双対性をめぐる物理学対話
量子と古典，ミクロとマクロ

小 嶋　泉・谷 村　省 吾

1. 双対性とは何か？ — ベクトル空間の双対性

*1)学生 (S)：数学の「双対性（そうつい）」が最近物理でも重要だという話を聞きました.「双対性」って，素朴に言うと表と裏の関係，裏の裏は表に戻るというような性質のこと，と言いますが，どうしてそんな概念が重要なのか，いま一つピンと来ないので，お話を聞きに来ました.

先生 (T)：君が知っているのはどういう双対性？線型代数の双対空間というのは知っているかい？

S：ええと，体 K 上のベクトル空間 V に対して V 上の線型関数全部を集めたものがまたベクトル空間になる，それを V の双対空間というんですよね.

T：OK，双対空間の定義はそのとおり．体 K は例えば実数体 $\mathbb{R}$ か複素数体 $\mathbb{C}$，V を K 上のベクトル空間として，任意ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$ と任意スカラー $\lambda \in K$ に対して

$$f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')=f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{v}'),\ f(\lambda\boldsymbol{v})=\lambda\cdot f(\boldsymbol{v}) \quad (1)$$

という条件を満たす写像 $f: V \to K$ を V 上の線型関数というんだね．線型関数たちには

$$(f+f')(\boldsymbol{v}):=f(\boldsymbol{v})+f'(\boldsymbol{v}),\ (\lambda f)(\boldsymbol{v}):=\lambda\cdot f(\boldsymbol{v}) \quad (2)$$

という形で和 $f+f'$ やスカラー倍 λf が定義できて，それらも V 上の線型関数になるから，

$$V^* := \{ f \,|\, f: V \to K \text{ は線型関数 } \}$$

はまた K 上のベクトル空間になる．これが V に対する双対空間.

S：双対の双対は元の空間なんですか？

T：そのとおり．V^* の双対空間 $(V^*)^*$ は V と線型同型になる：

$$(V^*)^* \cong V.$$

線型関数 $f \in V^*$ に $\boldsymbol{v} \in V$ を代入すると $f(\boldsymbol{v}) \in K$ という数が出るけど，$\boldsymbol{v}$ を止めて f の方を動かして値 $f(\boldsymbol{v})$ を見れば，$V^* \ni f \longmapsto f(\boldsymbol{v}) \in K$ という V^* 上の線型関数ができる．これを $\tilde{\boldsymbol{v}}$ と書けば，$\tilde{\boldsymbol{v}}(f) = f(\boldsymbol{v})$ であり，$\tilde{\boldsymbol{v}} \in (V^*)^*$ となる.

S：$\boldsymbol{v} \in V$ を縦ベクトルで表すと，$f \in V^*$ は横ベクトルで，線型関数にベクトルを代入するのは

$$f(\boldsymbol{v}) = (f_1, f_2, \cdots, f_n)\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} f_j\, v^j \quad (3)$$

と書けますね.

T：そう，基底を選んでベクトルを成分表示するとそういう式になる．V^* の線型構造を決める式 (2) は，$\tilde{\boldsymbol{v}}$ が V^* 上の線型関数だということを表す式にもなっている．こうして $V \ni \boldsymbol{v} \mapsto \tilde{\boldsymbol{v}} \in V^{**}$ という線型同型写像ができる．ただし，V と V^{**}

*1) 本稿は別冊・数理科学「双対性の世界 — 諸分野に広がるデュアリティ・パラダイム」pp. 34-44 (サイエンス社, 2007 年) に掲載されたものである.

が本当に同型になるのを保証することは微妙で，V が有限次元なら大丈夫だけど，無限次元だと線型性だけでは制御しきれなくなる．それはそれで「意味深長」だけど，無限次元についていまは深入りしないでおこう …

S：あのう，V と V^{**} が同型と言う前に，V は V^* と同型ではないんですか？ 縦ベクトルを横に倒せば V から V^* への同型写像になると思うんですけど．

T：ああ，V が有限次元なら，たしかに V と V^* は次元が等しく，同型だけど，V から V^* への同型写像はいっぱいあって一意に決まらない．君の式 (3) のようにベクトルを成分表示して縦ベクトルを横ベクトルへ転置するのも一つの同型写像だけれど，ベクトルの成分は基底の取り方に依存して変わるから，転置写像は基底を指定しないと決まらない．これに対して，$\boldsymbol{v} \in V$ に $\tilde{\boldsymbol{v}} \in V^{**}$ を対応させる写像は，V の基底などとは無関係に線型構造だけで決まるから，その意味で V から V^{**} への自然な同型写像を与えている．

S：基底を選ぶのは不自然なことなのですか？

T：う〜ん，それは状況次第だけどね．基底の取り方によらない概念や性質が線型空間や線型写像に内在的なものだとすると，基底の選択は「人為的」で，それに依存した概念や性質には線型構造以外の文脈が関係している．特定の文脈から選ぶべき基底の範囲が決まるなら，それはそれでその状況に応じた自然な選択と言える．例えば正定値内積のような「付加的」構造が指定された状況での正規直交基底のように．

S：基底を選ばずに済めばより自然，というわけですか．

T：そうだね．もうちょっと突っ込んだことを言うと，基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ というのは，勝手なベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して

$$\boldsymbol{v} = v^1 \boldsymbol{e}_1 + v^2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + v^n \boldsymbol{e}_n$$

となるような展開係数 $v^j \in K$ を定める線型関数 $E^j(\boldsymbol{v}) = v^j$ と見ることができるよね.「我々人間」は「成分」を通してしかベクトルを決められないから，双対基底 $\{E^1, E^2, \cdots, E^n\} \subset V^*$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ を特徴付けるための測定装置であり，これがあって初めてベクトルの完全な測定・認識が可能になる．しかし同時に，基底の選択はベクトルを測る特定の「座標系」を持ち込むことであり，それには必ず何がしかの人為性・恣意性・状況依存性が伴う．だから，可能な限りそういう恣意性を排除した客観的世界を想定したい．それが基底によらない，ベクトル空間 V そのものという見方だ．でもそれはやはり V^* という「外部」の視点と深く結びついている，というのが双対性 $(V^*)^* \cong V$ の本質じゃないかな．

S：少し双対性の奥深さが見えて来たような気がしますが …

T：この例では，ベクトル空間 V だけでは世界は完結せず，V に対して双対空間 V^* が裏にあり，しかも V 自身も $(V^*)^* \cong V$ という意味では V^* の裏の存在だった，むしろ V と V^* は双対の関係を通じて相互に相手を規定し合っているわけだ．

2. フーリエ・ポントリャーギン双対

S：線型代数以外に双対性の例はありますか？

T：フーリエ (Fourier) 変換も双対性の代表例だね．式を書くと

$$\hat{\phi}(k) = (\mathscr{F}\phi)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\, \phi(x) dx, \quad (4)$$

$$\phi(x) = (\mathscr{F}^{-1}\hat{\phi})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, \hat{\phi}(k) dk. \quad (5)$$

この ϕ は $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ という関数だ．

S：この場合，ベクトル空間 V にあたるものは何ですか？

T：関数空間だね，ただし，今度は無限次元だ．フーリエ変換で重要なのは

$$\mathscr{F}\left[-i\frac{d\phi}{dx}\right](k) = k \cdot (\mathscr{F}\phi)(k) \quad (6)$$

という性質だ．

S：証明は部分積分をするだけですよね． これは知っています．量子力学に出て来た運動量演算子．

T：そのとおり．それから関数 $\phi(x)$ を $a \in \mathbb{R}$ だ

け平行移動して $(U(a)\phi)(x) := \phi(x-a)$ としてからフーリエ変換するとこうなる：

$$\mathscr{F}[U(a)\phi](k) = e^{-ika}\cdot(\mathscr{F}\phi)(k). \tag{7}$$

S：証明は置換積分ですね．平行移動演算子 $U(a)$ は e^{-ika} という関数の掛算演算子に移る．

T：そう．演算子というのはある関数を別の関数に移すものだから，これは，単独の関数だけに注目するのではなく，複数の関数の関わりの中で見えてくるフーリエ変換の性質だ．むしろ $U(a)$ は関数空間 $L^2(\mathbb{R})$ に作用するユニタリ演算子だと言った方が全貌が見えてくるものだ．ちなみに，この式 (7) の両辺を a で微分すると (6) を再現する．

S：ただし，平行移動演算子はどんな関数にも作用するけど，微分演算子は微分可能な関数にしか作用できないですね．

T：そう．それは演算子の定義域という面白いテーマにつながる．もう一つ注目してほしいのは，x を掛算する演算子と，x についての微分演算子は非可換であるという性質だ．$p = -i\frac{d}{dx}$ とおくと

$$[x,p]\phi(x) = xp\phi(x) - px\phi(x) = i\phi(x) \tag{8}$$

が成り立つ．改めて位置演算子 x や運動量演算子 p を抽象的なヒルベルト空間に作用する演算子と考えれば，x が $x\cdot\phi(x)$ のように掛算で作用するのは「x を対角化した基底」での見方で，p が $k\cdot\hat{\phi}(k)$ のように掛算で作用するのは「p を対角化した基底」での見方と言える．するとフーリエ変換とはこれらの間に働く基底変換だったことになる．ただし連続スペクトルの場合,「固有ベクトルが基底をなす」という表現の正当化には一工夫要るけれど．

S：x と p は非可換なので，同時対角化できない．位置と運動量は同時に確定した値を持つことはない，というのが不確定性原理でしたよね．でも，これが双対性の話と関係あるのですか？

T：うん．$U(a+a') = U(a)U(a')$ という関係式が成立するけど，これは U が加法群 $\mathbb{R}$ のユニタリ表現だと言っていることに注目すると，フーリエ変換を支えているのは実は，群と表現の双対性だということが分かってくるんだ．G を任意の局所コンパクトハウスドルフ (Hausdorff) 可換群として，そのことを説明しよう．

S：G の例としては，加法群 $\mathbb{R}$ や $\mathbb{Z}$ を思い浮かべておけばいいですか？

T：うん．他に $\mathbb{T}$ や $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ でもいい．$\mathbb{T}$ というのは 1 次元トーラス群 $\mathbb{T} = U(1) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\} = \{e^{i\theta} \,|\, \theta \in \mathbb{R}\}$ で，これが掛算に関して群になっているのはいいだろう．G から $\mathbb{T}$ への準同型連続写像 $\chi : G \to \mathbb{T}$, つまり $g, g' \in G$ に対して

$$\chi(gg') = \chi(g)\chi(g') \tag{9}$$

を満たす χ を G の指標 (character) といい，指標全体の集合を $\hat{G}$ と書くことにしよう．$G = \mathbb{R}$ だったら，G の指標はどんなものか分かるかい？

S：ええと，写像 $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ が準同型写像ということは，$\chi(x+x') = \chi(x)\chi(x')$ を満たすということですよね．しかも連続写像なんだから，$\chi(x) = e^{ikx}$ という形の関数しかないです．

T：そのとおり．そうすると $k \in \mathbb{R}$ ごとに指標 $\chi_k(x) = e^{ikx}$ が定義できる．指標は G の任意の 2 点を分離するのに十分なだけたくさんある．2 つの指標 $\chi, \chi' \in \hat{G}$ に対して

$$(\chi\chi')(g) := \chi(g)\chi'(g) \tag{10}$$

で積 $\chi\chi' : G \to \mathbb{T}$ を定義すれば，

$$(\chi\chi')(gg') = (\chi\chi')(g)(\chi\chi')(g')$$

が成り立って $\chi\chi'$ は指標になり，この積は結合律も満たす．さらに自然な位相を入れると $\hat{G}$ も局所コンパクトハウスドルフ可換群になる．この $\hat{G}$ を G の指標群あるいは双対群という．

S：可換群 G から可換群 $\hat{G}$ が派生するんですね．そうすると，$\hat{\hat{G}}$ は元の G に戻る？

T：そのとおり！ そのことをポントリャーギン (Pontryagin) の双対性という．χ を G の指標として特徴付ける式 (9) と比較すると，(10) から g が $\hat{G}$ の指標になっているのが分かる．

S：ベクトル空間の双対性とそっくりですね．関数 χ に g を代入して値 $\chi(g)$ を得ていたのを，反転して「g に χ を代入して値 $\tilde{g}(\chi) = \chi(g)$ を得る」

と思ってもいい．χ と g のどちらが関数でどちらが変数かというのは，どちらに視点を置くかに応じて便宜的に決まることで，結局，$\hat{G}\times G \to \mathbb{T}$ という関数と変数の出会いがあるだけ，という気がしてきました．見ているものと見られているものの関係が，主客反転可能な関係，お互い様の関係だった，てことですね．

T：そう．さらに $\hat{G}\times G$ は $\chi g = \chi(g)g\chi$ という基本関係式によってハイゼンベルク (Heisenberg) 群と呼ばれる自己双対な非可換群になる．この基本関係式の無限小版が位置と運動量の正準交換関係 (8) だったんだ．こんなふうに，双対性が関数と変数の立場の逆転だけに終わらず，フーリエ変換や群環などの代数構造・解析構造へと通ずるのが群論の奥深さなんだ．

S：まだ双対群とフーリエ変換のつながりは見えてきませんが．

T：OK，それを説明しよう．加法群 $G=\mathbb{R}$ はその双対群も $\hat{G}=\mathbb{R}$ となってしまって，かえって紛らわしいので，$G=\mathbb{T}$ の場合を考えよう．$\mathbb{T}$ の双対群は何かな？

S：ええと，まず $\mathbb{T}$ の指標を考えるんですよね．指標は準同型連続写像 $\chi:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ なのだから，

$$\chi_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$$

しかないですね．ここで n は整数．

T：いいぞ．n が整数でないと $e^{in\theta}$ は $\mathbb{T}$ 上の連続写像にならないからね．

S：指標と指標の積は，

$$\begin{aligned}(\chi_m\chi_n)(e^{i\theta}) &= \chi_m(e^{i\theta})\chi_n(e^{i\theta}) = e^{im\theta}e^{in\theta}\\ &= e^{i(m+n)\theta} = \chi_{m+n}(e^{i\theta})\end{aligned}$$

となるから，$\chi_m\chi_n = \chi_{m+n}$ で，結局，$\mathbb{T}$ の双対群 $\hat{\mathbb{T}}$ は $\mathbb{Z}$ に同型ですね．

T：そのとおり．$\hat{\mathbb{T}}=\mathbb{Z}$ だ．では，$\mathbb{Z}$ の双対群 $\hat{\mathbb{Z}}$ は？ 本当に $\hat{\mathbb{Z}}=\mathbb{T}$ に戻るか？ それは後で自分で試してごらん．

S：それでフーリエ変換はどうなったんですか…あ，何かちょっと見えて来たような気がします．

T：うん，いま現れた指標 $\chi_n(\theta)=e^{in\theta}$ というのは特別な意味がある関数だよね．$\mathbb{T}=S^1$ 上の任意の関数 $\phi(\theta)$ は

$$\phi(\theta) = \sum_n c_n\chi_n(\theta) = \sum_n c_n e^{in\theta}$$

とフーリエ級数に展開できる．つまり指標たち $\{e^{in\theta}\}_n$ は関数空間 $L^2(\mathbb{T})$ の完全系だ．実は，この性質はさらに一般の可換群 G でも成立して，指標全体の集合 $\hat{G}$ は $L^2(G)$ の完全系になるんだ．

S：それでさっき $\mathbb{R}$ の指標を考えたときに $\chi_k(x)=e^{ikx}$ って関数が出て来たんですね．$\mathbb{R}$ 上のどんな関数 $\phi(x)$ でも $\chi_k(x)=e^{ikx}$ の線型結合で表されるというのがフーリエ積分 (5) だったんですね．あ，これを「線型結合」と言うのは舌足らずかも知れませんが．

T:そのとおり．しかも双対性から言って，$\hat{\hat{G}}=G$ が $L^2(\hat{G})$ の完全系だってことも言える．これでフーリエ変換と逆変換の輪が閉じる．$G=\mathbb{T}$ の場合に即して書くと，指標は $\chi_n(\theta)=e^{in\theta}$ で，

$$\begin{aligned}\phi(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{\phi}(n)\chi_n(\theta),\\ \hat{\phi}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\chi_n(\theta)}\phi(\theta)d\theta\end{aligned}$$

だ．ここで重要な働きをしているのが

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\chi_m(\theta)}\chi_n(\theta)d\theta = \delta_{mn}$$

という性質だ．一般に $\hat{G}$ は $L^2(G)$ の正規直交完全系になっている，というところまで言える．

S：可換位相群というだけでそこまで言えちゃうんですか．なんで指標を考えるだけでそんな強いことが言えるんでしょう？ 不思議です…

T：う〜ん，えいやっと一気に言うと，局所コンパクト性のおかげで「不変測度」$\int_G f(sg)dg = \int_G f(g)dg$ が G および双対的に $\hat{G}$ にも定義され，可換群を含むたちの良い群 G 上の関数は G の既約ユニタリ表現に分解可能，その既約ユニタリ表現がちょうど指標 $\chi\in\hat{G}$ になる．結果だけをディラック流の形式的記法 $f(g)=\langle g|f\rangle$ で書き下せば，フーリエ変換 $(\mathscr{F}f)(\chi) = \int_G \overline{\chi(g)}f(g)dg = \int_G \langle\chi|g\rangle dg\langle g|f\rangle = \langle\chi|f\rangle$ と逆フーリエ変換のエッ

センスは，$\int_G |g\rangle dg\langle g| = \int_{\hat{G}} |\chi\rangle d\chi\langle\chi| = \mathbf{1}$（$G = \mathbb{T}$ なら $\int_{\hat{G}} |\chi\rangle d\chi\langle\chi| = \mathbf{1}$ は $\sum_n |\chi_n\rangle\langle\chi_n| = \mathbf{1}$) という「基底変換」に帰着する．こう見ると「形式」だけは非常に分かり易くなるが，それで中味まで保証されるわけではないことはくれぐれも要注意！

3. 淡中双対

S：「何とかの双対性」は他にもあるんですか？

T：うん．ポントリャーギンの双対性は局所コンパクト可換群に限定されていたけど，コンパクト非可換群まで拡張した淡中（たんなか）・クレイン (Krein) の双対性，更に局所コンパクト非可換群にまで対象を広げた辰馬（たつうま）の双対性というのもある．他にも作用素環の竹崎双対性とか，まだまだいっぱいあって,「数理科学」の特集に収まり切らないくらい…

S：日本人も色んな双対性を見つけているんですね．淡中双対性っていうのはどういうものですか?

T:それを理解するには「指標＝可換群の既約ユニタリ表現」という見方が重要になる．可換とは限らない群 G に対して，ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ と，$\mathfrak{H}$ 上のユニタリ群 $U(\mathfrak{H})$ への準同型連続写像 $\rho : G \to U(\mathfrak{H})$ のペア $(\rho, \mathfrak{H})$ を G のユニタリ表現という．

S：指標の値 $\chi(g)$ は 1 個の複素数だったけど，$g \in G$ に対する $\rho(g)$ はもはや 1 個の複素数ではなく，行列あるいは演算子だということですね．

T：可換群から非可換群へ対象を拡大したとき，表現に関する本質的な変更点は二つある．可換群の既約表現は 1 次元だけど，非可換群の既約表現は 1 次元だけでは済まないということが一つ．もう一つは，1 次元と 1 次元のテンソル積は 1 次元なので，1 次元表現全体は積に関して閉じていたけれど，m 次元と n 次元の既約表現のテンソル積は，mn 次元となり一般に既約とは限らないということ．つまり，非可換群に対しては，既約表現を集めて積演算に関して閉じた集合を作ることが自然にはできない．

S：非可換群の双対は群にならないんですね？

T：そのとおり．ベクトル空間の双対はまたベクトル空間，可換群の双対はまた可換群だったけど，ある概念に双対な相方がいつも同じカテゴリーに属するとは限らないんだ．あと，コンパクト群から非コンパクト群に話を拡張すると，既約ユニタリ表現が有限次元とは限らないとか，両側不変測度がないとか，面倒なことが起きてくる．

S：非可換群の双対が群にはならないとすると，代わりになるような代数構造はあるんですか？

T：うん．非可換群の双対は，積だけでは閉じなくて，和や共役や intertwiner といった演算まで動員すると閉じた代数構造をなすんだ．君は量子力学の角運動量合成則は知っているかな？

S：スピン $\frac{1}{2}$ の粒子が 2 つあったら，合成系のスピンは 0 か 1，といった規則のことですね．

T：そう．いま君が言った例は「$SU(2)$ の 2 つの 2 次元表現のテンソル積は，1 次元表現と 3 次元表現に既約分解される」と定式化できる：

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}. \tag{11}$$

ここの等号はユニタリ同値な表現という意味に受け取っておいてもらえばいい．これも分かるかな？

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{5}. \tag{12}$$

ヒントは，2 つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ から，内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ でスカラー（1 次元），外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ でベクトル（3 次元），トレースレス対称テンソル $T_{ij} = a_i b_j + a_j b_i - \frac{2}{3}\delta_{ij} a_k b_k$（5 次元）ができることだ．

S：そんな計算やったことがあります．テンソルの既約分解ですよね．

T：こんなふうに，ある群 G とそのユニタリ表現 $\rho_1, \rho_2, \cdots$ を持って来ると，テンソル積表現 $\rho_1 \otimes \rho_2$ や直和表現 $\rho_1 \oplus \rho_2$ などが作れるので，表現全体は和と積などで閉じた系をなす．これが指標群の代わりになる代数系で，一般にはテンソル圏と呼ばれるものになる．もう少し扱い易い状況だと，ホップ (Hopf) 代数，非可換コンパクト群の表現の場合にはクレイン代数と呼ばれる代数で議論ができる．

S：双対性はどこにあるんですか？ 双対というからには,「表現の全体」から元の群を再現できるということですよね？

T：さっきのは $SU(2)$ の場合だけど，比較のた

めに $SU(3)$ の表現をテンソル積したり直和したりするとこんな関係が成立することが分かる：

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{3}^* \oplus \mathbf{6}, \tag{13}$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}, \tag{14}$$

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{27} \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}. \tag{15}$$

S：ははあ，(12) と (13) は どちらも 3 次元表現同士を掛算したものだけど，既約分解の結果が違いますね．こんな調子で頑張れば，テンソル積と直和の関係から，あれらは $SU(2)$ の表現だ，これらは $SU(3)$ の表現だ，というふうに見分けられるということですか？

T：そうなんだ．群から表現の体系が定まるし，双対に，表現の演算体系から群を定めることもできる．

S：例えば，陽子と中性子とラムダ粒子という 3 種のそっくりな粒子があるから 3 次元表現だろう[*2)]，というだけでは何の群の表現なのか分からないわけですね．3 次元表現の粒子と 3 次元表現の粒子がぶつかったときに，どんな反応が起きてどんな表現の粒子が生まれるか観察すると，背後にある群が分かってくる，という仕掛けなんですね．

T：数学的には表現全てを調べ上げれば元の群が一意的に決まる．物理学者は，全ての表現というか，全ての粒子を調べなくても，少数の粒子を調べただけで，背後にある群の候補を直観的に見抜いて，まだ見つかっていない粒子の存在や性質まで予測するのさ．

S：$SU(3)$ だとしたら，$\mathbf{8}$ 表現の粒子と $\mathbf{8}$ 表現の粒子が衝突する反応で，例えば $\mathbf{10}$ 表現の粒子が生じるはずで，そのうち 9 種の粒子しかまだ見つかっていないなら，もう 1 種未発見の粒子があるはずだ，ということが言えるわけですね．

T：君が言っているのは，今日フレーバー対称性と呼ばれるものが，素粒子物理の中で実際に果たした役割のことだね．こんなふうに対称性という か群を使うと，目に見える現象を支配している背後の仕組みが見えてくることがある．これを最も系統的に実行するのがガロア (Galois) 理論だ．

*2) ただしこれは歴史的な文脈であり，現代的な観点からは，陽子・中性子・ラムダ粒子は $SU(3)$ フレーバー対称性の 8 次元表現の一部と見るべきである．3 次元表現は u, d, s quark と同定すべきであることが今ではわかっている．

4. ガロア群とガロア拡大

S：ガロアって名前は聞いたことあります．5 次方程式の解の公式が存在しない理由を，自ら創始した群論に基づいて明らかにしたとか，決闘で死んでしまったとか，そういうお話は聞いたことがありますが，ガロア理論の内容は本当のところよく知りません．何だか数学科の人の専売特許みたいな感じで近寄りがたいし．

T：君は物理の学生なんだね．ガロア理論の基本的なエッセンスを振り返ってみるのはとても面白いことだと思うけれど，今それをやっていると話が長くなりそうだ．代数方程式とその係数体（または環），方程式の解とガロア拡大，係数を動かさないでガロア拡大体だけを変換するガロア群というような基本概念だけを復習して，そういうものの考え方が物理でどんな役割を演ずるか，というところへ先を急ぐことにしよう．

体 K は四則演算ができる数の集合で，その自己同型写像全体 G は群をなす．K の部分体 L に対して，L の各元を動かさない K の自己同型の全体

$$G(K/L) := \{h \in G \,|\, \forall\lambda \in L,\, h(\lambda) = \lambda\}$$

は G の部分群になる (L に対する固定部分群)．これと双対に，G の部分群 H に対して，H の作用で不変な K の元全体

$$K^H := \{\lambda \in K \,|\, \forall h \in H,\, h(\lambda) = \lambda\}$$

は K の部分体になる (K の H-固定部分体)．

S：部分体 $L \subset K$ には固定部分群 $G(K/L) \subset G$ が対応し，部分群 $H \subset G$ には固定部分体 $K^H \subset K$ が対応するという関係ですか．$h(\lambda) = \lambda$ という式が h を特徴付ける式に見えたり，λ を特徴付ける式に見えたりするんですね．「不変にとどめるもの」と「不変にとどまるもの」の双対性と言った方がいいんじゃないですか．

T：それもそうだね．そして問題は双対の双対は元に戻るか？というところだけど，定義から

$$K^{G(K/L)} \supset L, \qquad G(K/K^H) \supset H$$

となることはすぐ分かる．

S：双対の双対は，元のものよりも膨らむ可能性があるんですね．

T：そのとおり．これがちょうど元に戻ってくれれば，つまり $K^{G(K/L)} = L$, $G(K/K^H) = H$ となってくれれば，とても具合がいい．このとき，K は L のガロア拡大体であるといい，$G(K/L)$ を $L \subset K$ のガロア群というんだ．そうなっていると，体の世界を群の力で統制することができるようになる．むしろその副産物として，代数方程式を解くという問題も，群の性質に還元・翻訳できるようになる．代数方程式の文脈では，L を方程式の係数が属している体とすれば，拡大体 K は方程式の解が属する体と見ることになる．

S：ふ〜ん，もうちょっと勉強しないと分からない気がしますが，それが物理の話とどう関係してくるのですか？

T：物理でも双対性は色々な現れ方をする．いまの話の流れで自然な例は，ドップリカー・ハーク・ロバーツ (Doplicher-Haag-Roberts) のセクター理論[1,2]（以下，DHR 理論）と呼ばれるものだ．だけど，それを説明するには代数的場の量子論が必要で，準備が大がかりになりそうだ．

S：大体のストーリーでいいです．

T：エッセンスだけを先に言うと，相対論的量子場の数学的枠組を前提すれば，「内部対称性の変換群 G の作用で不変な観測可能量の代数 $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}^G$ について，$\mathfrak{A}$ のどういう表現が現われるかというデータさえ分かれば，あらかじめ G が何か知らなくても，G 自身と，G の作用で変換する量子場の代数 $\mathfrak{F}$ の両方を決めることができる」というのが DHR 理論の主張なんだ．

S：う〜ん，群 G の作用で不変な量 $\mathfrak{A}$ だけを見て，G がどんな群かということも，G で変換される場の量も分かるというんですか？ 何だか手品みたいな話に聞こえますが．

T：初めてこの話を聞くと，誰しもそう思うよね．だけど，回転群のような外部（＝時空）対称性の場合を別にして，今までに知られている内部対称性を振り返れば，直接測定可能な物理量は全て群の不変量だけだってことが分かる．早い話，電子・陽子といったフェルミ粒子があるのは当たり前と思ってるだろうけど，フェルミ統計に従う観測可能量はこの世にはないんだ．

S：えっ！フェルミ場は測定できないんですか？

T：フェルミ場が引き起こす状態変化は測定できるけれど，フェルミ統計に従う量そのものを直接測ることはできないんだ．これは状態と物理量の関係について非常に微妙なポイントだから，誤解のないよう，よくよく考えてみてほしい．もし「フェルミ的測定装置」があったら，それを 2 つ持ってきて空間的 (spacelike) に離せば反可換なのだから，アインシュタインの因果律を破るような，光速を越える因果的相関が見えてしまう.「状態」についてならフェルミ粒子が奇数個入った「フェルミ状態」はもちろん存在するけれど，測定可能な「物理量」の方は全部，因果律を満たすボーズ的な量なんだ．ボーズ場・ボーズ状態に $+$ を，フェルミ場・フェルミ状態に $-$ を割り振ったとき理論が満たすボーズ・フェルミ $\mathbb{Z}_2$-不変性とそれに伴う「スピンと統計」の関係は有名だけど，これはボーズ的観測量だけから出発して数学的に導くことができる．そういうカラクリ自身が，実は DHR 理論によって初めて解明されたことで[1]，それ以外のところではフェルミ場は天下り的に導入されたものでしかない．もしフェルミ場が測定・制御可能な量として存在すると，因果律を破るだけじゃなくて，ボーズ粒子とフェルミ粒子を入れ替えたり，ボーズ粒子とフェルミ粒子の重ね合わせ状態を検出することもできてしまう．

S：ボーズ粒子とフェルミ粒子の重ね合わせ状態なんて現実にはないですよね．

T：いや，あってもいいんだが，重ね合わせを検知する物理量がなければ，そういう重ね合わせ状態はボーズ粒子とフェルミ粒子を確率的に混ぜ合わせた混合状態と区別がつかない．実際，どん

な物理量 A も成分 $+, -$ をつなぐ非対角要素を持たないとすれば，つまり

$$A = \begin{pmatrix} A_{++} & 0 \\ 0 & A_{--} \end{pmatrix}$$

という形しかないとすれば,「重ね合わせ状態」

$$\psi = \psi_+ \oplus \psi_- = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$$

に対する期待値は

$$\begin{aligned} &\langle \psi | A \psi \rangle \\ &= \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} |\psi_+\rangle\langle\psi_+| & |\psi_+\rangle\langle\psi_-| \\ |\psi_-\rangle\langle\psi_+| & |\psi_-\rangle\langle\psi_-| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{++} & 0 \\ 0 & A_{--} \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} |\psi_+\rangle\langle\psi_+| & 0 \\ 0 & |\psi_-\rangle\langle\psi_-| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{++} & 0 \\ 0 & A_{--} \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Tr} \rho A \end{aligned}$$

となって,「混合状態」$\rho = |\psi_+\rangle\langle\psi_+| + |\psi_-\rangle\langle\psi_-|$ のように見えてしまう．

S：そうか，観測可能な物理量が非対角要素 A_{+-} を持たなければ，ψ_+ と ψ_- の重ね合わせ状態は，重ね合わせとして認識されないんですね．同じ状態ベクトルでも，どういう物理量を通してそれを見るかで，意味が変わってしまうんですね．

T：そういうこと．歴史的にはこのボーズ・フェルミ超選択則の理論的解明のため，量子論の重ね合わせ原理が意味を持つ状態の集まりを「セクター」と呼んで，そこからセクター理論が始まったんだ．

S：なるほど．で，さっきの対称性の群の話はどうなったんですか？

T：DHR 理論では,「セクター」は観測可能量の代数 $\mathfrak{A}$ の既約表現として定義される．セクターがどれだけあって，それらがどんな直和やテンソル積の構造（テンソル圏）を持っているかということが $\mathfrak{A}$ の観測で分かったしよう．すると，そのテンソル構造に関して，さっきの淡中双対性とちょうど平行な議論ができて，それによって表現される群 G が決まる．G が分かれば，それをガロア群 $G(\mathfrak{F}/\mathfrak{A})$ として持つ $\mathfrak{A}$ のガロア拡大 $\mathfrak{F}$ を「接合積」$\mathfrak{F} = \mathfrak{A} \rtimes \widehat{G}$ として数学的に作る構成法があるので，結局，$\mathfrak{A} = \mathfrak{F}^G$, $G = G(\mathfrak{F}/\mathfrak{A})$ となるよう，内部対称性の群 G と量子場の代数 $\mathfrak{F}$ の両方が決まるというわけだ[2]．ただし，これは体のガロア理論を環にまで拡張した文脈での話だけれどね．

S：ふ〜ん，そういう筋書きですか，何となくですけど，分かった気がします．でも，そうやって内部対称性の起源がうまく説明できたとしても，それは既によく知られている結果を再現し，後追いしてるだけってことにならないんですか？

5. ミクロ・マクロ双対

T：おっ，鋭い質問だね！ それに答えるため，まず，数学的に見事な DHR 理論も物理理論として見ると実は不満足な点がいっぱいあることに注意しよう．例えば，この理論では対称性の群 G が自動的にユニタリ表現され，G-不変な真空を持つ状況に帰着してしまって，対称性の破れが入らない．ところが現実世界ではほとんどの対称性が状況次第で破れ得るから，この美しい数学的理論も対称性の破れを記述できなければ壊れやすいガラス細工に過ぎない．それに「セクター」＝「観測量の既約表現」と定義してしまうと，混合状態の絡む熱的状況での対称性は議論の埒外になる．

S：では，DHR 理論は優雅だけど数学的な遊びに過ぎないってことになるんですか？

T：そう決めつけるのはまだ早い．こういう欠点を何とかしようという考察と，相対論的量子場の局所的熱状態を定式化する問題[3] とが交わる地点で見えてきた新しい方向は,「セクター」の概念を次のように拡張することなんだ[4]．代数 $\mathfrak{A}$ の表現 π が既約(つまり，$\pi(\mathfrak{A})$ の可換子 $\pi(\mathfrak{A})' = \mathbb{C}$) でなくても，中心 $\mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{A})$ が自明 ($\mathfrak{Z}_\pi(\mathfrak{A}) := \pi(\mathfrak{A})' \cap \pi(\mathfrak{A})'' = \mathbb{C}$) なら，そういう表現 π も全て「セクター」と見なして，セクター理論の重要な本質が取り込めるんだ．

S：既約表現以外の表現も考えるということは，色んな非同値表現が現れるのも覚悟しろということですよね．量子場のような無限自由度系は「非同値表現がいっぱいあって病理現象が起きる」という警告をしょっちゅう聞かされるので，少々「非

同値アレルギー」になりかけですが．

T：だろうね．ところが「非同値」表現，正確には「互いに無縁な (disjoint)」表現の存在こそ実は，量子と古典，ミクロとマクロの相互関係を整合的に理解する上での決定的なカギだ，ということがセクターと中心との関係から分かる．

S：表現 π_1, π_2 が「ユニタリ同値」とは，全ての物理量 A について $\pi_2(A) = U\pi_1(A)U^{-1}$ となるユニタリ演算子 U がある，ということですね．

T：そう．普通，表現の同値性と言えば「ユニタリ同値性」のことだけれど，それだと多重度が違うだけの $\pi_1 = \pi$ と $\pi_2 = \pi \oplus \pi$ も「非同値」だ．もっと大事なのは，多重度の違いは無視して，表現の内容が同じかどうかの判別で，これを 2 つの表現の間の「準同値性」という．中心が自明な表現＝セクターは，準同値という分類で見たときの最小単位なので，2 つのセクターは一致する（＝準同値）か，全く異なるかのどちらかしかない．後者が「無縁」(disjoint) の場合で，intertwiner は 0 しかない：$T\pi_1(A) = \pi_2(A)T$ for $\forall A \in \mathfrak{A} \Longrightarrow T = 0$．非自明な中心があれば，その元は全て互いに可換で「同時対角化」でき，そのスペクトルはセクターの一つ一つを区別するから，中心の元は「秩序変数」として機能することになる．

こうして対称性の自発的破れだけでなく，その明示的な破れや熱的状態まで視野に取り込んだ広い文脈で「セクター」概念を見直すと，可換な秩序変数から成る中心がマクロ古典世界，その秩序変数の値で指定された個々のセクター内部が非可換な量子論的ミクロ世界という形で,「量子古典対応」がセクターと中心によってピッタリ実現される[4]．最初から可換なマクロ古典量を持ち込んでミクロ非可換量と一緒に扱うのでなければ，理論に現われるマクロ可換量の由来は全て，ミクロとマクロの「境目」に生成した disjoint 表現に伴う非自明な中心＝秩序変数にあり，それらは「量子古典対応」の内容通り，無限個のミクロ量子が「凝縮」した極限でのみ実現する．

この視点で物理現象を記述すれば，そこで観測できる物理量の代数 $\mathfrak{A}$ が既知であっても，$\mathfrak{A}$ の無数の「disjoint 表現」の中からどれだけのセクターを取り込めば，目的の現象に対する整合的な理論的記述が保証されるか，という問題が焦点化する．それには DHR 理論の基本構成と同様，関与するセクターを全て選び出すための判定条件が不可欠になり，それを物理量の代数 $\mathfrak{A}$ を「係数環」に持つ「方程式」だと見ると，選ばれたセクターはこの方程式の「解」，その解を parametrize し識別するための「座標」はマクロ変数としての中心＝秩序変数で与えられ，記述対象である物理現象・過程を分類し解釈するための「語彙」・「分類空間」を構成する．さらに，そのセクター構造に働くガロア群が分かれば，元々のミクロ系まで再構成可能になる．このようにしてガロア方程式論の視点から，自然の物理的記述の一般的本質が見えてくる．これがセクターとガロア理論を軸にして,「量子古典対応」を数学的に捉え直そうという「ミクロ・マクロ双対性」の新しい見方だ[5]．

S：ミクロって原子や素粒子の世界のことで，マクロって人間や星のサイズの世界のことですか？

T：そう．単純化して言えば，ミクロの世界は量子論の法則が支配する世界で，マクロの世界は古典物理学の支配する世界．それらが双対な関係で向かい合っているというのがミクロ・マクロの量子・古典双対性だ．

S：ええっと，僕が習った見方だと，量子論がミクロの本当に正しい法則で，ミクロ法則に対する大雑把な近似法則として，マクロの古典論がある．ミクロが正しく，マクロは錯覚というか近似に過ぎず，ミクロとマクロが対等だとはとても言えない，というように習ってきたのですけど．

T：ミクロ世界だけが「本物」だとして，それだけを使って物理的自然が全て記述され理解可能になるだろうか？ マクロ世界とは本当に「幻」というだけなんだろうか？

S：でも，古典論が量子論と対等の立場に立ったり，量子論より優位な立場に立ったりするとは，考えにくいのですけど．

T：例えば,「量子状態」の概念抜きに量子論の理論構成とその物理的解釈は不可能だと思うけど，

ミクロ世界しかなかったとしたら「量子状態」って一体何なのだろう？

S：物理量を測定したときに期待値を与えるのが「量子状態」かな．だけど期待値なんて所詮大雑把な粗視化概念じゃないですか？

T：でも，量子論も物理学である以上，実験的文脈とつながらないわけにはいかないのだから，実験状況を設定するため「初期状態の準備」というプロセスと概念が最低限必要だろう．実験室・実験装置で制御可能なマクロ変数だけを操作して，実験の目的に適ったミクロの量子状態を，ある現実的な精度の範囲内で「正確に」準備しなければならない．とすればここで，マクロ世界とは単なる「幻」じゃなくて，ミクロ世界に対して確実にある作用を及ぼし，それを制御する働きすらしてるんじゃないか？ DHR 理論でも G-不変量 $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}^G$ とそのセクター構造から G の表現の圏が決まり，その圏が $\mathfrak{A}$ にどう作用するかという情報によって $\mathfrak{F}$ 自身が再構成されていたんだ．

S：さっきの「量子古典対応」だと，どんな古典的マクロ対象も量子的ミクロから構成されている，と考えていたはずですね．でもそうやってミクロから作られたマクロ対象には，構成要素としての量子的ミクロとは別のレベルでの reality があると言うのですか？

T：そう，最近はそういうのを「創発性」と呼ぶんだろうが，物理の「伝統」なら collective mode と呼ぶところだ．マクロが幻か？独立の存在か？とか,「名前」や「解釈」なんかはある意味ではどうでもいいけど，ここで大事なのは，物理的自然の中にミクロとマクロ，量子と古典というふうに「区別」される複数のレベルがあって，それらがお互いにどんな関係で結ばれているか？という問題だ．例えば，物理理論の記述方法と物理的解釈という文脈で言えば，古典論は量子論を語る上で不可欠の語彙を提供する．古典論のエネルギー・運動量・電荷など,「量子古典対応」に沿った概念がなかったら，それらの概念が量子論に入り込んで来なかったら，量子論で実験事実を説明する，現象を解釈する，といったことも不可能なはずだ．

S：量子論は，古典論の言葉で現象を語る，とでも言えばいいんですか …

T：そんな感じかな.「ミクロ・マクロ双対性」というのは，群とその表現の間の双対性や，代数への群作用としての力学系にそれを拡張したガロア理論での双対性などを系統的に物理に持ち込んで，複数レベル間の関係を，ミクロかマクロか，量子か古典か，一方向からだけ見るのではなく，両方の間を自由に行き来する双方向的視点から解明しようというプログラムだ．例えば，ミクロからマクロへという「フィードバック」や「創発」の側面だけではなく，マクロからミクロへの「制御」・「拘束」・境界条件という両方向のベクトルに着目して，その相互関係を考える，というふうに．

S：そういう「複数レベル」の一つ一つはどんなふうに正確に特徴付けられ，区別されるんでしょう？ 例えば，ミクロとマクロ，量子と古典の「境目」はどこにあるんですか？

T：量子論を特徴付ける基本定数はプランク定数 $\hbar$ だけで，長さについて固有のスケールが存在しない，ということがよく強調されるのを知ってるかい？ このために，ミクロとマクロ，量子と古典の「境目」は複数のスケールの間の相対的な関係でしか決まらないから，例えば，長波長の中性子線の干渉効果がマクロサイズで見えたりする．こういう微妙な点まで含めて柔軟かつ正確に「ミクロ・マクロ双対性」に関係した色んな問題を扱っていこうとすると，互いに「双対」になっている 2 つのレベル間を往復して元に戻る，という意味の「双対性」だけでは不十分で，元より少し「膨らんで」しまう，という状況の方がより一般的になる．これは，圏論で adjunction と呼ばれ，対象の分類と解釈の問題を扱い始めると必ずお目に掛かる概念装置だ．いま，まだ特徴付けができていない「一般的」対象が眼の前にあって，それを分類し解釈することを考えよう．それには，既によく知っている標準的な「見本・標本」をたくさん用意しておいて，考えている文脈に関係ある側面について見本と同じ性質を持った「未知」対象は，その側面については見本と同じ，という割切りを

する．これが「分類」ということで,「見本」は「分類指標」・「語彙」として機能する．ここで,「見本・標本」たちは既知の「特殊」なものだけれど，未知の「一般的なもの」といつでも自由に比較可能という意味での「universal なつながり」を持たなければならない．例えば,「時計」それ自身は「特殊な」物理的運動だが，時間的に変化する現象を追うときに事象を時計の針の位置と絶えず universal な仕方で関連付けることで「時間」という普遍的「ラベル」が定まる．色んな種類のこういう分類基準を考え，その相互の関係を解明すれば，自然界の様々なスケールに対応した階層領域と，それらを記述する異なる分野の諸理論相互の関係が統一的に理解できるようになる．物理系の対称性とその破れ，熱的状況と幾何構造の深い関わりの問題，セクター構造と共にセクター内部の状態構造を調べるための [状態準備—物理系と装置の相互作用—測定データの出力] という実験観測過程[5)]，量子情報理論での [符号化—通信路—復号] という過程，制御・フィードバックの過程，方程式を解く過程や逆問題等々，よくよく吟味すると，それら全てに共通する骨格が見つかる．Adjunction まで含めた意味での「ミクロ・マクロ双対性」の枠組でそれらを定式化すれば，それぞれに固有の問題とその相互関係が捉え易くなる．とすると，そこから宇宙・自然の歴史的な形成過程を扱うという展望も …

S：う〜ん，何だか壮大なお話ですね，細部までフォローできたわけじゃないですけど，刺激的な話です．勉強してからまた質問しに来ることにします．先生の話は他の物理の先生の話とだいぶ違う気がしますし．

T：あ，それはそうかもしれない.「最近話題の双対性とは何か？」と質問されたら，他の先生はもっと違った答えをするかもしれない．ただ双対性という概念は，色々な文脈の中で相当長い歴史を経て練られてきたものだから，今日は，他の先生があまり話されないような側面を，しかも双対性の多面性というか普遍性にフォーカスしてみようと思ったんだ．

参考文献

1) Doplicher, S., Haag, R. and Roberts, J.E., Fields, observables and gauge transformations I & II, *Comm. Math. Phys.* **13**, 1-23 (1969); **15**, 173-200 (1969); Local observables and particle statistics I & II, **23**, 199-230 (1971); **35**, 49-85 (1974).
2) Doplicher, S. and Roberts, J.E., Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics, *Comm. Math. Phys.* **131**, 51-107 (1990).
3) Buchholz, D., Ojima, I. and Roos, H., Thermodynamic properties of non-equilibrium states in quantum field theory, *Ann. Phys.* (N.Y.) **297**, 219-242 (2002); Ojima, I., How to formulate non-equilibrium local states in QFT? –General characterization and extension to curved spacetime–, pp.365-384 in "*A Garden of Quanta*" (World Scientific, 2003), e-print: cond-mat/0302283.
4) Ojima, I., A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria –Order parameters of symmetries and of thermality and physical meanings of adjunctions–, *Open Sys. & Inf. Dyn.*, **10**, 235-279 (2003), math-ph/0303009; Temperature as order parameter of broken scale invariance, *Publ. RIMS* **40**, 731-756 (2004), math-ph/0311025; 小嶋 泉「だれが量子場を見たか」，講演集『だれが量子場をみたか』に所収 (日本評論社, 2004), pp.65-107;「場の理論と演算子：量子場とは?」数理科学 2004 年 4 月号, pp.19-25 (数理科学 2006 年 10 月別冊に再録).
5) Ojima, I., Micro-macro duality in quantum physics, pp.143-161 in *Proc. Intern. Conf. on* Stochastic Analysis, Classical and Quantum (World Scientific, 2005); Ojima, I. and Takeori, M., How to observe quantum fields and recover them from observational data?–Takesaki duality as a Micro-Macro duality–, math-ph/0604054, to appear in *Open Sys. & Inf. Dyn.*; 小嶋 泉「量子場の観測過程」数理科学 2005 年 10 月号, pp.18-25.
6) 双対性の数理の易しい解説として，谷村省吾「エキゾチックな対称性の破れとゲージ場の幾何学」素粒子論研究 2003 年 3 月号, pp.F2-21;『理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何—双対性の視点から』(サイエンス社，2006).

（おじま・いずみ，京都大学数理解析研究所）
（たにむら・しょうご，京都大学大学院情報学研究科）