ホロノミーと力学系

一輪車から猫の宙返り，量子コンピュータまで

谷 村　省 吾

1. 問題の原型：可積分条件

[*1]「微分方程式の可積分条件」は，一見地味なテーマだが，物理のいろいろな場面で現れ，しかもゲージ場という形で現れることが多い．この小論は，そういう話題を盛りだくさんに紹介する試みである．まず，この問題の一般的な形式を見ておこう．

変数 $(x^1, x^2, \cdots, x^n, y)$ を持つ力学系を考える．これらはすべて時間 t の関数とする．$x = (x^1, \cdots, x^n)$ の関数 $H_\mu(x)$ が与えられて

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} H_\mu(x) \frac{dx^\mu}{dt} \tag{1}$$

という方程式で $y(t)$ の変化の仕方が決められているとする．そうすると，y を x の関数 $y = F(x)$ で表せるか？という疑問が湧く．もしそのような関数 F があったとしたら，

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{dt} \tag{2}$$

となるので，(1), (2) が任意の $x(t)$ に対して成り立つためには

$$\frac{\partial F}{\partial x^\mu} = H_\mu(x) \tag{3}$$

が成り立つことが必要十分である．関数 $F(x)$ の偏微分は順序を交換しても同じ導関数を与えるので，

$$\frac{\partial H_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial F}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial F}{\partial x^\nu} = \frac{\partial H_\nu}{\partial x^\mu} \tag{4}$$

となる．つまり，方程式 (3) の解 $F(x)$ が存在するならば，任意の μ, ν について

$$\frac{\partial H_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial H_\nu}{\partial x^\mu} = 0 \tag{5}$$

が成立すべきである．逆に，(5) が成立すれば方程式 (3) の解が存在することが知られている（Poincaré の補題）．(5) を方程式 (3) の可積分条件という．同じことは微分形式を使うと簡潔に表現される[1]：$\mathbb{R}^n$ と同相な領域では，

$$\exists F,\, dF = H \iff dH = 0. \tag{6}$$

また，条件 (1) を保ちながら x を閉曲線 C に沿って一周させたときに y に生じる変化は

$$\Delta y = \int_C \sum_{\mu=1}^{n} H_\mu(x)\, dx^\mu \tag{7}$$

である．$\Delta y \neq 0$ ならば $y = F(x)$ となるような関数は存在しない．Δy を閉曲線 C に伴う**ホロノミー** (holonomy) という．

2. 一輪車：拘束系の例として

古典力学系は，さまざまな状態を取り得る．物理量は状態に応じて実数値が決まる関数である．微積分ができない関数よりもできる関数の方が圧倒

*1）　本稿は数理科学（サイエンス社）2011 年 4 月号 (Vol.49-4, No.574) pp.8-14 に掲載されたものである．

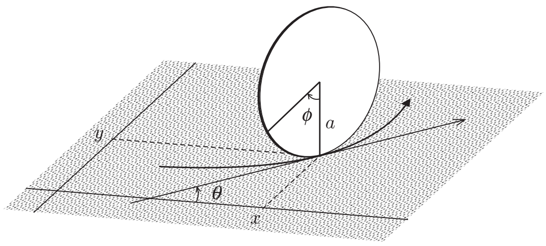

図 1　一輪車（サドルとペダルは描かれていない）．

的に分析が容易であるし，日常的に目にする物体の運動や物理量は滑らかな関数で近似できることが多い．そこで我々は，古典力学系の状態全体の集合は微分可能多様体をなし，物理量はこの多様体上の微分可能な関数であると考える．

力学系には**自由度** (degree of freedom) という概念がある．自由度とは，系の状態を一意的に指定するために必要十分な変数の個数であり，状態空間の次元である．例えば，床の上を運動する一輪車を考えよう[2]（図 1）．一輪車には車輪の向きを変えるサドルと，車輪を回転させるペダルがついている．簡単のために，一輪車は倒れず，タイヤはスリップしないと仮定する．この一輪車の状態を指定するのにいくつの変数が必要だろうか？

答えは 4 である．車輪が床に接している点を指定するのに (x, y) という 2 つの座標を用いる．さらに，車輪の向き（＝サドルの角度）を指定する変数 θ と車輪の回転角（＝ペダルの角度）を指定する変数 ϕ を用いる．(x, y, θ, ϕ) という 4 つの変数の値がわかれば，一輪車の状態は一意的に特定できる．したがって一輪車の自由度は 4 である．

しかし，4 つの変数すべてが独立かというとそうでもない．ペダルをこぐと，一輪車は移動する．つまりペダル角 ϕ に連動して接地点の位置 x, y が変わる．これらの変数の間には

$$dx = a\cos\theta\, d\phi, \tag{8}$$

$$dy = a\sin\theta\, d\phi \tag{9}$$

という関係が成り立つ．ここで a は車輪の半径である．a は定数なので，自由度とは言わない．(8), (9) は，ペダル角 ϕ が $d\phi$ の分だけ変動すれば，タイヤはスリップしないので，サドルの向き θ で決まる方向に (dx, dy) の分だけ車輪が移動するということを言っている．(8), (9) のように，変数の変動の仕方を制約する関係式を微分形の**拘束条件** (constraint) という．

さて，一輪車には 4 つの自由度と 2 つの拘束条件があるなら，真の自由度は $4 - 2 = 2$ つではないかという気がしてくる．つまり，拘束条件によってサドル角とペダル角から接地点の動きが決まるなら，$x = F(\theta, \phi)$, $y = G(\theta, \phi)$ のような関数があって，サドル角とペダル角から接地点の位置は決まってしまうのではないか？という疑問が湧く．

しかしそのような関数 F, G は存在しないことが背理法で証明される．もしも $x = F(\theta, \phi)$ という関数があったとしたら，

$$dx = \frac{\partial F}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial F}{\partial \phi} d\phi = H_\theta\, d\theta + H_\phi\, d\phi \tag{10}$$

が導かれ，(8) と見比べると $H_\theta = 0$, $H_\phi = a\cos\theta$ である．偏微分は順序を変えても同じ値になるので

$$0 = \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\partial H_\phi}{\partial \theta} = -a\sin\theta$$

は等しいはずだが，左辺は恒等的に 0，右辺は 0 ではないので，矛盾である．したがって，(8) を満たすような関数 $x = F(\theta, \phi)$ は存在し得ない．同様に (9) を満たす関数 $y = G(\theta, \phi)$ が存在しないこともわかる．

変数の微分を含んだ拘束条件 (8) を微分を含まない $x = F(\theta, \phi)$ という式に書き換えられるなら，**可積分** (integrable) であるという．いまのは**非可積分** (non-integrable) な拘束条件だったのである．

しかし，この結果はさほど意外なものではない．(θ, ϕ) を座標とする平面上で (θ_0, ϕ_0), $(\theta_0 + \Delta\theta, \phi_0)$, $(\theta_0 + \Delta\theta, \phi_0 + \Delta\phi)$, $(\theta_0, \phi_0 + \Delta\phi)$ を頂点とする長方形に沿って一周すると，一輪車は

$$\Delta x = a(\cos(\theta_0 + \Delta\theta) - \cos\theta_0)\,\Delta\phi, \tag{11}$$

$$\Delta y = a(\sin(\theta_0 + \Delta\theta) - \sin\theta_0)\,\Delta\phi \tag{12}$$

の分だけ変位する．これは自動車を縦列駐車させるときの操作（ハンドルを回してから前進し，ハンド

ルを戻してから後進する）と同じである．$\Delta x, \Delta y$ はホロノミーの一種である．ホロノミーがあるからこそ一輪車は移動可能なのである．サドル角とペダル角が決まれば接地点の位置が決まってしまうなら，一輪車は移動できず，乗り物としての用をなさなかったはずである．

3. 平行移動の幾何学

幾何学では図形の平行移動が重要であるが，平行移動も，ある種の拘束系を定める．直観的には，平行移動とは「なるべく向きを変えないように図形を移動させること」を意味する．曲がった空間上では，ベクトルを閉曲線に沿って平行移動させると，出発点に戻って来たベクトルは正味の回転を受けている．なるべく向きを変えないように運んだはずのベクトルが，いつの間にか向きを変えているのである（図 2）．

平行移動という概念を定式化しよう．M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の n 次元部分多様体とする．点 $x \in M$ における M の接ベクトル空間 T_xM は $\mathbb{R}^N$ に埋め込まれるが，T_xM 上への射影作用素を $P_x : \mathbb{R}^N \to T_xM$ と書く．M 上の曲線 $c : \mathbb{R} \to M$ と M 上のベクトル場 V が与えられたとき，c に沿う V の**共変微分** (covariant derivative) を

$$\nabla_{\dot{c}(t)} V := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \Big(P_{c(t)} V(c(t+\varepsilon)) - V(c(t)) \Big) \tag{13}$$

と定める．$\nabla_{\dot{c}(t)} V = 0$ のとき，c に沿って V は**平行移動** (parallel transport) されているという．

もう少し詳しく書くと，接空間 T_xM の基底を

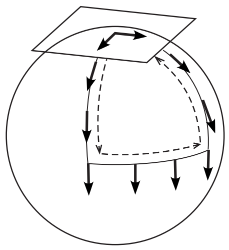

図 2　球面上でベクトルを閉曲線に沿って平行移動させる．

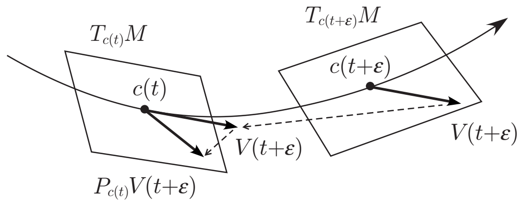

図 3　接空間からはみ出たベクトルを接空間に射影することによって平行移動を定める．

$\{e_1(x), \cdots, e_n(x)\}$ とし，双対基底を $\{f^1(x), \cdots, f^n(x)\}$ とする．$\langle f^\mu, e_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu$ と，T_xM に直交する任意の $v \in \mathbb{R}^N$ に対して $\langle f^\mu, v \rangle = 0$ が成り立つ．接ベクトル場は $V(x) = V^\mu(x) e_\mu(x)$ と展開される（繰り返し添字は 1 から n まで和をとる）．点 $c(t+\varepsilon)$ を原点とするベクトル $V(c(t+\varepsilon))$ を原点 $c(t)$ に移して接空間 $T_{c(t)}M$ に射影したものは

$$\begin{aligned} &P_{c(t)} V(c(t+\varepsilon)) \\ &= e_\mu(c(t)) \left\langle f^\mu(c(t)), e_\nu(c(t+\varepsilon)) \right\rangle V^\nu(c(t+\varepsilon)) \end{aligned}$$

となる（図 3）．これを ε について微分したものが共変微分

$$\nabla_{\dot{c}(t)} V = e_\mu \Big(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\rho} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} V^\nu \Big) \frac{dx^\rho}{dt} \tag{14}$$

となる．ただし

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} := \Big\langle f^\mu(x), \frac{\partial}{\partial x^\rho} e_\nu(x) \Big\rangle \tag{15}$$

で**接続係数** (connection coefficients) を定めた．そうすると曲線 $c(t) = (x^\rho(t))$ に沿ってベクトル場が平行移動されるべしという条件は

$$\Big(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\rho} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} V^\nu \Big) \frac{dx^\rho}{dt} = 0 \tag{16}$$

と書かれる．さらに一本の曲線に限らず，あらゆる方向に平行移動されるべしという条件は

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\rho} = -\Gamma^\mu_{\nu\rho} V^\nu \tag{17}$$

あるいは $dV^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\rho} V^\nu dx^\rho$ と書かれる．これは (3) によく似た拘束条件である．これが可積分であるための必要十分条件は (4)，すなわち

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\rho} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} = 0 \tag{18}$$

であり，左辺を計算すると

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\Gamma^\mu_{\nu\rho} - \frac{\partial}{\partial x^\rho}\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\Big)V^\nu \tag{19}$$

となる．括弧の中身は**曲率テンソル** (curvature tensor) と呼ばれる．曲率が 0 なら平行移動の方程式 (17) は可積分であり，ありとあらゆる場所にベクトルを平行移動して $V^\mu(x)$ を x の関数として定めることができる．曲率が 0 でなければ，平行移動の道筋によって平行移動の結果は異なる．

4. 猫の宙返り

猫の宙返りとは，猫の 4 本の脚を上に向けて宙づりにして，そっと手を離すと，猫は空中で体の向きを変えて，脚を床に向けて着地するという現象である．一方で，力学には角運動量保存則という規則があり，外部からトルクを受けていない物体の角運動量は変化しないはずである．猫が落下開始するとき猫に回転の初速度は与えなかったし，落下中の猫は他からトルクを受けていないので，猫は角運動量ゼロのまま，回転することなく，背中からどすんと着地するはずではないのか？ それとも猫は角運動量保存則を破っているのか？

この疑問は非常に歴史が古い．結論を言うと，猫は角運動量ゼロのまま体の向きを変えることができるのである．このことを分析しよう．

猫の体を質点系として扱う．質量 $m_1, m_2, \cdots, m_N$ といったパーツで猫の体はできているとする．質量 m_i の質点の位置を $\boldsymbol{r}_i \in \mathbb{R}^3$ とする．すべての質点間の相対的な距離を保って全質点を一斉に移動させる操作を**剛体的変換** (rigid transformation) という．猫の体全体を剛体的に回転させる操作は 3 次元回転行列 $g \in SO(3)$ の $\boldsymbol{r}_i \mapsto g\boldsymbol{r}_i$ という作用で記述される．もちろん猫の運動はつねに剛体的とは限らず，体のパーツの相対的位置関係が変わるような変形運動も行う．回転行列 $g(t)$ そのものが時間に依存していて $\boldsymbol{r}_i(t) = g(t)\boldsymbol{q}_i(t)$ と書かれる場合（$\boldsymbol{q}_i(t)$ は変形運動を記述する変数），時間微分を文字の上の点で表すと，質点の速度は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i &= \dot{g}\boldsymbol{q}_i + g\dot{\boldsymbol{q}}_i \\ &= \dot{g}g^{-1}\cdot g\boldsymbol{q}_i + g\dot{\boldsymbol{q}}_i \\ &= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i + g\dot{\boldsymbol{q}}_i. \end{aligned} \tag{20}$$

ここで $\dot{g}g^{-1}$ は反対称行列である．3 次元ベクトル $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ に対応して 3 次の反対称行列

$$R(\boldsymbol{\omega}) := \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

を定めると，反対称行列のベクトルへの作用は，ベクトル積

$$R(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{22}$$

に等しい．$\boldsymbol{\omega}$ は角速度ベクトルと呼ばれる．質点系の角運動量は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &:= \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i \\ &= \sum_i m_i (g\boldsymbol{q}_i)\times(\dot{g}\boldsymbol{q}_i + g\dot{\boldsymbol{q}}_i) \\ &= g\sum_i m_i \boldsymbol{q}_i \times (g^{-1}\dot{g}\,\boldsymbol{q}_i) \\ &\quad + g\sum_i m_i \boldsymbol{q}_i \times \dot{\boldsymbol{q}}_i \end{aligned} \tag{23}$$

で定義される．ここで $(g\boldsymbol{a})\times(g\boldsymbol{b}) = g(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ を使った．$g^{-1}\dot{g}$ も反対称行列であり，$g^{-1}\dot{g}\,\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{q}_i$ とおく．また，$q = (\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n)$ と書いて

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = I(q)\boldsymbol{\Omega} := \sum_i m_i \boldsymbol{q}_i \times (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{q}_i) \tag{24}$$

で定まる $I(q)$ は $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^3$ に $\tilde{\boldsymbol{L}} \in \mathbb{R}^3$ を対応させる線形写像である．この $I(q)$ を**慣性テンソル** (inertia tensor) あるいは**慣性作用素** (inertia operator) という．じつは $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は対称作用素である．また，全質点が一直線上に並んでいると I の逆写像は存在しないが，それ以外の配置に対しては I の逆写像が存在する．

角運動量 $\boldsymbol{L}$ を 0 に保てという条件は

$$I(q)\boldsymbol{\Omega} + \sum_i m_i \boldsymbol{q}_i \times \dot{\boldsymbol{q}}_i = 0, \tag{25}$$

すなわち

$$\boldsymbol{\Omega} = -I(q)^{-1}\sum_i m_i \boldsymbol{q}_i \times \dot{\boldsymbol{q}}_i \tag{26}$$

であり，$R(\boldsymbol{\Omega}) = g^{-1}\dot{g}$ だったことを思い出すと

$$g^{-1}\,dg = -R\circ I(q)^{-1}\sum_i m_i \boldsymbol{q}_i \times d\boldsymbol{q}_i \tag{27}$$

となる．これも (3), (8), (17) に類似の拘束条件方程式である．この式の右辺を

$$A(q) := -R\circ I(q)^{-1}\sum_i m_i \boldsymbol{q}_i \times d\boldsymbol{q}_i \tag{28}$$

と書き，A を「猫のゲージ場」と呼ぶ．A は 3 次反対称行列に値を持つ 1 次微分形式である．猫が剛体的回転とは限らない一般的な運動をしているときに，見かけの角運動量を計算し，それを打ち消すような剛体運動の角速度 (26) を計算するのがゲージ場 A の役割である．角運動量を 0 に保てという拘束条件 (27) は

$$dg = gA \tag{29}$$

と書かれる．問題はこの拘束が可積分か否かである．もし可積分なら g は関数 $g(q)$ で表され，外微分の規則から $ddg = 0$ を満たすはずである．ところが，

$$\begin{aligned} ddg &= dg\wedge A + g\,dA \\ &= gA\wedge A + g\,dA \\ &= g\,(dA + A\wedge A) \end{aligned} \tag{30}$$

となり，曲率形式 $F := dA + A\wedge A$ が 0 でなければこの式は 0 になってくれない．猫の空間が曲がっていると，猫の回転を表す変数 g は非可積分であり，q の関数として表すことができず，猫が手足を振って元の姿勢に戻っても，つまり変数 q が変動して元の値に戻っても g は元の値に戻らず，ホロノミーを生じる．このホロノミーがすなわち猫の宙返りである．

Guichardet[3] は曲率 F を計算して，質点が 4 個以上あれば，ホロノミーによって任意の回転を作ることができることを証明している．岩井[4] はファイバー束の理論を用いてこの問題を定式化し，また，質点系から剛体系への拡張も行っている．

5. Berry-Simon-Wilczek-Zee のホロノミー

ここまではもっぱら古典力学に関する話題だったが，類似の構造は量子力学でも見出され，Berry phase とか断熱位相とか幾何学的位相の名で知られている[5]．Berry[6] による発見 (論文掲載は 1984 年) を数学的に基礎付けたのが Simon[7] (1983) である[*2]．また，Berry が可換群 $U(1)$ の場合について発見したことを非可換群に拡張したのが Wilczek と Zee[8] (1984) である．

幾何学的位相を理解する前提として，量子力学の断熱定理を知っておく必要がある．話を簡単にするため，n 次元の Hilbert 空間 $\mathbb{C}^n$ を状態空間とし，ハミルトニアン $H(x)$ に従う量子力学系を考える．$x = (x^1, \cdots, x^r)$ は量子系を制御するための変数であり，この量子系に外部から与えている電場や磁場や境界条件などを表している．実験者は意図的に制御変数 x を時間の関数 $x(t)$ として与えることができる．そうすると量子系の状態ベクトル $\psi(t) \in \mathbb{C}^n$ は Schrödinger 方程式

$$i\hbar\,\dot{\psi}(t) = H(x(t))\,\psi(t) \tag{31}$$

に従って時間変化する．ハミルトニアンを

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_\alpha E_\alpha(x) P_\alpha(x) \\ &= \sum_\alpha \sum_{k=1}^{m_\alpha} E_\alpha(x) |\alpha, k; x\rangle\langle\alpha, k; x| \end{aligned} \tag{32}$$

のようにスペクトル分解する．$|\alpha, k; x\rangle$ は $H(x)$ の固有値 $E_\alpha(x)$ に属する固有ベクトルである．$\alpha \neq \beta$ なら $E_\alpha(x) \neq E_\beta(x)$ とする．また，$k = 1, \cdots, m_\alpha$ は同じ固有値 $E_\alpha(x)$ に縮退している固有ベクトルを区別するためのラベルであり，$\langle\alpha, k; x|\beta, l; x\rangle = \delta_{\alpha\beta}\,\delta_{kl}$ とする．

断熱定理とは次のような主張である．制御変数 $x(t)$ を十分ゆっくり動かすとき，初期状態 $\psi(0)$ が $H(x(0))\psi(0) = E_\alpha(x(0))\psi(0)$ を満たすならば，任意の時刻 t $(0 \le t \le T)$ においても

*2) 論文投稿は Berry が先だが，論文が印刷されるのは Simon の方が早かった．Simon は彼の論文の中で “found by Berry” と書いている．

$H(x(t))\psi(t) = E_\alpha(x(t))\psi(t)$ が満たされる．つまり，$x(t)$ の変化に伴ってエネルギー固有値は連続的に変化していくが，初期状態が α 番目のエネルギー固有状態ならば，その後の状態も α 番目のエネルギー固有状態にとどまり続ける，というのが断熱定理の内容である.「十分ゆっくり」という条件（断熱条件）は $(E_\alpha - E_\beta)T/\hbar \gg 1$ と書かれ，エネルギー準位間隔が決める時間スケールに対して十分遅いという意味である．もしエネルギー準位間隔が 0 になると (level crossing と呼ばれる)，断熱条件は成り立たない．

この状況でどうやってホロノミーが現れるのだろうか？　制御変数 $x(t)$ を経路 C に沿ってゆっくり動かして $x(T) = x(0)$ に戻したときに，状態ベクトルは元に戻るかどうか調べてみるとホロノミーが見出される．断熱定理によれば α は一定と見なしてよいので $|\alpha, k; x\rangle = e_k(x) \in \mathbb{C}^n$ と書く．$B(x) := (e_1(x), \cdots, e_m(x))$ と並べたものは n 行 m 列の行列であり $(n > m)$，

$$B^\dagger(x)B(x) = \mathbf{1}_m,\ B(x)B^\dagger(x) = P_\alpha(x) \tag{33}$$

を満たす．ここで $\mathbf{1}_m$ は m 次の単位行列．$H(x)\psi = E_\alpha(x)\psi$ を満たす ψ は $\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_m)^T \in \mathbb{C}^m$ を使って

$$\psi = e_1(x)\phi_1 + \cdots + e_m(x)\phi_m = B(x)\phi \tag{34}$$

と書ける．これを (31) に代入すると

$$i\hbar(\dot{B}\phi + B\dot{\phi}) = E_\alpha(x(t))\, B\phi \tag{35}$$

となり，両辺に $B^\dagger$ を左からかけると

$$i\hbar(B^\dagger\dot{B}\phi + \dot{\phi}) = E_\alpha(x(t))\, \phi \tag{36}$$

を得る．さらに，$\xi \in \mathbb{C}^m$ や m 次の行列 A_μ を

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \exp\Big[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E_\alpha(x(s))ds\Big]\xi(t), \\ B^\dagger\dot{B} &= B^\dagger\frac{\partial B}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{dt} = A_\mu\frac{dx^\mu}{dt} \end{aligned} \tag{37}$$

で導入すると，

$$\frac{d\xi}{dt} = -A_\mu\, \xi\, \frac{dx^\mu}{dt} \tag{38}$$

を得る．これは (1) と同じパターンの拘束条件である．$A(x) := A_\mu dx^\mu$ で m 次の反エルミート行列に値を持つ 1 次微分形式を定めると (38) は $d\xi = -A\xi$ と書けて (29) と類似の式になる．そうすると可積分条件は

$$dd\xi = -dA\,\xi + A\wedge d\xi = -(dA + A\wedge A)\xi \tag{39}$$

が 0 になることであり，曲率 $F := dA + A \wedge A$ が可積分性の障害である．$F \neq 0$ だと $x(T) = x(0)$ でも $\xi(T) = \xi(0)$ にはならず，状態ベクトルは m 次ユニタリ行列の分だけ回転，すなわちホロノミーを受ける．

じつはこのホロノミーを利用して量子コンピュータのユニタリゲートを作ろうというアイディアがある[9]．コンピュータとして役に立つためには演算時間は短いほどよいが，断熱近似が成り立つためには，ゆっくり動かす必要がある．この要請を両立させるためには，制御変数はなるべく短い閉経路に沿って動かすのがよい.「一定のホロノミー（＝ユニタリゲート）を作り出す最短経路を見つけよ」という問題は**等ホロノミー問題** (isoholonomic problem) として定式化される．この問題は「猫の宙返りの最適化」という意味もあり，1991 年に数学者 Montgomery によって出題された[10]．等ホロノミー問題に対する部分的な答えは Montgomery も見つけていたが，筆者らが等質空間の場合に完全な答えを見つけたのは 2004 年のことである[11]．また，古池らは量子コンピュータの最適制御問題を力学の最速降下線の手法で解いている[12]．

6. ゲージ理論の普遍性

滑らない一輪車や，平行移動するベクトルや，角運動量 0 の猫，断熱的に変化する量子状態などはいずれも拘束系の例であり，拘束条件によって自由度が減るかと思いきや，減らない例であった．いずれも非可積分な拘束系であり，ぐるっと一周して元に戻ったつもりが元に戻らない正味の回転のようなもの，すなわちホロノミーを生じる系であった．非可積分という否定的な言葉で捉えられ

るが，ホロノミーのおかげで一輪車は移動できるし，猫は宙返りできるのであり，非可積分性はポジティブな効用をもたらしている．また，いずれの例でも，何らかの空間上の平行移動を定めるゲージ場が登場し，平行移動の非可積分性が曲率という形で現れた．

ゲージ場は，もともと Einstein の一般相対性理論を拡張しようとした Weyl の試みから生まれ，現在では素粒子の強い力・弱い力・電磁力を記述する標準理論の基本要素になっている．つまりゲージ場はミクロの世界の物理の主役である．

そのようなゲージ場が，一見，素粒子とも量子論とも関係のないマクロの世界の一輪車や猫の力学に顔を出すのは不思議なことである．もちろんゲージ理論がなければ猫の運動が記述できなかったわけではない．通常の Newton 力学の範疇で十分記述可能である．しかしいったんゲージ場という構造に気がつくと，そこにもここにもゲージ場が潜んでおり，目に見える効果をもたらしていることに気づく．ゲージ場という構造そのものが非常に自然であり，ミクロ・マクロのスケールの違いを超えて，あまねく潜在しているものなのだろう．

謝辞：猫の宙返りは岩井敏洋教授（京都大学）の十八番と言ってもよい研究テーマであり，私は大学院生の頃から岩井教授の論文に影響を受けて[13]今日に至るまで力学におけるゲージ構造の研究を続けています．力学と幾何学の面白さを教えて下さり，いつもおおらかに笑って励まして下さる岩井教授に感謝します．

参考文献

1) 微分幾何学の基本的なことについては，谷村省吾『理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何』臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ 52, サイエンス社 (2006).

2) 佐藤文隆「車庫入れのゲージ理論」臨時別冊・数理科学「ゲージ理論の発展」120-124, サイエンス社 (2009).

3) A. Guichardet, “On rotation and vibration motions of molecules”, *Ann. Inst. H. Poincaré* **40**, 329 (1984).

4) T. Iwai, “A geometric setting for classical molecular dynamics”, *Ann. Inst. H. Poincaré* **47**, 199 (1987); 岩井敏洋「ネコの宙返りと分子の力学」数理科学 1988 年 9 月号, 38-42; T. Iwai, “Classical and quantum mechanics of jointed rigid bodies with vanishing total angular momentum”, *J. Math. Phys.* **40**, 2381 (1999).

5) つい最近，幾何的位相の新しい測定方法が実証された．H. Kobayashi, S. Tamate, T. Nakanishi, K. Sugiyama, and M. Kitano, “Direct observation of geometric phases using a three-pinhole interferometer”, *Phys. Rev. A* **81**, 012104 (2010).

6) M. V. Berry, “Quantal phase factors accompanying adiabatic changes”, *Proc. R. Soc. Lond. A* **392**, 45 (1984).

7) B. Simon, “Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and Berry’s phase”, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2167 (1983).

8) F. Wilczek and A. Zee, “Appearance of gauge structure in simple dynamical systems”, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 2111 (1984).

9) P. Zanardi and M. Rasetti, “Holonomic quantum computation”, *Phys. Lett. A* **264**, 94 (1999).

10) R. Montgomery, “Isoholonomic problems and some applications”, *Commun. Math. Phys.* **128**, 565 (1991).

11) S. Tanimura, M. Nakahara, and D. Hayashi, “Exact solutions of the isoholonomic problem and the optimal control problem in holonomic quantum computation”, *J. Math. Phys.* **46**, 022101 (2005); e-print arXiv quant-ph/0406038.

12) 古池達彦, 奥平陽介, 細谷暁夫「量子最速曲線」日本物理学会誌 **62**(7), 513 (2007).

13) 今回の話題の半分くらいは私の修士論文に書いたことである．谷村省吾「トムとベリー」素粒子論研究 85 巻 1 号, 1 (1992 年 4 月). インターネット上のデータベース CiNii からダウンロードできる．

（たにむら・しょうご，名古屋大学大学院情報科学研究科）