量子力学におけるトポロジーと対称性

谷 村　省 吾

量子力学というと，ミクロの世界だけを伺う顕微鏡のようなイメージを持たれているかもしれないが，じつは，我々の住んでいる空間の全貌を見渡す道具にもなり得るのである．量子力学の視点から，空間の対称性とトポロジーを把握する，という話しをしたい．*1)

1. 対称性

まず，対称性という考えについて，簡単に見直しておこう．対称性とは，何かに何らかの操作を施しても変わらない，ということである．これでは何のことだかわからないかもしれないが，言葉づかいだけ先に説明すると，A という対象に R という操作を施して A' という対象に移したつもりが，A' は元の A と一致していた，というときに，「A は操作 R の下で不変である」とか,「A は操作 R について対称性を持つ」とか言う．

例を挙げよう．図 1 に示すように，二等辺三角形は，頂点から底辺におろした垂線について鏡写しに左右を入れ替えると，元の三角形とぴったり重なる．つまり，二等辺三角形は鏡映の対称性を持つ．一般の三角形は，鏡に写しても，元の形と重ならない．つまり，鏡映の対称性を持たない．正

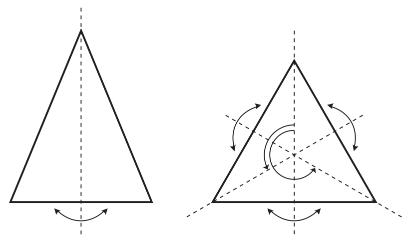

図 1　三角形の対称性

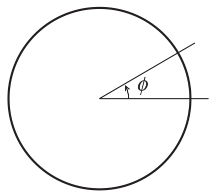

図 2　円の対称性

三角形は，鏡映の対称性を持っているし，さらに，120° ずつの回転対称性も持っている．正方形，正 5 角形，正 6 角形などについても，それを不変にとどめる操作がもっとたくさんあることがわかるだろう．

いま挙げたのは離散対称性の例である．正方形は 90° ずつの回転について不変，というように，操作の仕方が飛び飛びである．それに対して，図 2 に示す円は，任意の角度の回転について不変である．こういう対称性を連続対称性と言う．同様に，直線は，その直線に沿って任意の長さ分だけずらす操作について不変であるし，平面は，その平面に平行な移動について不変である．

*1)　本稿は，数理科学 2002 年 11 月号 (Vol.40-11, No.473) pp.48-53，および，別冊・数理科学「量子の新世紀—量子論のパラダイムとミステリーの交錯」(2006 年) pp.183-189 に掲載された．

2. 力学における対称性と保存則

図形の対称性は，図を描いたり，紙を切り抜いて作った図形を動かして見れば，直観的に理解しやすい．しかし，ここでは，もう少し抽象的な，力学法則の対称性というものについて踏み込んで考えてみよう．

力学とはものの運動を扱う科学で，ある初期条件で，ものを投げるなり，スイッチを入れるなりしたら，その後何が起こるかを予測するものである．何か実験を行うとする．初期状態 A という設定から実験を開始して，時間 t が経過した後には，$U(t)A$ という状態が観測されたとする．$U(t)$ というのは時間の経過を表す操作だと思ってもらえばよい．この段階では，力学の法則に従って，ものごとが時間とともに変化していっているのである．

さて，力学法則の対称性とはこういうことである．R という操作を考える．例えば，実験装置を隣の部屋にいっせいに移動するという操作を考える．初期状態 A を移動させた状態を RA として，ここから実験を再開すると，時間 t が経過した後には，$U(t)RA$ という状態が観測されることになる．

まとめると，実験装置を移動してから，実験を行った結果は，$U(t)RA$ である．もし，実験を行ってから，実験装置を移動すれば，その結果は，$RU(t)A$ である．ここで問題になるのは，$U(t)RA$ と $RU(t)A$ は一致するだろうか，ということである．図式で書くとこんなふうになる：

$$\begin{array}{cccc} & & \text{移動操作} & \\ & A & \longrightarrow & RA \\ \text{時間発展} & \downarrow & & \downarrow \\ & & & U(t)RA \\ & U(t)A & \longrightarrow & RU(t)A \end{array}$$

標語的には，

$$U(t)R = RU(t) \tag{1}$$

か？と問うている．

力学の法則においては，$U(t)$ と R は順序交換可能である．つまり，実験装置を隣の部屋に置いても，実験結果は変わらないのである．このことを，力学法則は並進移動についての対称性を持つ，と言う．これは当たり前のようなことだが，じつは当たり前ではない．ある人の実験室では起きるという現象が，他の人が別の実験室で試そうとしても起きないような現象であっては困るのである．どこでやっても同じ結果になるべきである．

力学法則は，並進移動の対称性のほかにも，回転対称性，少し高級になるけれど，相対性理論のポアンカレ対称性などというものも持っている．

対称性は，物理法則が普遍的に成り立つために最低限必要な条件みたいなものだが，もっと積極的な意味も持っている．古典力学をラグランジュ形式という形に定式化すると，対称性があれば，保存量がある，ということが証明される．これをネーターの定理と言う．ハミルトン形式まで持っていくと，逆に，保存量があれば，それは連続対称性の生成子であり，したがって対称性がある，ということも証明される．

ネーターの定理の内容をざっと見よう．ネーターの定理は，無限小変換 $q_i \to q_i + \varepsilon\,\varphi_i(q)$ (ε は無限小パラメータ) の下で，ラグランジアンが

$$L(q,\dot{q}) \to L(q,\dot{q}) + \varepsilon\,\frac{dW(q)}{dt} \tag{2}$$

だけの変化しか受けないならば ($W = 0$ の場合 L は不変，そうでない場合 L は準不変であると言う)，

$$G := \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\varphi_i(q) - W \tag{3}$$

は保存量であることを主張するものである．証明はただの計算問題である：

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\varphi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\varphi_i\right] - \frac{dW}{dt} \\ &= \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\varphi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\varphi}_i\right] - \frac{dW}{dt} \\ &= \frac{\delta L}{\delta \varepsilon} - \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dt} - \frac{dW}{dt} = 0. \end{aligned}$$

1 行目から 2 行目に移るときにオイラー・ラグランジュ方程式を用いた．

量子力学では，対称性と保存則の関係はもっと直接的である．$U(t)$ は時間発展演算子であり，$U(t) = e^{-iHt/\hbar}$ で与えられる．ハイゼンベルグの運動方程式を思い出せば，対称性 (1) は，即，R の保存則を意味することがわかるだろう．

3. 磁場中の力学と保存量

さて，力学系の例として，磁場中の荷電粒子の運動を考えよう．磁場中を荷電粒子が運動すると，ローレンツ力を受けて粒子の進行方向が曲げられる，という現象は，じつにありふれた出来事である．テレビのブラウン管や，電子レンジのマグネトロンは，電子の進行方向を磁場で制御したり，電子に円軌道を描かせたりする装置である．太陽から吹き出された荷電粒子が，地球の磁場でその方向を曲げられて，北極や南極に向かって降り注いで生じるのが，オーロラである．おおざっぱな言い方をすれば，固体中の電子の進行方向が磁場で曲げられるのが，ホール効果である．

そういった物理的状況は面白いし，忘れてはいけないのだが，ここでは理想的な状況として，一様な磁場の場合だけを考える．まずニュートン力学の視点から考察を始める．3 次元空間磁場中の荷電粒子の運動方程式はローレンツ力

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{4}$$

で与えられる．m は粒子の質量，e は電荷，$\boldsymbol{v}$ は速度であることはいいだろう．磁場 $\boldsymbol{B}$ が一定ならば，荷電粒子は，いわゆるサイクロトロン運動を行い，らせん軌道を描く (図 3)．このとき，次の保存量が存在する：

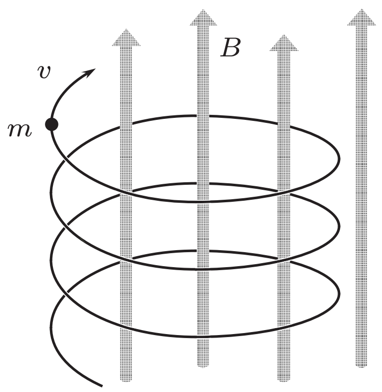

図 3　サイクロトロン運動

$$E = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 \tag{5}$$

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} - e\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B} \tag{6}$$

$$Q = m\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{B} \tag{7}$$

$$J = (m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} - \frac{1}{2}e\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B})) \cdot \boldsymbol{B} \tag{8}$$

これらが保存量であることは，時間微分を計算すればゼロになることで直接確かめられる．ローレンツ力は進行方向に垂直なので，力学の意味の仕事をしない．だから運動エネルギー E が保存される．ローレンツ力は磁場にも垂直なので，磁場に平行な運動量成分 Q が保存される．じつは運動方程式 (4) は

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \frac{d}{dt}(e\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}) \tag{9}$$

と書き換えられることに気づけば，(6) に定義した運動量 $\boldsymbol{p}$ の 3 つの成分すべてが保存することがわかる．磁場に平行な軸の周りの回転対称性が，角運動量 J の保存を許す．こうして 6 つの保存量が見つかる．しかし，これらのうち Q は独立な保存量ではない．独立な保存量は $E, \boldsymbol{p}, J$ の合計 $1+3+1=5$ つである．一方，自由度の数は $3 \times 2 = 6$ つ．したがってこの系は可積分である．

次にラグランジュ力学の視点で同じ系を見てみる．ラグランジアンで力学を書こうとすると，力そのものではなく，ポテンシャルを導入することが必要になる．それがちょっとした問題のタネになる．

ここでは 2 次元に話を限る．$\boldsymbol{R}^2$ 上の一様磁場は，B を実数定数として，$F = dA = Bdx \wedge dy$ で与えられる．これはもちろん並進不変である．ベクトルポテンシャルは，例えば $A = Bx\,dy$ で与えられる．これは y 方向の移動について不変だが，x 方向の移動では不変ではない．しかし

$$\begin{aligned} A(x+a) &= Bx\,dy + Ba\,dy \\ &= A(x) + d(Bay) \end{aligned} \tag{10}$$

であるから，x 方向の平行移動と同時にゲージ変換を施せば，A は不変である．ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + Bx\dot{y} \tag{11}$$

である．適当に単位系を取り直して，質量 m や電荷 e は 1 にした．運動方程式は

$$\ddot{x} = B\dot{y}, \qquad \ddot{y} = -B\dot{x} \tag{12}$$

である．x 方向の平行移動の下で L は

$$L(x+a) - L(x) = Ba\dot{y} = \frac{d}{dt}(Bay) \tag{13}$$

という全微分だけの変化を受けるという意味で準不変であるし，y 方向の平行移動の下で L は不変であるから，ネーターの定理 (3) は保存量

$$\tilde{p}_x := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - By = p_x - By = \dot{x} - By, \tag{14}$$
$$p_y := \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + Bx \tag{15}$$

の存在を教えてくれる．

同じ系は，ハミルトニアンとシンプレクティック形式

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}(p_y - Bx)^2, \tag{16}$$
$$\omega = dp_x \wedge dx + dp_y \wedge dy \tag{17}$$

でも定義される．対応する運動方程式は,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x, & \dot{p}_x &= B(p_y - Bx), \\ \dot{y} &= p_y - Bx, & \dot{p}_y &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

このときも，保存量は (14), (15) で与えられる．

また，座標変換 $p_y \to p_y + Bx$ を施せば，(16), (17) は

$$H' = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2), \tag{19}$$
$$\omega' = dp_x \wedge dx + dp_y \wedge dy + Bdx \wedge dy \tag{20}$$

に移る．運動方程式は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x, & \dot{p}_x &= Bp_y, \\ \dot{y} &= p_y, & \dot{p}_y &= -Bp_x \end{aligned} \tag{21}$$

となる．このとき

$$\tilde{p}_x := p_x - By, \qquad \tilde{p}_y := p_y + Bx \tag{22}$$

が保存量である．$H', \tilde{p}_x, \tilde{p}_y$ が保存量であることから,

$$H' = \frac{1}{2}(By + \tilde{p}_x)^2 + \frac{1}{2}(Bx - \tilde{p}_y)^2 = E \tag{23}$$

が定数であり，この座標系では，(x, y) 平面に射影した軌道は，$(\tilde{p}_y/B, -\tilde{p}_x/B)$ を中心とする半径 $\sqrt{2E}/B$ の円であり，(p_x, p_y) 平面に射影した軌道は，$(0, 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{2E}$ の円である．

4. 磁場中の量子力学

ユークリッド空間のまま，量子力学に視点を移してみよう．ハミルトニアン (16) に対応する量子力学系のシュレディンガー方程式は

$$\begin{aligned} H\psi &= \frac{1}{2}\left[\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y} - Bx\right)^2\right]\psi \\ &= E\psi \end{aligned} \tag{24}$$

である．量子効果がどこに現れるか追跡していくために，プランク定数 $\hbar$ を 1 にせずに残しておく．H と可換な演算子は

$$\tilde{P}_x := -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} - By, \quad P_y := -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} \tag{25}$$

である．これらが生成するユニタリ変換は

$$\begin{aligned} (U_x(a)\psi)(x, y) &= e^{-i\tilde{P}_x a/\hbar}\psi(x, y) \\ &= e^{iBay/\hbar}\psi(x - a, y) \end{aligned} \tag{26}$$
$$\begin{aligned} (U_y(b)\psi)(x, y) &= e^{-iP_y b/\hbar}\psi(x, y) \\ &= \psi(x, y - b) \end{aligned} \tag{27}$$

である．とくに $U_x(a)$ は平行移動とゲージ変換の合成になっていることに注意してほしい．x 方向，y 方向の平行移動は可換ではない：

$$U_x(a)U_y(b)U_x(-a)U_y(-b) = e^{iBab/\hbar}. \tag{28}$$

このように磁場の影響で非可換になった並進対称性の群を，磁気並進群と言う．

連続並進対称性があるので，変数分離ができる．例えば，P_y の固有値を $\hbar k$ として,

$$\psi(x,y) = e^{iky}\phi(x) \tag{29}$$

とおくと，シュレディンガー方程式 (24) は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(Bx - \hbar k)^2\right]\phi(x) = E\phi(x) \tag{30}$$

となり，調和振動子に帰着する．エネルギー固有値は

$$E = \hbar|B|(n+\frac{1}{2}) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{31}$$

となる．これはいわゆるランダウレベルに他ならない．各固有値は，$-\infty < k < \infty$ について無限重に縮退している．

5. トーラス

ここまでは 2 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^2$ 上での話しである．これをトーラス T^2 上で考えるとどうなるか．トーラスは，一辺の長さが 1 の正方形の対辺上の点を同一視して構成される (図 4)．言い換えると，任意の 2 つの整数 $(m,n) \in \boldsymbol{Z}^2$ について，$(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$ の点を，$(x+m, y+n)$ と同一視することによってトーラスは得られる．従って，トーラス上の粒子について物理量 $f(x,y)$ を考えると，それは $f(x+1,y) = f(x,y+1) = f(x,y)$ を満たす周期関数でなければならない．そうでなければ，$f(x,y)$ はトーラス上の一価関数とは言えない．

T^2 の上では，(16) の H や (14) の $\tilde{p}_x$ は**一価関数ではない．**また，(19) の H' は一価であっても，(22) の $\tilde{p}_x$ や $\tilde{p}_y$ は一価関数ではない．つまり，**平行移動の生成子が大域的には存在しない．**

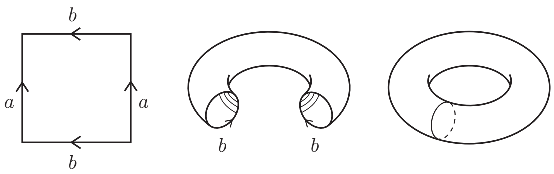

図 4　2 次元トーラスは正方形の対辺の同一視によって作られる．

6. トーラス磁場中の量子力学

この事情は量子力学でより鮮明になる．シュレディンガー方程式 (24) が T^2 上でよく定義されるためには，波動関数が擬周期条件

$$\begin{aligned}\psi(x+1,y) &= e^{iBy/\hbar}\psi(x,y),\\ \psi(x,y+1) &= \psi(x,y)\end{aligned} \tag{32}$$

を満たせばよい．つまり，この条件で定義される関数空間の上で H は自己共役作用素となる．x 方向と y 方向の条件が両立するためには，

$$\begin{aligned}\psi(x+1,y+1) &= e^{iB(y+1)/\hbar}\psi(x,y+1)\\ &= e^{iB/\hbar}e^{iBy/\hbar}\psi(x,y)\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}\psi(x+1,y+1) &= \psi(x+1,y)\\ &= e^{iBy/\hbar}\psi(x,y)\end{aligned}$$

とが一致しなければならないから，$e^{iB/\hbar} = 1$ でなければならない．つまり，

$$B = 2\pi\hbar q \tag{33}$$

で q は整数でなければならない．つまり磁束が量子化される．q をトーラス磁気数という．

トーラス上であっても，(25) の $\tilde{P}_x$, P_y は (24) の H と可換である．ところが，擬周期条件を満たす ψ にこれらが作用してできた $P\psi$ は擬周期条件を満たさない：

$$\tilde{P}_x\psi(x,y+1) = (\tilde{P}_x - B)\psi(x,y), \tag{34}$$

$$P_y\psi(x+1,y) = e^{iBy/\hbar}(P_y + B)\psi(x,y) \tag{35}$$

つまり，これらの演算子の作用は与えられた関数空間の上で閉じていない．すなわち，**トーラス上では無限小平行移動の生成子が存在しない．**しかし有限長さの平行移動なら可能性がある．ユニタリ変換 (26), (27) によって平行移動された波動関数がまた擬周期条件 (32) を満たすかどうか調べると，(33) を使って，

$$
\begin{aligned}
&(U_x(a)\psi)(x,y+1)\\
&= e^{iBa(y+1)/\hbar}\psi(x-a,y+1)\\
&= e^{iBa/\hbar}e^{iBay/\hbar}\psi(x-a,y)\\
&= e^{2\pi iqa}(U_x(a)\psi)(x,y),\\
&(U_y(b)\psi)(x+1,y)\\
&= \psi(x+1,y-b)\\
&= e^{iB(y-b)/\hbar}\psi(x,y-b)\\
&= e^{-iBb/\hbar}e^{iBy/\hbar}\psi(x,y-b)\\
&= e^{-2\pi iqb}e^{iBy/\hbar}(U_y(b)\psi)(x,y)
\end{aligned}
$$

となるから，$U_x(a), U_y(b)$ によって平行移動された波動関数がまた擬周期条件 (32) を満たすためには，

$$a = \frac{n_x}{q}, \qquad b = \frac{n_y}{q} \tag{36}$$

で n_x, n_y が整数であることが必要十分である．つまり，**対称性は離散的な平行移動に限られる．**また，擬周期関数の上で，

$$
\begin{aligned}
(U_x(1)\psi)(x,y) &= e^{iBy/\hbar}\psi(x-1,y)\\
&= \psi(x,y), \qquad (37)\\
(U_y(1)\psi)(x,y) &= \psi(x,y-1) = \psi(x,y) \qquad (38)
\end{aligned}
$$

となるから，長さ 1 の平行移動 $U_x(1), U_y(1)$ は恒等変換であることがわかる．しかし，(28) に見たように，U_x, U_y の作用はスカラー倍の分だけ非可換である．したがって，量子系の対称性は $\boldsymbol{Z}_q\times\boldsymbol{Z}_q$ の射影表現である．($\boldsymbol{Z}_q = \boldsymbol{Z}/q\boldsymbol{Z}$.)

この離散並進対称性の表現は次のように構成される．表現空間の基底を $|0\rangle, |1\rangle, \cdots, |q-1\rangle$ と書く．平行移動の演算子の作用を

$$U_x\left(\frac{n_x}{q}\right)|m\rangle = |m+n_x \,(\mathrm{mod}\, q)\rangle \tag{39}$$

$$U_y\left(\frac{n_y}{q}\right)|m\rangle = e^{-2\pi i n_y m/q}|m\rangle \tag{40}$$

で定める．これらが (28) を満たしていることは，順次，演算子の作用を計算すれば，直接確認できる．これら基底ベクトルで張られる空間は既約表現空間になっており，したがって各エネルギー固有値 (31) は q 重に縮退している．トーラス磁気数 1 つごとに，エネルギー準位が 1 つずつある，と解釈してよい．

7. 並進対称性の破れのしかけ

さて，いままで議論してきたことをまとめてみよう．一様磁場は，磁場がどこでも一定であるということを意味しており，したがって並進移動について不変である．ところが量子力学を定式化するためには，磁場そのものではなく，ベクトルポテンシャルを用いなければならない．ベクトルポテンシャルを微分すると磁場になるのだから，磁場がゼロではないときは，ベクトルポテンシャルは一定ではあり得ない．つまり (10) に見たように，ベクトルポテンシャルは場所場所によって異なる値を持つ．しかし，このことは，すぐには並進対称性の破れにはつながらない．並進移動しつつ，ゲージ変換すれば，またベクトルポテンシャルの不変性を回復させることができるからだ．これが (26) で与えた変換に他ならない．つまり x 方向に長さ a だけ移動しつつ，$e^{iBay/\hbar}$ だけゲージ変換を施した波動関数は，同じシュレディンガー方程式 (24) に従う．

ところが，舞台がトーラスになると，逃げ道がふさがれてしまう．トーラスは，右の端と左の端，上の端と下の端がつながっているので，そこを動き回る粒子の波動関数は，(32) の擬周期条件を満たさなければならない．そうすると，まずトーラスを貫く磁束 B が勝手な値をとることが許されず，(33) に示したように $2\pi\hbar$ の整数倍という飛び飛びの値に量子化される．ゲージ変換関数 $e^{iBay/\hbar}$ も，y について周期 1 の周期関数でなければならず，したがって，移動の歩幅 a も，Ba が $2\pi\hbar$ の整数倍となるような値に制限される．けっきょく，並進対称性は離散対称性に限られる．

こうした対称性の破れは，量子力学に独特のものであって，古典力学には現れない．古典力学には波動関数というものがないので，擬周期条件を課す，という対象がないからである．磁束の量子化

条件 (33) において，形式的にプランク定数 $\hbar$ をゼロにすると，磁束の量子化は消えてしまう．トーラス磁場中で古典力学を定式化すると，保存量は局所的には定義されるが，大域的な一価関数として定義されない，で，おしまいである．量子力学を定式化すると，連続対称性は破れているが，歩幅を量子化した離散対称性なら残っていることがわかる．

8. 量子力学は世界を見渡す

ユークリッド空間と，トーラスとは，局所的には同形であるが，量子力学は，いつも空間全体を眺める性格があるため，これら２つの空間の違いを見分けるのである．空間のトポロジーと，量子力学の関わりは，至る所に発見される．一様磁場という，こんな単純な系でも，トポロジーの違いは対称性の違いとして，はっきりと見て取れる，という例をここでは挙げた．世界の大域を見渡す視点を持っていれば，また新たなトポロジーと量子力学の関わりを見つけられるだろう．量子力学の視点を通して，我々の空間が，ミクロやマクロのスケールでどんな形をしているのか知ることが，筆者の夢である．

この論考は，坂本眞人氏（神戸大学）との共同研究を通じて深められたものである．氏に感謝している．

参考文献

1) 物理における対称性を議論したユニークな本として，R.P. ファインマン（江沢洋訳）「物理法則はいかにして発見されたか」岩波現代文庫 (2001) と，坂東昌子「物理と対称性：クォークから進化まで」丸善 (1996) を挙げておく．
2) ネーターの定理とその逆，可積分な力学系などについては，大貫義郎, 吉田春夫「力学」岩波書店 (1994).
3) 量子力学の対称性については，河原林研「量子力学」岩波書店 (1993) が読みやすい．
4) おそらく最初に磁気並進群を定義し，固体物理学の立場から，磁場と電子のエネルギースペクトルとの関係を論じた論文は，E. Brown, Phys. Rev. **133**, A1038 (1964). J. Zak, Phys. Rev. **134**, A1602 (1964); 同 A1607 (1964).
5) 素粒子論の立場から，磁場による空間の対称性の破れを論じた論文として，S. Matsumoto, M. Sakamoto, S. Tanimura, Phys. Lett. B **518**, 163 (2001), hep-th/0105196. M. Sakamoto, S. Tanimura, Phys. Rev. D **65**, 065004 (2002), hep-th/0108208.
6) n 次元トーラスにおける磁気並進群の表現論を調べた論文として，S. Tanimura, hep-th/0205053. ここに他の文献の詳しいリストもある．
7) 上に挙げた論文を理解するためには，ファイバー束と接続の微分幾何学の知識が必要である．中原幹夫（中原幹夫, 佐久間一浩訳）「理論物理学のための幾何学とトポロジー」(2 巻) ピアソン・エデュケーション (2000, 2001) などをお勧めする．

（たにむら・しょうご，京都大学大学院工学研究科）