液晶科学者のための群論入門　第 1 回：群とは何か[1]

谷村 省吾[2]

液晶の相構造の分類・記述のために群論はよく利用されている．群論と表現論の基礎と，物理への応用について連続講義で解説する．今回は群の定義と性質を解説する．

キーワード：対称性，不変性，群，準同型写像，同型写像，部分群，正規部分群，商群

1　はじめに

今回から数回にわたり，群論の入門講義を致します．私は名古屋大学工学部応用物理学科で主に固体物理を，大学院理学研究科物理学専攻で素粒子論を学び，最近は量子論の基礎や量子情報理論の研究をしております．私自身は液晶の研究をしていませんが，液晶の研究をなさっている先生や友人たちと学部生の頃からおつきあいがあり，液晶の物理の面白さを教えていただいたり，液晶の実験の不思議な映像を見せていただいたりしております．固体物理・素粒子論・液晶科学は，もちろんすべて物理なのですが，群論はどの分野にも共通する研究道具です．群論と表現論を主たる題材とし，読者の皆さんにこれらの数学の「こころ」を理解していただけるよう説明を工夫しながら，液晶の物理への応用を目指して講義しようと思います．最初の回は，とても易しいレベルから話を始めますので，本格的な研究者の方々にとっては退屈な内容だろうと思います．しかし，学部生や大学院生の方も読めるような教材とすることを目指しておりますので，本講義を教育用に利用していただければ幸いです．

2　対称性

群という概念の出どころは対称性である．対称性とは何かというと,「ある対象 F に R という操作を施した結果の F' が元の F と一致するとき，F は R に関する**対称性** (symmetry) を持つ，あるいは，F は操作 R の下で不変である」というのがその定義である．何かを動かして変えたはずが変わらなかったら，対称性がある，というのだ．対称性は**不変性** (invariance) と同義と思ってよい．

では,「対象」や「操作」とは具体的にはどんなものか？ 図 1(a) のように，平面上の正三角形 ABC を左回りに 120° 回せば，点 A は点 B があった位置に移るし，点 B は点 C があった位置に移る．回転後の図形は元の正三角形にぴたりと重なり，正三角形自体としては不変にとどまる．この意味で「正三角形は 120° 回転に関する対称性を持つ」と言ってよい．120° の回転操作のことを ρ_1 という記号で表し，120° 回転で点 A が B の位置に移ることを $\rho_1(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ と書くことにしよう．また,「正三角形は 240° 回転に関する対称性を持つ」ことも明らかだろう．240° の回転操作を ρ_2 という記号で表す．さらに,「正三角形は点 A を通る垂線を軸として折り返す操作 σ_1 に関する対称性を持つ」ことも見て取れる．$\sigma_1(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$ であるし，$\sigma_1(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ である．同様に点 B，点 C を通る垂線を軸とする折り返し操作 σ_2, σ_3 についての対称性もある．

【図-1　ある図形がある変換の下で不変にとどまるとき，その図形は対称性を持つという．変換としては回転，反転（鏡映）などがある.】

対称性は正三角形だけが持つ性質だろうか？ 図 1(b) の二等辺三角形は 120° 回すと元の図形と重ならない．つまり，この二等辺三角形は 120° 回転に関する対称性は持っていない．しかし，点 A を通る垂線に関する折り返し対称性は持っている．点 B や点 C を通る垂線については折り返し対称性がない．

もっと一般的な，適当に描かれた三角形 (c) は,

[1] 日本液晶学会誌 11 巻, 3 号, pp. 288-295 (2007 年 7 月) に掲載.

[2] Shogo TANIMURA, 京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻

どう動かしても元の三角形と重ならない．つまり対称性がない．対称性を持たない三角形は，特別な三角形ではなく，一般的な，ありふれた三角形だと言えるだろう．これらの例は，対称性のある・なしによって図形はふるい分けられ，分類されることを示している．

なお，図形をまったく動かさないことも,「操作」の特別な場合として考える方が何かと便利である．図形を動かさない変換のことを**恒等変換** (identity transformation) という．恒等変換は e や i という記号で表すことが多い．例えば，恒等変換で点 A が動かないことを $e(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ と書く．

3　群のはじまり

ある図形を不変にとどめる操作は一つとは限らず多数あるので，そういう操作を全部集めたものを，一つの思考対象とすることは，自然な発想であろう．こうして作られる集合を，その図形の**対称性の群**という．正三角形の対称性の群は

$$G_{\text{正三角形}} = \{e, \rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

である．恒等変換 e も群のメンバーに入れてあることに注意してほしい．二等辺三角形の対称性の群は

$$G_{\text{二等辺三角形}} = \{e, \sigma_1\}$$

であり，一般の三角形の対称性の群は

$$G_{\text{三角形}} = \{e\}$$

である．見ての通り $G_{\text{正三角形}}$ が一番大きな集合であり，$G_{\text{二等辺三角形}}, G_{\text{三角形}}$ はその部分集合である．正三角形は整った形で，一般の三角形は崩れた形に見えるという印象の違いが，群を使うと群の大小比較で数量的に捉えられる．

群を考えた利点は他にはないのか？ 単に群の集合としての大きさだけが意味のある情報か？ それだけではない．ここからが群論の真骨頂なのだが,「操作と操作は合成すると新たな操作を定める」という性質がある．例えば，120° 回転を 2 回続けると 240° 回転になる．このことを

$$\rho_1 \circ \rho_1 = \rho_2$$

と書く．では，120° 回転 ρ_1 の直後に折り返し操作 σ_1 を施すと，正味のところはどんな操作を施したことになるだろうか？ 頭の中だけで考えるのは難しいので，図を描いてみる．120° 回転で三角形の頂点 A が B の位置に移り，B が C の位置に移り，C が A の位置に移る，ということを図 2 のようなあみだくじで表す．また，点 A を通る垂線についての折り返し操作 σ_1 もあみだくじで表される．

【図-2　あみだくじ．$\rho_1(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$, $\rho_1(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$, $\rho_1(\mathrm{C}) = \mathrm{A}$．あみだくじを連結すると $\sigma_1(\rho_1(\mathrm{A})) = \sigma_1(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$.】

そうすると，回転 ρ_1 を施し，次いで反転 σ_1 を施すという一連の操作は，あみだくじの合成（連結）で表され，結果として得られるあみだくじは A と C を入れ替える操作 σ_2 になっている．このことを式で

$$\sigma_1 \circ \rho_1 = \sigma_2 \tag{1}$$

と書く．ρ_1 をした後で σ_1 をすることを $\sigma_1 \circ \rho_1$ と書くので，記号は右から左に読むことに注意してほしい．これは，点 A に対する操作を $\sigma_1(\rho_1(\mathrm{A}))$ という合成写像の形に書くためである．つまり，作用を受けるもの（ここでは A）を一番右に書いて，左のものが右に作用するという書き方の慣行に従ったためである．これはヨーロッパ系の言語が「動詞＋目的語」という語順を持ち，左から右に横書きするスタイルに倣った結果だろう．余談はともかく，このように群の元 a, b から作られる元 $a \circ b$ を，掛算の一般化と考えて，a と b の**積** (product) あるいは**合成** (composition) という．

積について見逃してはならない性質は，積は元を掛ける順序に依存するということである．図 2 の積の順序を入れ替えると，図 3 のように

【図-3　σ_1 に ρ_1 を継ぎ足すと σ_3.】

$$\rho_1 \circ \sigma_1 = \sigma_3 \tag{2}$$

となり，積の結果は式 (1) と異なるものになる．考えてみると，2 種類の操作を続けて行う場合，操作の順序を入れ替えたら，正味異なる結果になることの方が普通である.「シャツを着る（着させる）」ことを a と書き,「セーターを着る」ことを b と書けば,「シャツを着てからセーターを着る」ことは $b \circ a$ であり,「セーターを着てからシャツを着る」ことは $a \circ b$ である．$b \circ a$ と $a \circ b$ が異なる結果をもたらすのは容易に想像できるだろう．なお,「シャツを着る」の逆を「シャツを脱ぐ」と解釈し a^{-1} と書けば，$(b \circ a)^{-1} = a^{-1} \circ b^{-1}$ となることも理解しやすいのではないか．ともかく，操作の積に関しては $b \circ a = a \circ b$ となることの方が珍しい．

正三角形の対称性群について，縦の列に a を並べ，横の行に b を並べ，積 $a \circ b$ を行列に並べると，表 1 ができる．このような表を**群表**という．言わば，掛算の九九の表のようなものだ．整数の九九と違うところは，$a \circ b$ の欄と，$b \circ a$ の欄が異なる結果になっていることだ．

【表-1　正三角形の対称性群の群表.】

この表を眺めてどんなことに気づくだろうか？まず e の行は $e \circ b = b$ というパターンになっており，e の列も $a \circ e = a$ となっており，e は掛算しても相手を変えないことが見て取れる．このような元 e のことを**単位元** (identity, unit element) という．こういう働き方をする元は e 以外にはない，ということにも注目してほしい．

群表を見て気づくことはまだある．どの行にも必ず一度 e が現れることである．また，どの列を見ても必ず一度だけ e が現れる．つまり，どの元 a に対しても掛算すると e になるような相方の元 a' や a'' がある：

$$a \circ a' = a'' \circ a = e.$$

しかもよく見ると上の条件を満たす a' と a'' は一致している．このような $a'(= a'')$ のことを a の**逆元** (inverse element) という．a' のことを通例 a^{-1} と書く．

群の重要な性質がもう一つある．群の任意の 3 つの元 a, b, c を持って来て，この並びに従って掛算するやり方は，$(a \circ b) \circ c$ と $a \circ (b \circ c)$ の 2 通りがあるが，これらは必ず一致する：

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

この式が成立することを群表で確かめるのは面倒だが，正三角形の対称性群の積があみだくじの連結で作られることを考えたら，図 4 に見られるように，a, b を連結してから c を連結したのと，b, c を連結したものに a を連結したのは，同じ結果になることがわかるだろう．このような積の性質を**結合律** (associative law) という．

【図-4　あみだくじの結合律.】

元々，正三角形は頂点や辺が集まってできた図形であり，それら頂点の足し算や掛算といった演算は定義されていない．ところが，正三角形を回したり折り返したりする「操作」を考えると，その「操作」たちの間には自然に積が定義され，単位元・逆元・結合律といった，まとまりのある関係性が現れてくる．対称性群は，単に 6 つの元が集まっただけの集合ではなく，6 つの元が積という演算を通して互いに関係し合っている．正三角形は「操作されるもの」であり，回転や折り返しは「操作」である.「操作されるもの」は直接描いたり見たりすることができる図形であり,「操作」そのものは物質的な正体のない抽象的な概念であるが,「操作されるもの」と「操作」を切り離して,「操作たち」だけの世界を独立させたものが群である.「操作たち」はバラバラに存在するのではなく，積という関係を通して有機的に結び付き合い，群という構造物を作っているのである．このように「操作されるもの」から離れて自立した「操作たち」の世界を調べることが群論のテーマである．一方で，いったん「操作されるもの」のことを忘れてしまった群に，再度「操作されるもの」を与えて，自分たちが「操作」であったことを思い出させるのが，群の表現論という数学である．ようやくこのシリーズ講義の概要を述べることができるところに来た．この講義の目標は，3 分の 1 は群論，次の 3 分の 1 は群の表現論，残り

3分の1は表現論の物理への応用を解説することである．

4　群の定義

上の節では正三角形の群の性質を調べた．そこで観察された性質を抽象化して，一般の群の定義を述べよう．以下に述べる4つの条件を満たす集合Gがあれば，それを**群** (group) と呼ぶ．(1) 積：集合Gの任意の元a, bに対して積と呼ばれる元abが定まる．(2) 結合律：集合Gの任意の元a, b, cに対して$(ab)c = a(bc)$が成り立つ．(3) 単位元の存在：Gの元eがあって，任意の元aに対して$ae = ea = a$が成り立つ．(4) 逆元の存在：Gの任意の元aに対して，$aa' = a'a = e$が成り立つような元a'がある．このa'のことをa^{-1}とも書く．なお，積をabと書くこともあるし，$a \circ b$と書くこともあるし，もっと他の記号を使ってもかまわない．

数学上の定義には，一意的な定義と，そうでない定義があるということに注意しておこう．例えば，平行四辺形は，対辺が平行な四角形と定義されるが，この条件を満たす四角形は唯一ではない．大きさや形の異なる平行四辺形はたくさんある．一辺の長さが10 cmの正方形，と言えば，唯一に定まるような気がするが，うるさいことを言えば，それも唯一ではない．一辺の長さが10 cmの正方形はすべて合同である，というのが正しい言い方である．上に述べた群の定義も，唯一の群を指定してはいない．むしろ「群」とは,「平行四辺形」のようなカテゴリーを指す総称である．もちろん場合によっては，数ある平行四辺形のうち，ある特定の平行四辺形に注目することがあるように，特定の群に注目することもある．群論は，すべての群に共通する性質を調べたり，特定の群を詳しく調べたりする数学なのである．

それにしても，群の定義はたいへん抽象的で，これだけの条件であれば，何でも群になってしまうのではないかとさえ思われるかもしれない．じつは，群の条件を満たすことは意外に難しいのである．さっきの正三角形の対称性群は6つの元からなる集合であったが，では，4つの元からなる群を作れ，と言われたらどうするか．この注文は，4行4列の群表を作れ，という課題である．下手にやると，逆元の存在や結合律を満たさない表ができてしまう．さらに，4行4列の，何通りの異なる群表が存在するか？と問われたらどうするか．たぶん1通りしかないということはないだろう．4つの元からなる群はいっぱいあるに違いない．そもそも群が何通りあるかということを数えようと思ったら，どの群とどの群は同じものと見なして1つと数えるのかということを約束しておかないといけない．群の元をa, b, cと書く代わりにα, β, γと書いたら，それは異なる群として数えるのか？　そうは思わないだろう．そうすると，群と群が「同じ」という概念をきちんと定義しておかないといけないことに気づく.「同じでない」群が全部で何通りあるかなんて，人間が数え切れるだろうか？　「群」などというものを言い出したおかげで余計な問題に煩わされるようになったとは思ってほしくない．群という抽象概念を手にしたおかげで，じつに実り多く，意味深い世界が広がって来るのである．そのことを追々見ていくことにしよう．

5　群の例

抽象論を展開する前になるべく多くの具体的な群の例を知ってもらおう．

例1. n次**置換群** (permutation group) S_n：n個のものを並べ替える操作全体がなす群．もっと具体的に言うとn本の縦線を持つあみだくじがS_nの元であり，あみだくじaの下にbを連結したものが積baを定める．正三角形の対称性群は3次の置換群と同型（どうけい）である（同型の定義は後で述べる）．

例2. n次**巡回群** (cyclic group) C_nまたは$\mathbb{Z}_n$：n個の数列$(1, 2, 3, \cdots, n-1, n)$を$(2, 3, 4, \cdots, n, 1)$にスライドさせるような並び替え操作を考える．$n$個の数の列の最後尾と先頭がつながって輪になっていると見なして，n個の順序を崩さないように置き

替える（つまり，ずらす）操作全体が n 次巡回群である．巡回群は置換群の部分群である（部分群の定義は後で述べる）．

例 3. **正多角形群** D_n：平面に置かれた正 n 角形を回転したり反転したりして，それ自身に重ねる操作全体のなす群．正多角形群も置換群の部分群である．正三角形の場合は $D_3 = S_3$ となるが，4 角形以上では $D_n \subset S_n$ であって，$D_n = S_n$ ではない．

例 4. **正多面体群**：立体である正 4 面体を空間中で回転してそれ自身に重ねる操作全体を正 4 面体群という．同様に，正 6 面体群，正 8 面体群，正 12 面体群，正 20 面体群も定義される．回転だけでなく鏡映操作も含めることもある（含めないことの方が多い）．正 6 面体群は正 8 面体群と同型，正 12 面体群は正 20 面体群と同型である．

例 5. **2 次元回転群** C_∞ または $SO(2)$：平面に置かれた円板はどんな角度 θ で回してもそれ自身と重なる．この回転操作を $\rho(\theta)$ と書けば，$\rho(\theta)\rho(\theta') = \rho(\theta + \theta')$ が成り立つ．パラメータ θ は連続的に変わることが許される．$\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$ と見なす．このような回転操作全部を集めた群を 2 次元回転群という．なお，SO は special orthogonal transformation group（特殊直交変換群）の頭文字．

例 6. **3 次元回転群** $SO(3)$：3 次元空間の回転操作全部を集めた群である．球面を不変に保つ操作全体のなす群と言ってもよい．液晶の相を分類するときに基本となる群である．3 次元回転は 3 次直交行列 (3 行 3 列の行列 R で，転置行列 R^t が $RR^t = R^t R = I$（単位行列）を満たし，行列式 $\det R = 1$ を満たすもの) で表現され，回転の合成は，行列の積で計算される．

例 7. **結晶群**：平面もしくは空間を埋め尽くす格子は，格子間隔の整数倍の距離だけ横滑りさせる並進移動や，特定の角度の回転や，ある面に対する鏡映で不変であることがある．格子を格子自身に重ねる移動操作全体をその結晶の空間群という．

【図-5　結晶格子を不変に保つような並進・回転・鏡映などの操作とそれらの合成操作全体がなす群が結晶群（空間群）.】

例 8. **正実数乗法群** $\mathbb{R}_+$：正の実数全体の集合を $\mathbb{R}_+$ と書くと，2 つの正の実数 a, b の掛算 ab も正の実数であるし，掛算が結合律を満たしていることは明らかだし，単位元 $1 \in \mathbb{R}_+$ があるし，a の逆数 $a^{-1} \in \mathbb{R}_+$ もあるので，$\mathbb{R}_+$ は群である．群は必ずしも図形を動かす操作の集合である必要はないということをこの例は示している．

例 9. **実数乗法群** $\mathbb{R}^\times$：ゼロ以外の実数全体の集合を $\mathbb{R}^\times$ と書くと，これもまた掛算に関して群になっている．

例 10. **実数加法群** $\mathbb{R}$：2 つの実数 $a, b \in \mathbb{R}$ の和 $a+b$ も実数であるし，和が結合律 $(a+b)+c = a+(b+c)$ を満たしていることも明らかだし，単位元 $0 \in \mathbb{R}$ が存在し，a の逆元 $-a \in \mathbb{R}$ もあるので，$\mathbb{R}$ は足し算に関して群である．群の演算は必ずしも掛算である必要はないことをこの例は示している．

例 11. **一般線形変換群** (general linear transformation group) $GL(n, \mathbb{R})$：実数からなる n 次正方行列で逆行列が存在するもの全体の集合を $GL(n, \mathbb{R})$ と書く．これは行列の積に関して群になる．

以上，群の例を挙げたが，積が定義されていても群ではない集合もあることに注意してほしい．例えば整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ における掛算を考えると，結合律と単位元の存在は満たされているが，逆数の存在は満たされていないので，$\mathbb{Z}$ は掛算に関して群ではない．この他に，結合律を満たさない演算や，単位元が存在しない集合の例を考えてみてほしい．群を理解するためには，群ではないものも知っておく必要があるのだ．

6　群の特徴

いろいろな群があることはわかったが，これらをどう分類したらよいのだろう？ 言い換えると，群の特徴・見どころは何だろう？

1. 有限・無限：群は集合であるから，とりあえず元が何個あるかということは，真っ先に注目してよいだろう．群の元の個数を，その群の**位数** (order) という．例えば n 次巡回群の位数は n であるし，n

次置換群の位数は $n!$ である．正 6 面体群くらいになると元の個数を数えるのはかなり難しくなる（鏡映を含めなければ 24，鏡映を含めるといくつ？）．位数は有限とは限らない．円板の 2 次元回転は連続的にどんな角度でもとれるから，$SO(2)$ の位数は無限である．また，結晶格子の並進は何回でもできるので，結晶群の位数も無限である．

2. 可換・非可換：群のすべての元に関して $ab = ba$ が成り立つならば，その群を**可換群** (commutative group) という．そうでなければ**非可換群** (noncommutative group) という．3 次以上の置換群は非可換群である（だからこそあみだくじの横棒を入れる順序に意味がある）．巡回群は可換群である．

3. 離散・連続：飛び飛びの離散的な操作の集合か，連続的につながっている操作の集合であるかによって群はだいぶ違ってくる．正多角形群や結晶群は**離散群** (discrete group) であるし，2 次元回転群や 3 次元回転群は**連続群** (continuous group) である．

4. コンパクト・非コンパクト：群の元全体が有限なサイズに収まっていることを**コンパクト** (compact) といい，無限にどこまでも広がっていることを非コンパクトという．正多角形群や 2 次元回転群はコンパクトである．3 次元回転群もコンパクトである（3 次元回転はオイラー角で表示できて，オイラー角は有限な範囲に収まることを思い浮かべればよい）．結晶格子は無限にどこまでも並進操作ができるので，結晶群は非コンパクトである．

ある群の特徴を知るためには，とりあえず上の 4 つの項目をチェックするとよい．例えば，置換群は有限・非可換・離散・コンパクト群である．$GL(n, \mathbb{R})$ は無限・（$n \geq 2$ のとき）非可換・連続・非コンパクト群である．もちろんこれだけではその群を理解したことにはならないが，その群のおおまかな特徴は捉えられる．有限か無限か，可換か非可換かといったことで群の性質は大いに異なるし，その群の数学的扱い方も違ってくる．

7　群の間の写像

群がたくさんあることがわかると，今度は群と群の間の関係を知りたくなる．数学では，集合と集合の関係を調べる道具は写像である．写像 $f : X \to Y$ とは，集合 X の任意の元 x に対して集合 Y の元 $f(x)$ を対応させることである．群は集合であるが，ただの集合ではなく，積という演算構造を備えた集合なので，群から群への写像を考えるときは，ただの写像ではなく，積を保つ写像を考えるのが自然である．そこで考え出されたのが以下に述べる準同型写像である．

群 G_1 と群 G_2 があったとする．元 $a, b \in G_1$ に対して積 $a \circ b \in G_1$ が定義されているし，元 $x, y \in G_2$ に対して積 $x \cdot y \in G_2$ が定義されている．しかし $a \cdot y$ といった積が定義されているわけではない．このような状況で，G_1 から G_2 への写像 f で，任意の $a, b \in G_1$ に対して

$$f(a \circ b) = f(a) \cdot f(b)$$

を満たす f を，G_1 から G_2 への**準同型写像** (homomorphism) という．つまり，G_1 の中で積を作ってから f で写したものと，f で写してから G_2 の中で積を作った結果が等しいということである．準同型写像 f は G_1 での積と G_2 での積を連動させている．なお，本によっては「準同形」という字を使っているものもある．

準同型写像の例を挙げよう．実数 $x \in \mathbb{R}$ に正の実数 $e^x \in \mathbb{R}_+$ を対応させる指数関数 $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ は

$$\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$$

を満たすので，準同型写像である．

また，行列 A の行列式を $\det A$ と書くと，

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

が成り立つ．A が逆行列を持つならば $\det\ A \neq 0$ だから，$\det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ は準同型写像である．

また，整数の加法群 $\mathbb{Z}$ について写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を $f(x) = 2x$ で定めると，これも準同型写像である．

一般論として，写像 $f : X \to Y$ が《任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して $x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$》を満たしているとき，f を**単射** (injection) または**一対一写像** (one-to-one mapping) という．また，写像 $f : X \to Y$ が《任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となるような $x \in X$ が存在する》という条件を満たしているとき，f を**全射** (surjection) あるいは**上への写像** (onto-mapping) という．単射かつ全射である写像のことを**全単射** (bijection) という．$f : X \to Y$ が全単射であることは，逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ が存在するための必要十分条件である．

群の準同型写像 $f : G_1 \to G_2$ が全単射でもあるとき，f を**同型写像** (isomorphism) という．また，2つの群 G_1, G_2 の間に同型写像があるとき，G_1 と G_2 は**同型** (isomorphic) であるといい，$G_1 \cong G_2$ と書く．同型な群は「同じ」群と見なされる．

例えば，実数加法群 $\mathbb{R}$ から正実数乗法群 $\mathbb{R}_+$ への指数関数 exp は同型写像である．一方，det : $GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ は同型写像ではない．

8　群の内部構造：部分群

一つの群を眺めただけでも，その内部にはある種の構造というかパターンが埋め込まれていることに気づく．正三角形の対称性群 G の群表 1 をもう一度見ると，これは 6 行 6 列の群表であるが，その中に 2 行 2 列の言わば「ミニ群表」が埋め込まれていることに気づく．例えば表 2 左に取り出した $H = \{e, \sigma_1\}$ は G の部分集合であるが，これだけで積に関して閉じており，単位元も逆元もこの中に存在している．このような集合を部分群と呼ぶのは自然なネーミングであろう．同様に $H' = \{e, \sigma_2\}$ も部分群である．表 2 右に示すような 3 行 3 列のミニ群表もある．

【表-2　正三角形対称性群の部分群の例.】

部分群をきちんと定義しておく．群 G の部分集合 H が，(1) 任意の 2 元 $a, b \in H$ について $ab \in H$，(2) 任意の $a \in H$ について $a^{-1} \in H$ という 2 つの条件を満たしているとき，H を G の**部分群** (subgroup) という．

どんな群 G に対しても，単位元だけからなる集合 $\{e\}$ と，群 G そのものは，必ず G の部分群になっている．この他に部分群が全部でどれだけあるかという問題は，さほど簡単ではない．

9　正規部分群と商群

【表-3　正三角形対称性群の正規部分群と商群.】

何度も引き合いに出すが，正三角形対称性群の群表をよく見ると，$N = \{e, \rho_1, \rho_2\}$ という一団と $N' = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ という一団は，積に関して一塊のように振る舞っていることがわかる．一つの団体を一つの元のようにまとめると表 3 右のようになり，これもまた群表になっている．このようにして作られる群を「群 G の部分群 N を法とする**商群** (quotient group)」といい，G/N と書く．「法とする」という言葉は modulo の訳語だが，慣れないと言いにくいかもしれない．「N を一束として G を区切り，束がいくつできるか数える」というニュアンスを込めて G/N のことを「G を N で割った商群」と呼んでもよい．

いま，部分群 $N = \{e, \rho_1, \rho_2\}$ を一つの束にまとめて商群を作ったが，他の部分群を一束としても商群を作れるのだろうか？ 例えば，部分群 $H = \{e, \sigma_1\}$ を一束にまとめて商群を作れるだろうか？ ちょっとやってみたものが表 4 である．ここまで表を書いてみると，束と束の積が一束にまとまらないことがわかる．どんな部分群で割っても商群ができるわけではないのである．

【表-4　これは商群をうまく作ることができない例.】

「束ねる」という概念を精密化して「同値類」という概念を導入しよう．ある集合 X の任意の 2 元 a, b に対して $a \sim b$ という関係が成り立つか成り立たないか，判定できる状況を考える．例えば，整数の集合において $a - b$ が 2 で割り切りれることを $a \sim b$ と書いてもよい．人間の関係には「a は b よ

りも背が高い」とか「a は b と同じ大学の出身である」とかいろいろな関係があるが，そういうものを抽象化して，ともかく $a \sim b$ の成立の可否が判定できるものを数学的に**関係** (relation) という．なお，“$\sim$” という記号を何と読むかは自由だが，私は「ちょろん」あるいは「にょろ」と読んでいる．

さて，集合 X における関係 $\sim$ が次の 3 条件を満たしているとき，$\sim$ を**同値関係** (equivalence relation) という．(1) 反射律：任意の元 $a \in X$ に対して $a \sim a$ が成立．(2) 対称律：$a \sim b$ ならば $b \sim a$．(3) 推移律：$a \sim b$ かつ $b \sim c$ ならば $a \sim c$．

同値関係があると，互いに同値な元たちを集めて束ねることができる．元 $a \in X$ に対して

$$[a] = \{x \in X \,|\, a \sim x\}$$

は X の部分集合であるが，これを a を**代表元** (representative element) とする**同値類** (equivalence class) という．なお，集合を特定するには，例えば

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

というふうに集合の元を羅列する流儀がある．一方，

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, 1 \leq x \leq 10,\ x \text{ は 2 で割り切れる }\}$$

というふうに集合の元を選ぶ条件を縦棒の右に書く流儀もある．

一般に，集合 X に同値関係が定められると，X は互いに交わりのない同値類に分割され，すべての元はどれか一つの同値類に所属する．同値類を元と見なして集めた集合を

$$X/\!\sim \ = \ \{\, [a] \,|\, a \in X \,\}$$

と書き，同値関係 $\sim$ に関する**商集合** (quotient set) と呼ぶ．

考えている対象が単なる集合ではなく，群の場合は，部分群を使って同値関係を導入することが多い．すなわち，群 G の部分群 H があった場合，任意の 2 元 $a, b \in G$ に対して，積 $a^{-1}b$ が G の元になるのはもちろんのことだが，$a^{-1}b = h$ が H の元になっていたら，$a \sim b$ と書くことにする．$ah = b$ となる元 $h \in H$ が存在することだと言ってもよい．ちょっと検討すると，この $\sim$ は G における同値関係になっていることがわかる．このとき同値類 $[a]$ を H を法とする**左剰余類** (left residue class) という．$[a]$ のことを aH と書くこともある．なぜなら，

$$[a] = aH = \{ah \,|\, h \in H\}$$

となっているから．H に収まり切らなかった余りの a が左側にはみ出しているので左剰余類という（ただし，本によっては左右の流儀が逆転していることもあるので注意してほしい）．

もう少し例を補って説明しよう．G として整数加法群 $G = \mathbb{Z}$ をとろう．H として 2 の倍数全体のなす加法群 $H = 2\mathbb{Z}$ をとろう．H は G の部分群になっている．加法群に対しては群演算 ab は $a + b$ と書いてよい．$a^{-1}b$ のことは加法群の場合は $b - a$ と書いてよい．そうすると「$a^{-1}b$ が H の元である」ことは,「$b - a$ が 2 で割り切れる」ことと言い換えられる．$a - b$ が 2 で割り切れることを $a \sim b$ と書くと，$\sim$ は同値関係になる．同値類は，

$$[0] = \{\cdots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \cdots\}$$
$$[1] = \{\cdots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots\}$$

である．すべての整数は $[0]$ か $[1]$ のどちらかに含まれる．また，代表元を取り替えても同値類は変わらない：$[-2] = [0] = [2] = [4]$. もちろん $[0] \cap [1] = \varnothing$（空集合）である．この場合，商集合は

$$\mathbb{Z}/\!\sim \ = \ \{\, [0], [1] \,\}$$

である．つまり，2 の倍数を一まとめにし，2 で割ったときの余りだけに注目して整数を仲間分けしている．

では，束と束の積が一つの束にまとまるか？というのが次に考えるべき問題である．つまり，表 4 のような失敗が起きないための条件は何か．剰余類 $[a]$ と $[b]$ の積は $[ab]$ で定義するのが自然だが，$[a] = [a']$, $[b] = [b']$ の場合は，代表元として a の代わりに a'，b の代わりに b' を選んでもよいわけ

で，これらで定義した $[a'b']$ が $[ab]$ と等しくなっているか，ということが問題になる．うまい具合に《$[a] = [a']$, $[b] = [b']$ ならば $[ab] = [a'b']$》が成り立つのは，部分群 H が正規部分群と呼ばれる，たちのよい群になっている場合に限られる．そのことを以下に説明しよう．

群 G の部分群 N が次の条件を満たしているとき，N を G の**正規部分群** (normal subgroup) という．条件：任意の $g \in G$ と任意の $n \in N$ に対して，$g^{-1}ng$ がまた N の元である．

この条件が成り立っていると，任意の $b \in G$ と $n \in N$ に対して $b^{-1}nb = n' \in N$ が言える．つまり

$$nb = bn'$$

を満たす $n' \in N$ が存在している．$[a] = [a']$ かつ $[b] = [b']$ とは，$a' = an$, $b' = bk$ を満たす $n, k \in N$ があるということだから，

$$a'b' = (an)(bk) = a(nb)k = a(bn')k = (ab)(n'k)$$

であり，$n'k \in N$ であるから，N を法とした剰余類では $[ab] = [a'b']$ が成り立つ．

同じことを別のやり方で証明して見せよう．群 G の部分集合 S, T があったときに，$ST = \{st \,|\, s \in S,\, t \in T\}$ と書くことにする．つまり S の元を左に，T の元を右に並べて作られる積 st をありったけ集めた集合を ST と書く．G の部分群 H を法とする左剰余類を $[a] = aH$ と書いたのはこの意味である．部分群 H に関しては $HH = H$ が成り立つ．その上，正規部分群 N に対しては $b^{-1}Nb = N$ すなわち $Nb = bN$ が成り立つ．よって，形式的に

$$[a][b] = aNbN = abNN = abN = [ab]$$

が導かれる．一般の部分群では $Hb = bH$ が成り立たない．これが正規部分群でなければ商群がうまく定義できない理由である．表 4 では $H = \{e, \sigma_1\}$ に対して $\rho_1 H = \{\rho_1, \sigma_3\}$ と $H\rho_1 = \{\rho_1, \sigma_2\}$ が一致していない．

正規部分群は初めて学ぶ人には難解だろうと思うが，正規部分群と商群は群論の言わば最初の山場なので，一度は通過してほしかった．準同型定理，直積群，共役類なども説明したかったが，これらは適切な教科書を読んで学んでほしい．

今回の講義のポイントは，(1) 対称性とは，ある操作の下での不変性，(2)「操作されるもの」から切り離して「操作たち」を自立させた世界が群，(3) 群それ自身の性質（可換・非可換など）や内部構造（部分群，商群など）がある，といったことであった．次回は群の表現論を解説しよう．

参考文献

[1] 遠山啓：無限と連続，岩波書店 (1952)．集合論・群論・位相空間論など現代数学の根幹をなす諸概念についてきわめて平明に書かれた本．

[2] 志賀浩二：群論への 30 講，朝倉書店 (1989)．読み易い．群論について一通りのことを知るために最初に読むとよい．

[3] 犬井鉄郎, 田辺行人, 小野寺嘉孝：応用群論 — 群表現と物理学，裳華房 (1980)．群論の物理への応用の解説としては最も完成度の高い本であろう．

[4] 原田耕一郎：群の発見，岩波書店 (2001)．群論の面白さ・奥深さを語る好著．ガロア理論も丁寧に解説されている．

[5] 谷村省吾：理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何 — 双対性の視点から，数理科学 SGC ライブラリ 52, サイエンス社 (2006)．液晶の欠陥の分類に使われるホモトピー群などを解説．

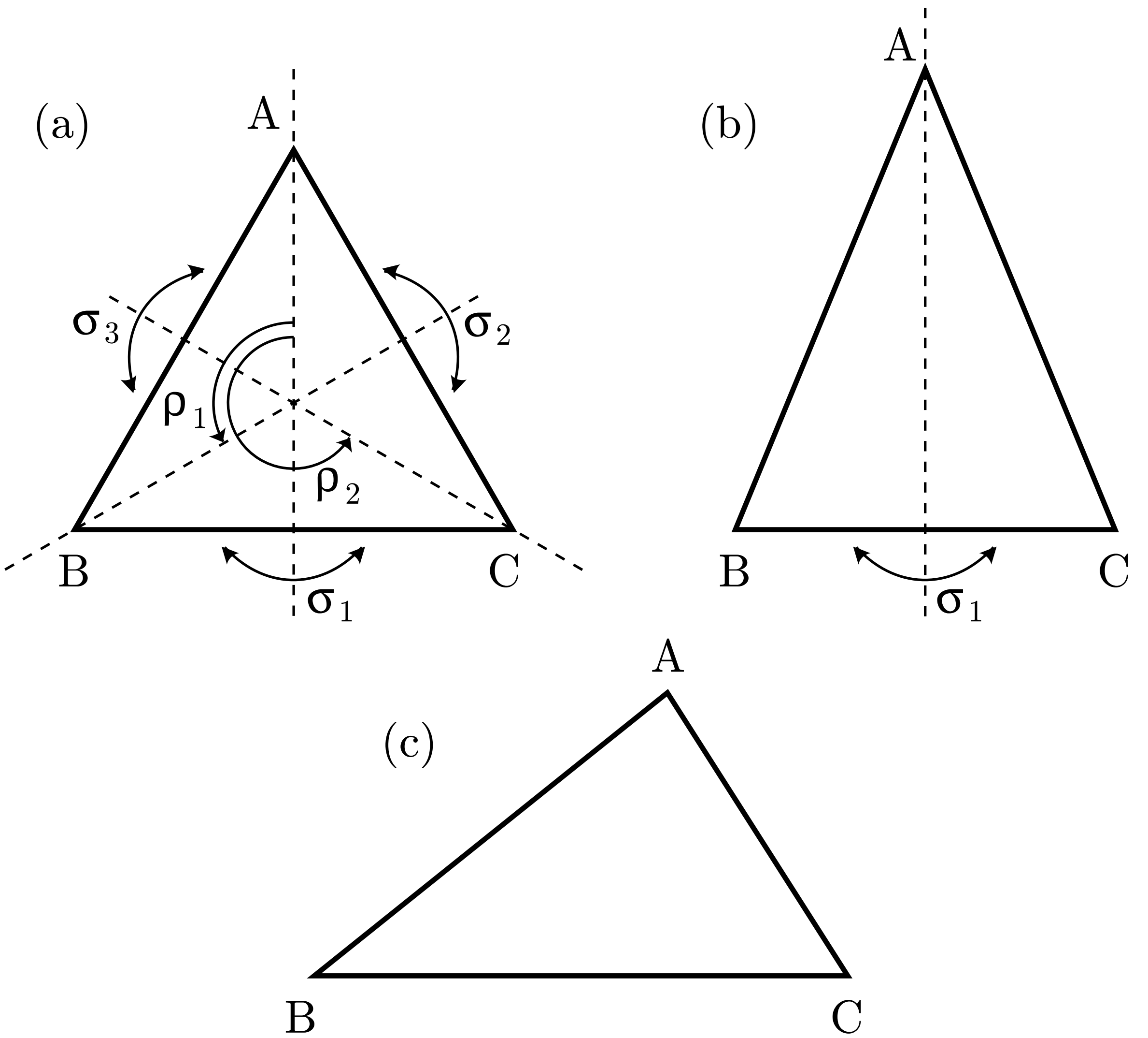

図1

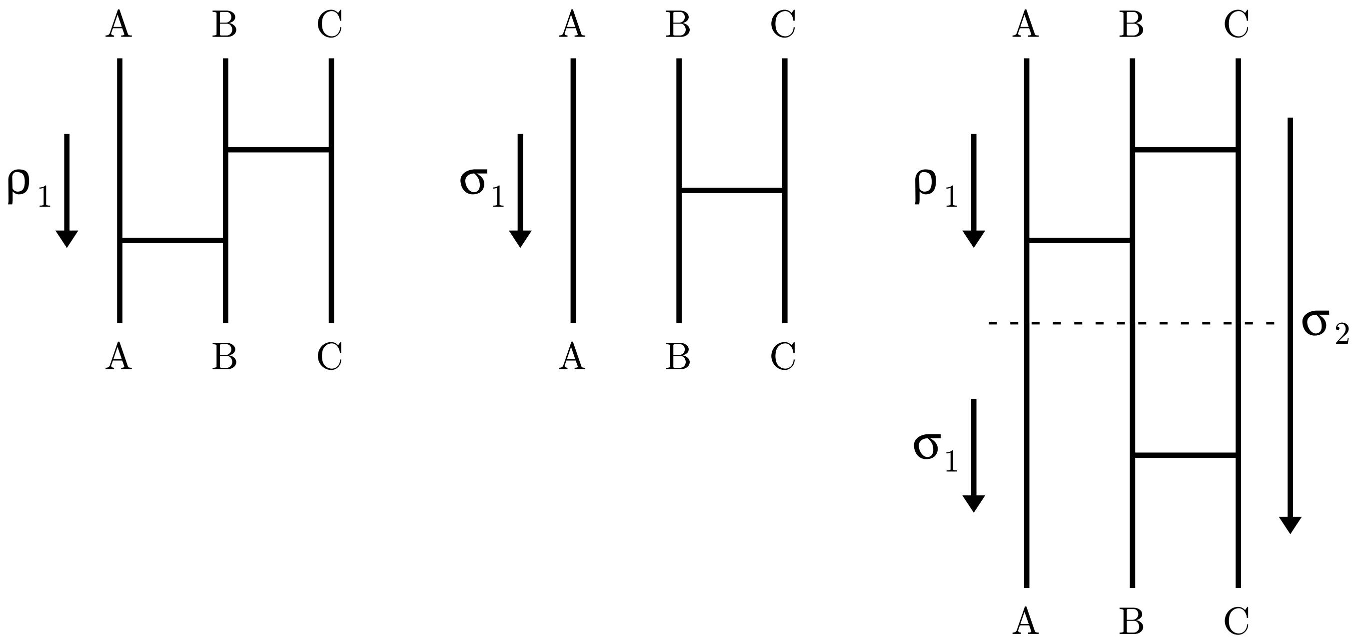

図2

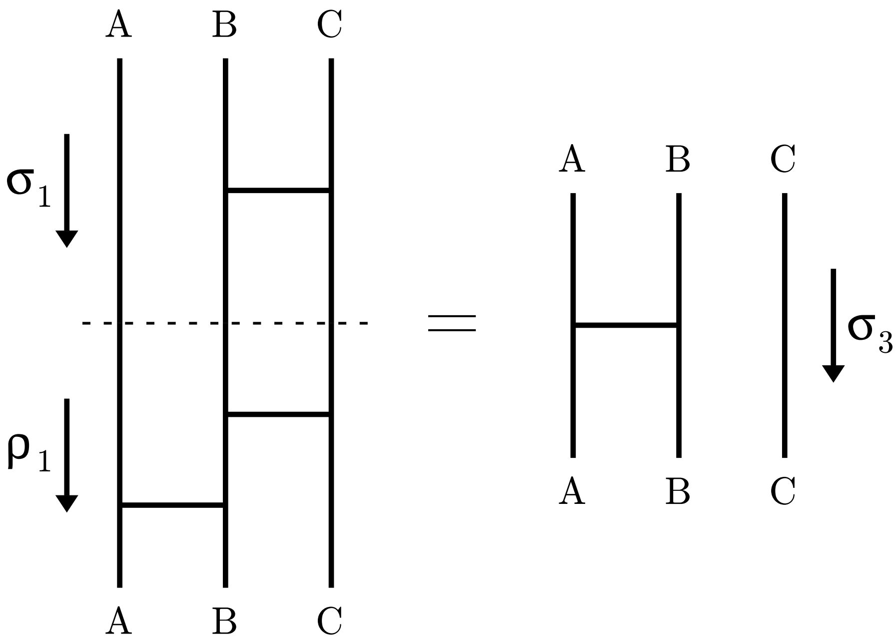

図3

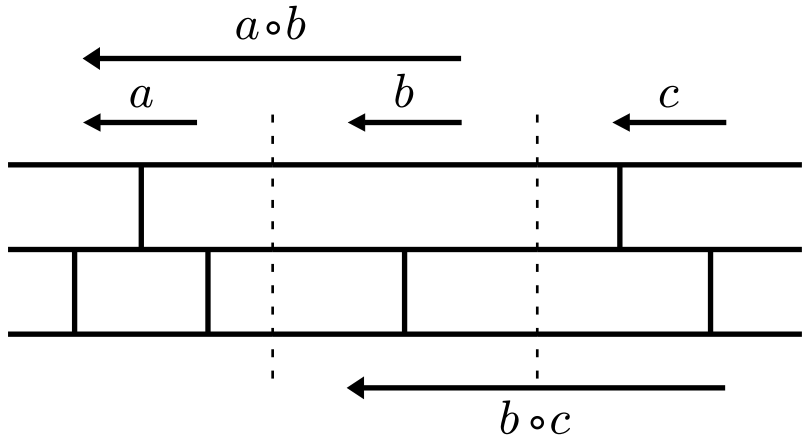

図4

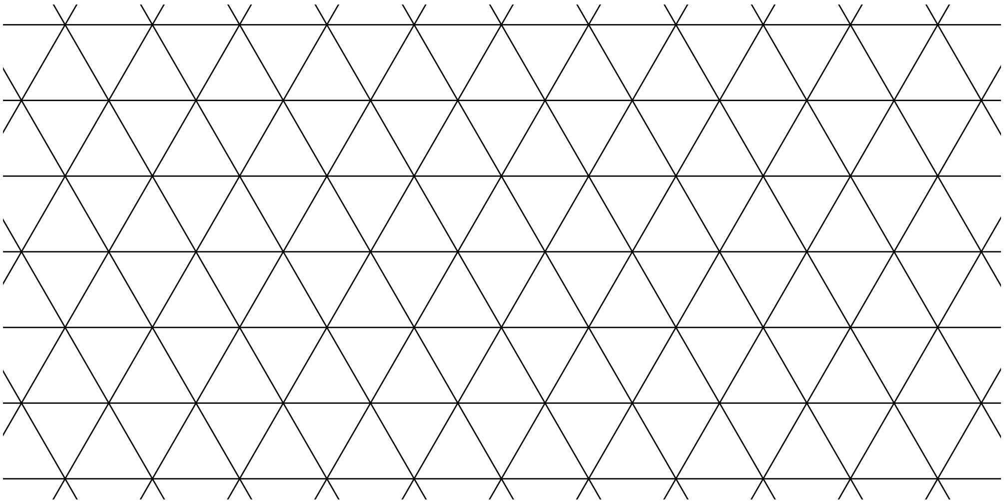

図5

	e	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	σ_3
e	e	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	e	σ_3	σ_1	σ_2
ρ_2	ρ_2	e	ρ_1	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	e	ρ_1	ρ_2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	ρ_2	e	ρ_1
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	ρ_1	ρ_2	e

表1

	e	σ_1
e	e	σ_1
σ_1	σ_1	e

	e	ρ_1	ρ_2
e	e	ρ_1	ρ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	e
ρ_2	ρ_2	e	ρ_1

表2

	e	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	σ_3
e	e	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	e	σ_3	σ_1	σ_2
ρ_2	ρ_2	e	ρ_1	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	e	ρ_1	ρ_2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	ρ_2	e	ρ_1
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	ρ_1	ρ_2	e

	N	N'
N	N	N'
N'	N'	N

表3

	e	σ_1	ρ_1	σ_3	ρ_2	σ_2
e	e	σ_1	ρ_1	σ_3		
σ_1	σ_1	e	σ_2	ρ_2		
ρ_1	ρ_1	σ_3				
σ_3	σ_3	ρ_1				
ρ_2	ρ_2	σ_2				
σ_2	σ_2	ρ_2				

表4