座標系によらない量子力学，多様体上の量子力学

もっと普遍に！もっと自由に！

谷 村 省 吾

1. 「座標系によらない」とはどういうことか？

[*1] 本特集のタイトル「幾何学的物理観」を見ているうちにメラメラと燃える想いがこみ上げてきた．私が熱い想いを込めて提起したいのは「なぜ物理に幾何学が必要なのだろう？なぜ物理に幾何学はこうも有効なのだろう？」という問いである．この問いにはこう答えられる．結局，物理学は，観測者ごとに違って見えるさまざまな現象を，普遍的法則によって捉えようとする試みである．一方，幾何学は，座標系の採り方によって見かけが変わる図形から，座標系によらない不変な性質や不変な関係を取り出そうとする数学である．したがって幾何学が物理学を語るのに適切な言語になるのは，当然のなりゆきなのである．

「座標系によらない」，これは英語の「coordinate free」の訳語であろう．座標とは，つまるところ数字の羅列である．物理実験のデータというのも，見た目は数字の羅列である．そこから何か意味のある情報を引き出せるか？例えば，平面上の点 A の座標は (a_1, a_2) という実数の組である．もっと具体的には $(3.14, 1.75)$ といった数値があてはまるのだが，それは何でもよい．点 B, 点 C の座標は (b_1, b_2), (c_1, c_2) といった具合である．

これで点を捉えたか，と言われれば，捉えたとも言えるし，それで何かわかったか，と言われれば，大したことはまだわからないとも言える．そもそも座標軸の設定しだいで座標の値はいくらでも変わってしまう．図 1 には，座標軸を平行移動とさらに回転した結果，点 A の座標が (a'_1, a'_2) に変わる様子が示してある．こうして見ると座標とはいかにも恣意的で，あてにならないものに見えるが，それでもあてになる情報を引き出すことができるのである．例えば，座標系を変えても

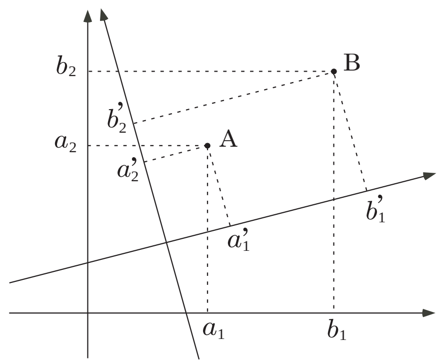

図 1 直交座標の平行移動と回転

$$
\begin{aligned}
L^2 &= (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 \\
&= (b'_1 - a'_1)^2 + (b'_2 - a'_2)^2
\end{aligned}
$$

という量は変わらない．もう少し正確に言うと，座標軸を回転したり平行移動したりしても L の値は変わらない．この L は「点 A と点 B の距離」と呼ばれる．座標の数値を処理して，座標系によらない，本質的な情報を引き出したのだ．こういう処理を，実験物理学者は「データの解析」という．

[*1] 本稿は数理科学（サイエンス社）2004 年 2 月号 (Vol.42-2, No.488) pp.8-14 に掲載された．

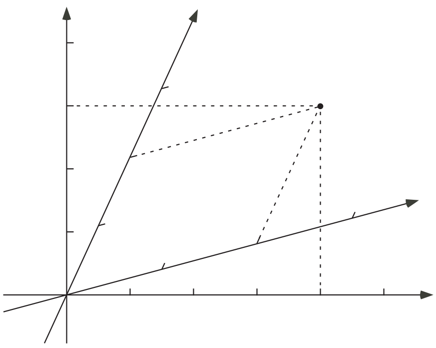

図 2　アフィン変換

また，3 点 A, B, C に対して

$$\begin{aligned} 2S &= (b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1) \\ &= (b_1' - a_1')(c_2' - a_2') - (b_2' - a_2')(c_1' - a_1') \end{aligned}$$

という量も，座標系によらない．この S は「三角形 ABC の面積」と呼ばれる．

座標変換をするときは，どんな変換をやってよいか限定しておく必要がある．例えば，座標軸の角度や目盛りの幅を変えてしまうような変換は，アフィン変換と呼ばれるが，これをしてしまうと長さ L は不変量ではなくなる．回転と平行移動に限る変換はユークリッド変換と呼ばれる．

「やってよい変換」の範囲を設定することが群の概念に通ずる．変換群を決めると「その変換の下で不変な本質」と「変化してしまう見かけだおしの性質」のふるいわけがなされる．こういうことをはっきり意識したのは，代数の文脈ではガロアであり，幾何学の文脈ではクラインであろう．

2. 物理における変換論の成功

変化と不変というふるいわけが物理学で意味を持つ例を挙げれば，きりがない．エネルギーは，物体の運動の過程で不変なものとして見出された．エントロピーは，物質の熱的変化の前後でやはり不変にとどまるものとして見出された．ニュートンの力学の定式化から，オイラー・ラグランジュの定式化，ハミルトン・ヤコビの定式化と進むにしたがって,「やってよい座標変換」の範囲が拡がり，強力な計算道具が得られただけでなく，対称性や可積分性など力学の本質の理解が進んできた．さらに時間座標と空間座標を混ぜるようなローレンツ変換が案出されると，それで変わらないことこそが時空の本質なのだとアインシュタインやミンコフスキーが見抜いた．一般相対性理論[1] まで来ると，時空は，座標変換を縦横無尽に，しかもつぎはぎにしてよい多様体という舞台であり，その上で不変な場の力学として物理が捉えられるようになってきた．20 世紀半ば以降，さまざまな素粒子が見つかると，粒子の種類を変えてしてしまうような，例えば陽子を Λ（ラムダ）粒子[*2] に変えるような（実際に手で実行することはできないという意味で）仮想的な変換群を考えることによって，見かけが違うだけで本質的には同一な素粒子がどれだけあるかという分類がなされた．変換群を的確に設定すると，すでに見つかった粒子を分類できるだけでなく，これから見つかるであろう粒子まで予言できるようになった[2].「変化と不変」というふるいわけで物理学は成功してきた，と言うのは言い過ぎだろうか？

3. 座標系によらない量子力学

物理学と幾何学の関わりの経緯や深さについては，各方面の専門家たちが本特集を通して語られることなので，この記事では，とくに量子力学における幾何学の役割について残りの紙数で議論しよう．

座標系によらない量子力学という言葉には，次の二つの意味を込めたい．一つは，ヒルベルト空間の選び方によらないという意味．これは表現論とユニタリ変換論というところに行き着く．もう一つは，量子力学を設定する舞台を多様体に拡張しようという呼びかけの意味である．

第一の，量子力学はヒルベルト空間の選び方に

*2）　いま，Λ 粒子とは何か知っている必要はない．とにかく，ある粒子を別の種類の粒子で置き換えてしまうような大胆な変換も，それで何かわかるなら，仮想してもいい，ということなのだ．

よらないという主張について少し説明しよう．量子力学の定式化には，代表的には，ハイゼンベルグによる行列力学形式と，シュレーディンガーによる波動力学形式がある．ハイゼンベルグは，物理量は行列であり，ある代数関係を満たすものだと設定した．行列を対角化できれば対角成分がその物理量の値を決め，非対角成分があればその絶対値 2 乗が遷移確率に比例していると解釈した．シュレーディンガーは，波動関数が満たす偏微分方程式を書き下し，その固有値問題を解いて，量子化されたエネルギー準位を求めるという枠組みを与えた．見かけはまったく異なる二つの定式化であったが，シュレーディンガーは両者が同値であることを示した．また，フォン・ノイマンは，両者は同一の正準交換関係を $l^2(\boldsymbol{C})$ というヒルベルト空間上で表現したか，$L^2(\boldsymbol{R})$ というヒルベルト空間上で表現したかだけの違いしかなく，両者はユニタリ変換で移りあうということを明らかにした．こうして，この種の見かけの違いは同一の公理系に吸収されていった．後知恵的に言うと，ハイゼンベルグは離散スペクトルを念頭に置いて状態ベクトルを $\langle n|\psi\rangle$ $(n=0,1,2,\cdots)$ という数列で捉えていたのであり，シュレーディンガーは連続スペクトルを持ってきて状態ベクトルを $\langle x|\psi\rangle$ $(-\infty < x < \infty)$ という関数で捉えていたのである．おおざっぱに言えば，両者は座標軸の採り方程度の違いしかなかったのである．これが第一の「座標系によらない量子力学」の現れである．

第二の，量子力学を設定する舞台を多様体に拡張しようという呼びかけについては，詳しい説明が必要だろう．これにとりかかることにする．

4. 多様体上の量子力学

多様体は，一つの座標系で捉えきれるとは限らず，複数の座標系を座標変換で少しずつ貼り合わせてようやく覆われる空間である．ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ は 1 枚の座標系で覆える，たちのいい多様体である．球面 S^n，トーラス T^n などは 1 枚の座標系では覆えない多様体である．

量子力学は，物理量の演算子がなす代数と，演算子の作用を受けるヒルベルト空間で定義される，というのがフォン・ノイマン以来の量子力学の枠組みである．ところがこの枠組みは，多様体を扱うにはちょっと融通が利かないのである．そのことを見てみよう．

$\boldsymbol{R}^n$ 上の量子力学は次のように定式化される．自己共役演算子 $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \cdots, \hat{q}_n, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \cdots, \hat{p}_n$ は正準交換関係

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i\delta_{jk}\hat{1}, \quad [\hat{q}_j, \hat{q}_k] = [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0$$

を満たして代数 $\mathcal{A}$ を生成する．代数 $\mathcal{A}$ の既約表現ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を得たとき，組 $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ を $\boldsymbol{R}^n$ 上の量子力学と呼び，$\hat{q}_j$ を位置演算子，$\hat{p}_k$ を運動量演算子と呼ぶ．これのどこが $\boldsymbol{R}^n$ 上の量子力学なのか？それは表現空間として $\mathcal{H} = L^2(\boldsymbol{R}^n)$ を採って $\psi(q_1, q_2, \cdots, q_n) \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ の上で

$$\hat{q}_j \psi(q) = q_j \psi(q), \quad \hat{p}_k \psi(q) = -i\frac{\partial}{\partial q_k}\psi(q)$$

のように $\hat{q}_j$，$\hat{p}_k$ が作用するという表現を選べるし，他の既約表現を採ってもこの表現とユニタリ変換で互いに移りあうことが示されているからである[3]．いまの場合，$\boldsymbol{R}^n$ を下部空間 (underlying space) と呼ぶ．この意味でヒルベルト空間の選択に関しては free になっているが，下部空間として $\boldsymbol{R}^n$ から離れることについては free ではないのである．

どういうことかというと，例えば円周 $S^1 = T^1$ を扱うということは座標 q について周期的な波動関数を扱うことである．周期はいくらでもいいのだが，例えば 2π として，波動関数が

$$\psi(q + 2\pi) = \psi(q) \tag{1}$$

を満たすことを要請したいが，周期関数全体の集合は正準交換関係の表現空間たりえない．なぜなら $\psi(q)$ が恒等的にゼロではない周期関数であるとき，$q\psi(q)$ は周期関数ではないからである．つまり，位置演算子 $\hat{q}$ を円周上で定義しようとすることに無理がある．

では S^1 の上の量子力学をどう定式化したらよ

いのか？正準交換関係では狭すぎるのだから，ここを変えればよい．大貫・北門[4) は次のような定式化を与えた．ユニタリ演算子 $\hat{U}$，自己共役演算子 $\hat{p}$ が交換関係

$$[\hat{p}, \hat{U}] = \hat{U}$$

を満たすことを要請する．これらは代数 $\mathcal{U}$ を生成する．代数 $\mathcal{U}$ の既約表現ヒルベルト空間 $\mathcal{L}$ を得たら，組 $(\mathcal{U}, \mathcal{L})$ を S^1 上の量子力学と呼ぶ．これのどこが S^1 上の量子力学なのか？詳しい構成は論文[5)] を見てほしいが，結局，$\mathcal{L} = L^2(S^1)$ をヒルベルト空間として採って，つまり $\psi \in L^2(S^1)$ を (1) の周期性を満たす S^1 上の 2 乗可積分な複素数値関数として，ここに

$$\hat{U}\psi(q) = e^{iq}\psi(q),\ \hat{p}\psi(q) = \left(-i\frac{\partial}{\partial q} + \alpha\right)\psi(q)$$

のように $\hat{U}, \hat{p}$ が作用するという表現を選べる．この式を見れば $\hat{U}$ が S^1 上の位置演算子の役割を演じていることがわかるだろう．つまり S^1 の上では q そのものよりも e^{iq} の方が一価連続関数として意味を持つ．また，$\hat{p}$ の表式中の α は実数である．このパラメータ α がくせもので，α の値ごとに異なる表現ができてしまっている．これが物理的に意味のある違いだということは，運動量の固有値が整数 m に対して

$$\hat{p}e^{imq} = (m + \alpha)e^{imq}$$

で与えられることからもわかる．α と α' の差が整数のときは，二つの表現を移しあうユニタリ変換

$$\psi(q) \mapsto e^{i(\alpha-\alpha')q}\psi(q)$$

が存在するが，$\alpha - \alpha'$ が整数でなければ二つの表現を移しあうユニタリ変換は存在しない．これは $\boldsymbol{R}^n$ 上の量子力学にはなかった奇妙な状況である．S^1 では代数的な公理系だけでは理論が一意的に決まらないのである．

5. ユークリッド空間に埋め込まれた多様体

多様体は 1 枚の座標系では覆えないことの方にその真髄があるので，座標値を表す位置演算子を使って多様体の上に量子力学を作ろうとするのは，どうもぐあいが悪い．演算子は大域的なものなので，座標近傍を座標変換で貼り合わせるという多様体の流儀とは相容れないのだ．

それでも球面 S^n はユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ に埋め込まれ，しかもその埋め込み方が対称性を持っているといういい性質のおかげで，S^n の上の量子力学は比較的すんなり構成できる[4)]．すなわち自己共役演算子 $\hat{x}_j$, $\hat{G}_{jk}$ $(j, k = 0, 1, \cdots, n)$ が

$$\begin{aligned}
&[\hat{x}_j, \hat{x}_k] = 0, \quad \hat{G}_{jk} + \hat{G}_{kj} = 0, \\
&[\hat{G}_{jk}, \hat{x}_l] = -i\delta_{kl}\hat{x}_j + i\delta_{jl}\hat{x}_k, \\
&[\hat{G}_{jk}, \hat{G}_{lm}] = -i\delta_{kl}\hat{G}_{jm} + i\delta_{jl}\hat{G}_{km} \\
&\quad +i\delta_{mj}\hat{G}_{lk} - i\delta_{mk}\hat{G}_{lj}
\end{aligned}$$

という関係を満たして生成する代数を $\mathcal{G}$ とし，その既約表現ヒルベルト空間 $\mathcal{S}$ を得れば，組 $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ を球面上の量子力学と呼ぶ．要するに，$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の座標系であり，$\{G_{jk}\}$ は $SO(n+1)$ のリー代数の基底である．$SO(n+1)$ が $\boldsymbol{R}^{n+1}$ に作用していて，その軌道が S^n に同相であるから，S^n 上の関数空間は自然に表現空間 $\mathcal{S}$ になる．ただし一般にはスカラー値関数である必要はなく，S^n 上のベクトル束に値を持つ関数も許される．

この種の代数と表現の構成方法は，グラスマン多様体やシュティーフェル多様体のような等質空間に拡張できる．詳しくはマッキー[6)] やそれ以降の論文[7,8)] にあるが，その要点を述べよう．実ベクトル空間 V にリー群 G が線形に作用して，一点 $v_0 \in V$ の軌道が多様体 M をなしているとする．V^* を V の双対空間とする．$v \in V$, $x \in V^*$ の pairing を $x(v) = \langle x, v\rangle \in \boldsymbol{R}$ と書く．$g \in G$ の反傾表現 $\bar{g} : V^* \to V^*$ を

$$\langle \bar{g}x, v\rangle = \langle x, g^{-1}v\rangle$$

で定義する．$x, y \in V^*$ ごとに自己共役演算子 $\hat{x}$, $\hat{y}$ を，$f, g \in G$ ごとにユニタリ演算子 $\hat{f}$, $\hat{g}$ を定義して，$\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$\widehat{\lambda x} = \lambda \hat{x}, \quad \widehat{x+y} = \hat{x} + \hat{y}, \quad [\hat{x}, \hat{y}] = 0,$$
$$\hat{g}\hat{x}\hat{g}^{-1} = \widehat{gx}, \quad \widehat{fg} = \hat{f}\hat{g}$$

という関係で代数 $\mathcal{Q}$ を定め，その既約表現ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ を得れば，$(\mathcal{Q}, \mathcal{K})$ を M 上の量子力学と呼ぶ．こうして代数的公理系で等質空間上の量子力学を特徴付けられる．

この代数 $\mathcal{Q}$ の表現は，ウィグナー表現あるいは誘導表現と呼ばれる方法で構成される[6]．誘導表現とは，群 G の部分群 H の表現から G の表現を構成する方法である．そのあらましを述べる．一点 $v_0 \in M$ の小群あるいは固定群を $H = \{h \in G | hv_0 = v_0\}$ と書く．写像 $\pi : G \to M$ を $g \in G$ に対して $\pi(g) = gv_0$ で定める．定義から，$f \in G$ に対して $\pi(fg) = f\pi(g)$ が言える．G には左不変測度があるとする．$\rho : H \to U(K)$ は小群 H からヒルベルト空間 K 上のユニタリ変換群 $U(K)$ への準同形写像とする．G 上で定義され K に値を持つ 2 乗可積分な関数 $\psi : G \to K$ が任意の $g \in G$, $h \in H$ に対して

$$\psi(gh^{-1}) = \rho(h)\psi(g)$$

を満たすとき，ψ を同変関数という．同変関数全体のなす集合はヒルベルト空間になり，これを $L^2_\rho(G; K)$ と書く．また，$g \in G$ に対して $\pi(g) \in M \subset V$ であることに注意する．したがって $x \in V^*$ に対して $x(\pi(g)) \in \boldsymbol{R}$ が定義される．以上の準備より，$x \in V^*$, $f \in G$ に対して

$$\hat{x}\psi(g) = x(\pi(g))\psi(g),$$
$$\hat{f}\psi(g) = \psi(f^{-1}g)$$

とおけば，代数 $\mathcal{Q}$ は同変関数空間 $\mathcal{K} = L^2_\rho(G; K)$ の上で表現される．ここで $x(\pi(g))\psi(g)$ は $x(\pi(g)) \in \boldsymbol{R}$ と $\psi(g) \in \boldsymbol{C}$ のかけ算である．ρ が小群 H の K 上の既約表現ならば，代数 $\mathcal{Q}$ の $L^2_\rho(G; K)$ 上の表現も既約である．ρ_1 と ρ_2 が H の表現としてユニタリ非同値ならば，代数 $\mathcal{Q}$ の非同値な表現を誘導する．

結局，ベクトル空間 V に多様体 M を埋め込んで，$x \in V^*$ をたちのよい座標系として利用して位置演算子 $\hat{x}$ を定義しているのである．いずれにしても，このやり方は V の基底をどう選んでもよいという程度の「座標系の自由」があるが，多様体並の好き勝手な座標変換の自由さはない．

6. 磁場中トーラス上の量子力学

代数的公理系にもとづいて多様体上の量子力学を作ろうとすると，なかなか座標系から自由になりきれないらしい．そういう例をもう一つ見てみよう．

まず平面 $\boldsymbol{R}^2$ で一様磁場 B がある場合の荷電粒子の量子力学を構成しよう．平面上である限り，磁場があるからといって改まったことは必要ではない．自己共役演算子 $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{p}_1, \hat{p}_2$ が正準交換関係を満たして，その既約表現ヒルベルト空間を用意するところまでは今までの議論と同じで，ハミルトニアンとして

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}_1)^2 + \frac{1}{2}(\hat{p}_2 - B\hat{q}_1)^2 \tag{2}$$

という演算子を採ることが磁場中の力学を設定することになる．このハミルトニアンから運動方程式を導けば，磁場からローレンツ力を受けている粒子の方程式になるからである．

次にこれをトーラス T^2 の上で考えたらどうなるか？任意の整数 $(n_1, n_2) \in \boldsymbol{Z}^2$ に対して座標値 $(q_1 + 2\pi n_1, q_2 + 2\pi n_2) \in \boldsymbol{R}^2$ の点を同一視して T^2 を定義する．こうなると，S^1 上の量子力学と同様に位置演算子 $\hat{q}_1$ は「使ってはいけない」演算子になってしまうので，(2) を書けなくなる．

そうするとまた代数的公理系の設定を変更しなければならない．詳しい議論は論文[9] を見てほしいが，じつは位置演算子に相当するものをまったく使わずに公理系を与えることができる．まず，m をゼロでない整数として固定する．自己共役演算子 $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$ とユニタリ演算子 $\hat{V}_1$, $\hat{V}_2$ と関係

$$[\hat{P}_1, \hat{P}_2] = \frac{im}{2\pi}\hat{1}, \quad (\hat{V}_1)^m = (\hat{V}_2)^m = \hat{1},$$
$$\hat{V}_1\hat{V}_2 = e^{2\pi i/m}\hat{V}_2\hat{V}_1, \quad [\hat{P}_j, \hat{V}_k] = 0$$

で定まる代数 $\mathcal{B}$ と，その既約表現ヒルベルト空間

$\mathcal{E}$ で磁場中トーラス上の量子力学は定義できる．これのどこが磁場中トーラス上なのか？それは以下のように理解される．可測関数 $\psi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{C}$ で

$$\psi(q_1+2\pi, q_2) = e^{imq_2}\psi(q_1, q_2),$$
$$\psi(q_1, q_2+2\pi) = \psi(q_1, q_2)$$

を満たすもの全体のなす空間 $\mathcal{E} = L^2_m(T^2)$ をヒルベルト空間とし，

$$\hat{P}_1\psi = -i\frac{\partial}{\partial q_1}\psi,$$
$$\hat{P}_2\psi = \left(-i\frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{m}{2\pi}q_1\right)\psi,$$
$$\hat{V}_1\psi(q_1,q_2) = e^{iq_2}\psi\left(q_1 - \frac{2\pi}{m}, q_2\right),$$
$$\hat{V}_2\psi(q_1,q_2) = \psi\left(q_1, q_2 - \frac{2\pi}{m}\right)$$

により代数 $\mathcal{B}$ は表現され，しかもこれは既約表現であり，代数 $\mathcal{B}$ の既約表現はすべてこの表現とユニタリ変換で移りあうことが証明される．$\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$ はゲージ場のあるときの共変微分に他ならず，ハミルトニアンを

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{P}_1)^2 + \frac{1}{2}(\hat{P}_2)^2$$

と書けば磁場中平面上のハミルトニアン (2) と同様のシュレーディンガー方程式を導く．なお，$\boldsymbol{R}^2$ では磁場の強さ B は任意の実数であったが，T^2 では磁場の強さは整数 m で離散化されていることに注意してほしい．これはコンパクト空間上の磁荷量子化の表れである．

この定式化の下では位置演算子 $\hat{q}_1$ は不要である．さらに，S^1 上の量子力学ではユニタリ演算子 $\hat{U}$ は位置演算子としての役割を持っていたが，T^2 におけるユニタリ演算子 $\hat{V}_k$ にはそのような役割はない．$\hat{V}_k$ は運動量演算子 $\hat{P}_j$ と可換なので，座標というよりむしろ系の対称性を特徴付ける演算子になっている．じっさい上に与えた表現では，$\hat{V}_k$ は平行移動の演算子になっており，非可換で離散的な群を生成している[10]．この特性ゆえに，磁場中トーラス上の量子力学 $(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ は非可換トーラスとも呼ばれている．

もし位置演算子に相当するものがほしいならば，ユニタリ演算子 $\hat{U}_1$, $\hat{U}_2$ を導入して，関係

$$\hat{U}_1\hat{U}_2 = \hat{U}_2\hat{U}_1, \quad \hat{U}_j\hat{V}_k = e^{2\pi i\delta_{jk}/m}\hat{V}_k\hat{U}_j,$$
$$[\hat{P}_j, \hat{U}_k] = \delta_{jk}\hat{U}_k$$

を要請して，拡大された代数の表現を考えればよい．その作用を $\psi \in L^2_m(T^2)$ 上で

$$\hat{U}_1\psi(q_1,q_2) = e^{iq_1}\psi(q_1,q_2),$$
$$\hat{U}_2\psi(q_1,q_2) = e^{iq_2}\psi(q_1,q_2)$$

と与えれば，確かにこれは表現になっている．

次のような主張が証明できる[11]．「$\{\hat{P}_j, \hat{V}_k\}$ で生成される代数を $\mathcal{B}$，$\{\hat{P}_j, \hat{U}_k\}$ で生成される代数を $\mathcal{B}'$ とする．このとき，じつは代数 $\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}'$ は同形であり，その既約表現 $\mathcal{E}$ をどのように採ってもそれらを互いに移しあうユニタリ変換が存在する．」これは，磁場中トーラス上の量子力学は，対称性だけでも特徴付けられるし，位置演算子を用いても特徴付けられる，という主張である．対称性さえわかっていれば座標系はなくてもいいのである．

上の主張をもう少し具体的に示すと，

$$\begin{aligned} &e^{-2\pi i\hat{P}_2/m}\cdot\hat{V}_2^\dagger\,\psi(q_1,q_2)\\ &= e^{(2\pi/m)\{i(m/2\pi)q_1-(\partial/\partial q_2)\}}\psi\left(q_1, q_2+\frac{2\pi}{m}\right)\\ &= e^{iq_1}\psi(q_1,q_2)\end{aligned}$$

となることから，じつは

$$e^{-2\pi i\hat{P}_2/m}\cdot\hat{V}_2^\dagger = \hat{U}_1$$

であることがわかる．同様に

$$e^{2\pi i\hat{P}_1/m}\cdot\hat{V}_1 = \hat{U}_2$$

も確認できる．結局，位置演算子 $\hat{U}_j$ は運動量演算子 $\hat{P}_j$ と平行移動演算子 $\hat{V}_j$ で書けてしまうのである．

7. 量子力学は座標系から解放されたか？

これまでの議論を振り返ってみよう．座標系から自由になることを目指しつつ，$\boldsymbol{R}^n$, S^1, S^n, T^2 上

の量子力学の構成を順に概観してきた．まず，$\boldsymbol{R}^n$ 上の量子力学が位置と運動量の正準交換関係で公理的に規定されることを一瞥した．

S^1 上では位置を実数値一価連続座標では捉えられないが，位置を自己共役演算子 $\hat{q}$ ではなくユニタリ演算子 $\hat{U}(=e^{i\hat{q}})$ で捉えることにすれば，周期的波動関数 $\psi(q+2\pi)=\psi(q)$ でヒルベルト空間が構成できることがわかった．しかし，互いにユニタリ変換で移りあわない表現が無数に存在するという，物理法則の一意性にとっては好ましくない副産物が得られてしまった．あるいは，非一意性は好ましくないというのは偏見であって，この種の多様性は，物理現象を記述するのには柔軟な形式が必要であるということの表れとして受け止めるべきなのかもしれない．

S^n あるいはもっと一般にベクトル空間に埋め込まれた等質空間に対しては，埋め込みを受け入れているベクトル空間を座標として利用して位置演算子を定め，多様体に推移的に作用している群をユニタリ演算子として表現する，と宣言すれば，公理的に満足のいく量子力学が構築された．ここでも無数のユニタリ非同値な表現が得られた．

T^2 に磁場という背景場が加わると，かなり根本的に代数を変更しなければならなかった．運動量と対称性，または運動量と位置という捉え方で量子力学が一意的に構成できた．この意味で，座標を表す位置演算子はなくてもよいものになった．

これまで見てきたのは，いずれも対称性のよい多様体である．このようなやり方は，有限次元のリー群が推移的に作用するような多様体にしか適用できない．しかも磁場が入って力学が変わったら，ハミルトニアンだけでなく，元の代数から変更しなければならない．何ともその場しのぎの方法論という印象をまぬがれない．

本来，多様体（とくに可微分多様体）は，微分可能でありさえすればどんな座標変換をも許して，その上で座標系によらない幾何学を展開できるような舞台であった．だからこそ誰から見ても不変であるような物理学の舞台にふさわしいと思えた．ところが，妙な比喩であるが，代数と表現という量子力学の公理的アプローチは，多様体という柔軟な舞台に対しては，硬直的すぎるシナリオなのである．

どうすれば多様体の上で，本当に座標系によらない，不変な記述形式を得られるのだろうか？鍵は，力学変数を増やす，ということにあるようだ．背景場が硬直的だから勝手な座標変換ができないというなら，場も力学変数のうちに入れて，つまり広い意味で座標の一部だということにして，いっしょに変換してしまえばいい．こういう考えを推し進めたものが，相対論的場の量子論やゲージ理論なのであろう．それでも正準量子化という手続きはあいかわらず特別な座標系に人間の視点・思考を押し込めているような気がするし[12]，このあたりに摂動論的場の量子論の限界があるような気がする．とくに量子重力理論を考えるときにはもっと根本的に「coordinate free」なアプローチを見出す必要があるのだろう，と私は勝手に想像している．

この小論は，私が筒井泉氏・坂本眞人氏と行ってきた研究と，2003 年時に京都大学工学部生である竹折光晴君の論説から刺激を受けて形成されたものです．彼らに感謝します．

参考文献

1) 物理法則を座標系から解放することが一般相対論の本質だ，という立場を明確に，しかも易しく記述している良書として，シュッツ「相対論入門（上・下）」（江里口・二間瀬訳）（丸善）がある．

2) 素粒子を変換群で分類するという発想の発展史については，その歴史の当事者である大貫義郎氏による「対称性理論事始」素粒子論研究 82-6 (1991) 503 が興味深い．また，この分野に関する現代的な教科書としてジョージアイ「物理学におけるリー代数：アイソスピンから統一理論へ」（九後訳）（吉岡書店）がある．

3) 正準交換関係代数の既約表現がすべてユニタリ同値であるという主張の真意は，なかなか微妙で，長年の懸案である．これについては「岩波講座 現代物理学の基礎 第 4 巻 量子力学 II」に突っ込んだ議論がなされている．また，「$\hat{p}_k$ 同士が互いに強可換である」という条件を「可換である」に緩めると，ユニタリ非同値な表現が無数に存在することが A. Arai, *J. Math. Phys.* **33** (1992) 3374 に具体的に示されている．

4) Y. Ohnuki, S. Kitakado, *Mod. Phys. Lett. A* **7** (1992) 2477; *J. Math. Phys.* **34** (1993) 2827.

5) S. Tanimura, *Prog. Theor. Phys.* **90** (1993) 271: hep-th/9306098.
6) G. W. Mackey, *Induced representations of groups and quantum mechanics*, (Benjamin, New York 1968).
7) N. P. Landsman, *Rev. Math. Phys.* **2** (1990) 45, 73; N. P. Landsman, N. Linden, *Nucl. Phys. B* **365** (1991) 121.
8) D. McMullan, I. Tsutsui, *Phys. Lett. B* **320** (1994) 287: hep-th/9310185; *Ann. Phys.* **237** (1995) 269: hep-th/9308027.
9) S. Tanimura, *J. Math. Phys.* **43** (2002) 5926: hep-th/0205053; M. Sakamoto, S. Tanimura, *J. Math. Phys.*（掲載予定）: hep-th/0306006.
10) 谷村省吾「量子力学におけるトポロジーと対称性」数理科学 2002 年 11 月号 p.48.
11) S. Tanimura, “Quantization without position operators”, hep-th/0309091.
12) 数理科学 1996 年 8 月号 p.11「正準形式による量子化」で中西襄氏が唱えておられる，量子論においてはアフィン座標が優先するという主張も，正準座標系に執着しすぎた発想のような気がする．私は中西先生の合理的批判精神を尊敬しているので，あえて批判してみたい．

（たにむら・しょうご，大阪市立大学大学院工学研究科）