}$ は，一般性を失うことなく，反可換にできる．これは，虚数単位が，さらに多い，例えば，3 節に出てくるように，一般に，$(n-1)$ 個ある場合にも言えて，1 次独立な，すべての虚数単位は，互いに反可換となる [4]．それを示す前に，五元数についても，三元数と同様のことが言えるので，その紹介を簡単にしておく．五元数 a,b は，四元数の基底 $\{1,e_i\}_{i=1,2,3}$ に新しい虚数単位 l を追加して，次のように定義される：

$$\begin{cases} a=a_0e_0+a_ie_i+a_4l \quad a_0,a_i,a_4\in\mathbb{R} \\ b=b_0e_0+b_ie_i+b_4l \quad b_0,b_i,b_4\in\mathbb{R} \\ e_0^2=e_0,\quad l^2=-1,\ le_i=-e_il \quad (i=1,2,3) \end{cases} \tag{2.9}$$

このとき，$ab=(ab)_0e_0+(ab)_ie_i+(ab)_{(4i)}e_il+(ab)_4l$ は八元数となる ($i,j,k=1,2,3$ で，l を含む基底の積は，準結合則 [4] を使って，八元数の虚数単位 $\{e_i,le_i,l\}\equiv\{e_A\}_{A=1,2,3,\cdots,7}$ を得る):

$$\begin{cases} (ab)_0=a_0b_0-a_ib_i-a_4b_4 \\ (ab)_i=(a_0b_i+a_ib_0)+\epsilon_{jki}a_jb_k \\ (ab)_{4i}=a_ib_4-a_4b_i \\ (ab)_4=a_0b_4+a_4b_0 \end{cases} \tag{2.10}$$

けれども，$|ab|^2=(ab)_0^2+(ab)_i^2+(ab)_4^2+(ab)_{4i}^2$ と定義すれば，$|ab|^2=|a|^2|b|^2$ は成り立つ．ここで，$a=b$ とおけば，$(a^2)_{4i}=0$ となり，a^2 は五元数に戻り，$|a^2|^2=|a|^4$ が成り立つ．

[8] もし，この条件 $ij+ji=2\beta\in\mathbb{R},|\beta|<1$ を，(2.6) に入れると，$\alpha_{1,2}$ が共に実数という条件では，やはり，$\alpha_1=\alpha_2=0$ しか解がないことが分かる．

3　任意次元の超複素数

次に，一般に，n 次元の超複素数

$$a = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_{n-1} e_{n-1},\ a_\mu (\mu = 0, 1, \cdots, n-1) \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

を考える．ただし，1 次独立な虚数単位 $\{e_i\}_{i=1,2,\cdots,n-1}$ は次式を満足する：

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij} \tag{3.2}$$

この式は，$e_i e_j = -\delta_{ij} + c_{ijk} e_k, c_{jik} = -c_{ijk}$ を前提にしている訳ではなく，$\{e_i\}$ とは独立な虚数単位 $\{E_k\}$ が存在して，$e_i e_j = -\delta_{ij} + c_{ijk} E_k, c_{jik} = -c_{ijk}, E_k E_{k'} = -\delta_{kk'}$ となっていても成り立つことに注意されたい．この場合は，a の集合は代数をなさない [9]．異なる虚数単位の反可換性は，前節で見たように，虚数単位の 1 次独立性を意味する．この 1 次独立性を明白に示すのは，虚数単位のベクトル表示である：

$$\begin{aligned} e_1 &= (0, 1, 0, 0, \cdots, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 0, 1, 0, \cdots, 0, 0) \\ &\vdots \\ e_{n-1} &= (0, 0, 0, 0, \cdots, 0, 1) \end{aligned} \tag{3.3}$$

このとき，明らかに，$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_{n-1} e_{n-1} = (0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}) = (0, 0, 0, \cdots, 0)$ は $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$ を意味する．また，e_i が虚数単位であることは，$e_1^2 = e_2^2 = \cdots = e_{n-1}^2 = (-1, 0, \cdots, 0) \equiv -e_0$ を意味するが，超複素数の積を計算するときは，分配の法則を使う (ベクトル表示での積法則は，これを翻訳して導かれる)．特に，虚数部に限ると，

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_{n-1} e_{n-1})^2 = -\sum_i \alpha_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j (e_i e_j + e_j e_i) = 0$$

のようにする．すると，すべての $i \neq j$ に対して，虚数単位が反可換

$$e_i e_j + e_j e_i = 0 \quad (i \neq j \text{ の時}) \tag{3.4}$$

ならば，すべての i に対して，$\alpha_i = 0$ になることがわかり，$\{e_i\}_{i=1,2,\cdots,n-1}$ は 1 次独立である [10]．逆に，この 1 次独立性が，虚数単位の反可換性 (3.4) を意味することを証明する [11]．すべての $i, j (i \neq j)$ に対して，$\{1, e_i, e_j\}$ は 1 次独立だから，$(e_i \pm e_j)^2 < 0$ となるので，これから，$e_i e_j + e_j e_i = 2\alpha_{ij}, |\alpha_{ij}| < 1$ が導かれること，さらに，$\{e_i, e_j\} \to \{I_i, I_j\}$，ただし，$\{I_i, I_j\}$ は反可換な虚数単位，という線形変換が存在することは前節の (2.7), (2.8) と同じである． そこで，改めて，$\{I_i, I_j\} = \{e_i, e_j\}$ とおけば，反可換性 (3.4) が導かれたことになる．このように，$\{e_i\}_{i=1,2,\cdots,n-1}$ の 1 次独立性は反可換性 (3.4) を意味し，また，逆も成り立つ．ところで，虚数単位の反可換性 (3.4) は次式を意味する (次式では，Einstein の和の規約を使う)：

$$\begin{aligned} |a^2|^2 &= |(a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_{n-1} e_{n-1})^2|^2 = |(a_0 + a_i e_i)^2|^2 \\ &= |a_0^2 + 2a_0 a_i e_i + a_i a_j e_i e_j|^2 = |a_0^2 + 2a_0 a_i e_i + a_i a_j (e_i e_j + e_j e_i)/2|^2 \\ &= (a_0^2 - a_i^2)^2 + (2a_0 a_i)^2 = (a_0^2 + a_i^2)^2 = |a|^4 \end{aligned} \tag{3.5}$$

---

9) 例えば，三元数の場合，$e_1 = i, e_2 = j$ で，$E_3 = e_1 e_2, E_3^2 = -1$.

10) もし，すべての $j \neq 1$ に対し $e_1 e_j = e_j e_1$ なら n 元数 $a = a_0 + a_i e_i$ は複素数 $a = a_0 \pm i(a_1 + \cdots + a_n), i \equiv e_1$ に退化する.

11) 文献 [4] の補遺 A に帰納法による証明がある.

すなわち，

$$|a^2| = |a|^2 \tag{3.6}$$

を得る．これは，三元数の関係式 (2.3) の一般化であって，n 次元直交空間の原点から，その空間内の 1 点 $a = (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ までの長さの 2 乗が，同じく，原点から点 a^2 までの長さに等しいことを述べている．組成法則を満たす，交代代数の四元数や八元数のときは $|ab| = |a||b|$ であったので，$a = b$ とおけば，(3.6) になるが，組成法則を満たさない，フレキシブル代数に対しては，(3.6) だけが成り立つわけである．三元数や五元数などの，代数をなさない場合でも，(3.6) が成り立つことを見た．すなわち，n 元数 a の 2 乗 a^2 も n 元数になるならば，(3.6) が成り立つ．そのためには，異なる虚数単位の反可換性 (3.4) が必須であり，従って，a の基底 $\{1, e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ は 1 次独立でなければならない (もっとも，このことは，暗黙のうちに仮定されている).

4　おわりに代えて

Hamilton は [1] で，複素数は，1 の軸とそれに垂直な $\sqrt{-1}$ の軸の平面上の点で表されるので，この複素平面に垂直なもう一つの $\sqrt{-1}$ があるとするのは自然だと述べている (それらの虚数単位を $\{i, j\}(i^2 = j^2 = -1)$ と名付けている)．したがって，現代風にいえば，$\{1, i, j\}$ が 3 次元ベクトル空間の直交基底であり，$\{1, i, j\}$ が 1 次独立であることを明確に認識していたと思われる．しかし，Hamilton は三元数 a に対して，幾何学的な理由から，$|a^2| = |a|^2$ を要求することにより，$\{i, j\}$ の反可換性を見出した．さらに，a と実部だけ異なる三元数 a' との積 aa' の幾何学的な関係が導けることも確かめた．

このノートでは，Hamilton の反交換関係を「1 次独立性」から導く Dickson [2] の処方箋を一般化して，任意次元の超複素数 a に対して，1 次独立な虚数単位の反可換性を導き，その結果，ノルム関係式 $|a^2| = |a|^2$ が満たされることをしめした．このノルム関係式は，n 元数 a の 2 乗 a^2 がまた n 元数になっているからだが，これはまた，n 元数 a を定義している基底 $\{e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ の 1 次独立性の結果でもある．それ故，すべての Cayley-Dickson 代数は，$|a^2| = |a|^2$ を満たす。その中で、組成法則 $|ab| = |a||b|$ を満たすのは，$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ だけというのが Hurwitz の定理である。

謝辞

この小論の初稿を詳しく読んで, 貴重なコメントを頂いた加瀬博己氏（大同大学名誉教授）に謝意を表します。さらに、矢野忠先生 (愛媛大学名誉教授) には、原稿作成上、懇切丁寧なご指導を受けました。ここに、心から、感謝申し上げます。

参考文献

[1] W. R. Hamilton, ‘Quaternions’, Proc. Roy. Irish Acad. vol. L(1945), 89-92.

[2] L. E. Dickson, ‘Linear Algebras’, Cambridge: at the University Press, 1914.

[3] 矢野 忠,『四元数の発見』, (海鳴社，2014).

[4] K. Morita, ‘Quasi-Associativity and Cayley-Dickson Algebras’, PTEP, 2014, 013A03 (19 pages).

パリティ演算子

米澤　穣 [1]

The Parity Operator

Minoru YONEZAWA [2]

1　はじめに

故小川修三（名古屋大学名誉教授）さんの量子力学の講義ノートを編集している矢野君（編集者）からパリティ演算子 (Parity operator) P が微分で表されているが，どうやって導いたのかと尋ねられた [3]．あまりそういうことを考えたことがなかったのだが，ちょっと考えたところすぐにわかったので，それをメールで知らせておいた．そしたら，そのことを「数学・物理通信」のために書いてくれませんかという要望があったので，簡単ではあるが，ここに述べておく．なお，補足と付録は矢野君がつけてくれた．

2　パリティ演算子の表現

小川さんの講義ノートではパリティ演算子は

$$P = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-2x)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}\right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(-2y)^m \frac{\partial^m}{\partial y^m}\right] \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}(-2z)^l \frac{\partial^l}{\partial z^l}\right] \tag{2.1}$$

と 3 次元の表示であるが，ここでは簡単のために 1 次元のパリティ演算子を導こう．

テイラー展開 (Taylor expansion) は

$$f(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \exp\left(a\frac{d}{dx}\right) f(x) \tag{2.2}$$

であるから，

$$f(-x) = \exp\left(a\frac{d}{dx}\right) f(x)\bigg|_{a=-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-2x)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x) \tag{2.3}$$

となる．(2.3) の指数関数で表した部分の意味がわかりにくいかもしれない．付言すれば，(2.3) の中辺は a を定数として $f(x)$ を x で微分してから $a = -2x$ とおくことを意味する．

すなわち

$$\begin{aligned} Pf(x) &= f(-x), \\ P &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-2x)^n \frac{d^n}{dx^n} \end{aligned} \tag{2.4}$$

である [4]．

---

[1] 広島大学名誉教授

[2] m-yonezawa@mtc.biglobe.ne.jp

[3] 小川さんの「量子力学講義ノート」は「素粒子論研究」電子版に（その 1）だけが掲載されている．

[4] ここの計算はちょっと注意が必要なので付録 1 を参照せよ．

3 次元の場合への拡張は自明だろう．これが小川修三さんの与えたパリティ演算子の表現であった．

初等量子力学のテクストではテイラー展開は近似計算のとき以外ではあまり出てこないではないかと思う．運動量演算子 $p_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$ は変位に関係していることは量子力学の講義で説明されるだろうから，ついでに座標の平行移動 $x \to x + a$ はユニタリー演算子 (unitary operator) $U = \mathrm{e}^{i\frac{a}{\hbar}p_x}$ で与えられ，

$$f(x+a) = Uf(x) \tag{2.5}$$

は実はテイラー展開になっているという説明が講義ノートの補足としてあった方が親切かと思う．

小川さんがいつ，どこで，このようなパリティ演算子の表現を知るようになったかわからないが，矢野君によれば，彼は量子力学の初歩の段階でこのパリティについていつも学生に教えていたこと，またこのパリティは量子力学ではじめて出てきたものであり，古典物理にはその対応した量はないと強調されていたそうである．

3　おわりに

導出はわざわざ報告するほどのことでもないのだが，それでもこのようなパリティ演算子の表現は量子力学のテクストでもあまり見たことがない．それであえて求めに応じてここに述べた．

いまの場合にパリティ変換 $x \to -x$ が並進移動であるというのは感覚としてはちょっと違和感を感じないでもない．拡張が自由であるのは悪いことではないけれども．

世戸憲治さんに原稿の不備についてのご指摘に感謝します．これについては付録　1 に矢野君が説明を付加してくれた．

補足

すでに「数学・物理通信」3 巻 2 号，pp. 14-18 に「並進演算子 (translation operator)」というエッセイを書いたが，このときにテイラー展開をフルに使って並進演算子の性質を導いた．だが，並進演算子をオペレートすることがテイラー展開になっているというふうには理解をしていなかった．

なんでもちょっとした視点の変化にすぎないが，理解の深さが違ってくるのだとわかった．

なお，並進演算子のエッセイに付録としてつけたテイラー展開の導出を，以下に一般の人のために付録　2 として再録する．(矢野)

付録 1　注意

(2.2) において $a = -2x$ とおけば

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-2x)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \exp\left(-2x\frac{d}{dx}\right) f(x) \tag{3.1}$$

となる．しかし，

$$\exp\left(-2x\frac{d}{dx}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-2x\frac{d}{dx}\right)^n \tag{3.2}$$

であるから，$n \geq 2$ のときに

$$(-2x)^n \frac{d^n}{dx^n} \neq \left(-2x\frac{d}{dx}\right)^n \tag{3.3}$$

であるので，(3.1) の指数関数で書いた部分は正しくないことになる..

(2.2) は正しいので，直接 (2.2) に $a = -2x$ を代入したくなるのは $f(x+a) = f(-x)$ となるからである．しかし，左辺はそれで問題ないが，右辺は $a =$ 定数 のときに正しいのに $a = -2x$ とおくと正しくないという，

微妙な点を含んでいる．それで (2.3) のように書き換えがされている．だれでもまちがいをしやすいところなのであえてここに説明を加えた．

なお，この付録 1 と (2.3) の中辺の部分の説明の追加を示唆下さった世戸憲治氏に感謝する．(矢野)

付録 2　Taylor 展開の導出

Taylor 展開は関数 $f(x+h)$ の値を $x+h$ の近傍の点 x での値 $f(x)$ とその高階の微係数 $f^{(n)}(x)$，$(n=1,2,3,\cdots)$ から求める．

いま無限回微分可能な関数 $f(x+h)$ があるとき，これを h のべき級数で

$$f(x+h)=a_0+a_1h+a_2h^2+a_3h^3+a_4h^4+\cdots+a_nh^n+\cdots \tag{3.4}$$

と表すことができるとしよう．このときに h のべきの係数 $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$ は未定の係数である．

さて，どうやってこれらの係数を決めていけばよいだろうか．まず (3.4) で $h=0$ とおけば，直ちに

$$a_0=f(x)$$

と求められる．

つぎに，(3.4) の両辺を h で微分すれば

$$f'(x+h)=a_1+2a_2h+3a_3h^2+4a_4h^3+\cdots+na_nh^{n-1}+\cdots \tag{3.5}$$

が得られる．(3.5) で $h=0$ とおけば

$$a_1=f'(x)$$

と求められる．

さらに，(3.5) の両辺を h で微分すれば

$$f''(x+h)=2a_2+2\cdot 3a_3h+3\cdot 4a_4h^2+\cdots+(n-1)na_nh^{n-2}+\cdots \tag{3.6}$$

が得られる．(3.6) で $h=0$ とおけば

$$a_2=\frac{1}{2!}f''(x)$$

と求められる．

さらにつづけて，(3.6) の両辺を h で微分すれば

$$f'''(x+h)=1\cdot 2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4h+\cdots+(n-2)(n-1)na_nh^{n-3}+\cdots \tag{3.7}$$

が得られる．(3.7) で $h=0$ とおけば

$$a_3=\frac{1}{3!}f'''(x)$$

と求められる．

以下，同様な方法で係数を求めれば

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)$$

と求められる．

このようにして求められた係数を (3.4) に代入すれば，

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^n(x)+\cdots \tag{3.8}$$

が求められる．(矢野)

(2017. 2. 8)

パリティ演算子—コメント

The Parity Operator — A Comment

中西　襄[1]
Noboru NAKANISHI[2]

パリティ演算子の論文で，少し気になるところがありましたので，コメントします．数学者みたいなことを言ってちょっと気が引けないでもないですが，パリティ演算子 P の対象となる関数はどのようなものを想定しているのでしょうか.

無限回微分可能性はもちろん要求しているはずですが，べき級数ではないので，解析関数であっても級数が収束する保証はありません．小川さんが書かれたものの歴史的考証だからと言われればそれまでですが，どうも奇妙すぎるように思います．もっと素直に定積分で表してはどうでしょうか.

$$Pf(x) = \frac{d}{dx}\int_{-x}^{a} dy f(y) \tag{1}$$

これなら任意の連続関数に対して定義できます.

一般に線形演算子は

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy K(x, y) f(y) \tag{2}$$

のように表示できます．上のパリティ演算子 P の場合は

$$K(x, y) = \delta(x + y) \tag{3}$$

です.

(2017.3.16)

[1]京都大学名誉教授
[2]nbr-nak@trio.plala.or.jp

編集後記

7巻1号の掲載論文は5編で，物理関係者の投稿だけになりましたが，いずれもこの「数学・物理通信」であればこそ読むことのできる貴重な力作ぞろいだと思います．特に第一論文は物理学に関心をもっておられる方々，または、それに準ずる方々ならば，興味深く読むことができるのではないかと思います．

一方，数学関係者の掲載は0編でした．これではいくらなんでもこのサキュラー名「数学・物理通信」に反するのではないか．この事実は少なからず編集者の一人にも責任があるのかもしれません．その人は残念ながら難病を抱えていて，十分な力を発揮できません．しかし，なんとかしたいものです．編集者がいつも言う「継続は力なり」を忘れてはなりません．

今後とも編集者は投稿者と共に力強く歩んで行きたいと志を高く持ち続けたいと思います．

（新関章三）

新関さんは数学者の寄与がこのサーキュラーに少ないことに自責の念をお持ちのようですが，別に心配はいりません．

次号の7巻2号には浅田先生の数学の論文が掲載になります．また，新関さんはご自身のライフワークとして独自の内容を含んだ微積分のテクストの原稿を以前から用意されています．その一部でもこのサーキュラーに随時掲載できたら，数学関係の論文が各号に満載ということになる可能性もあるのです．

（矢野　忠）