量子古典対応

量子化の技法，古典系創発の機構

谷 村 省 吾

1. 古典力学と量子力学

*[1]編集部からいただいた仮題は「半古典論，量子古典対応」，それも「量子力学の数学的技法」という特集の中でという依頼で，どうして私に？と私が戸惑うのも無理はなく，そのようなテーマであれば量子力学に関わる数理的研究をされている方なら誰しも一家言をお持ちであり，谷村に執筆を任せるよりもふさわしい方々が全国におられるからである．そうは思うものの，せっかくいただいた題に乗って，私が読み聞きして知ったこと・考えていることをお話ししたい．

古典力学と量子力学をどう捉えるか？ まず名前と歴史から考えよう．**古典力学** (classical mechanics) というからには「古い力学」である．なぜそう呼ばれるかというと，それまでの力学とは一線を画する「新しい力学」がある時期に生まれたからである．新しい力学は**量子力学** (quantum mechanics) と言う．1900 年頃から輻射(ふくしゃ)や原子の理論として**量子論** (quantum theory) が徐々に形成されていたが，1924 年に Born が論文の題に Quantenmechanik と書いたのがこの言葉の初出らしい．1925 年に Born と Jordan が決定版とも言える論文を著し，再びこの言葉を題に掲げた．「これこそが原子の世界の真の力学法則だ」という自信と意気込みが Born にあったのだろう．当時 Jordan は Born の助手として量子力学の建設に加担する立場だった[1]．

古典力学という名称を誰が最初に使ったのか私はつきとめていないが，ともかく量子力学の出現に伴って，量子力学ではない力学は古典力学と呼ばれることになった．ただ「力学」というと意味が限定的に感じられるせいか，電磁気学や相対性理論は「古典論・古典物理」という範疇(はんちゅう)に入れられることが多い．ついでに量子力学以前の量子論は**前期量子論** (old quantum theory) とも呼ばれる．何かにつけ「古い」,「新しい」とレッテルを貼るのは品がないような気もするが，そういう習わしである．なお，古典力学は「古くて今では誰も研究しない力学」ではなく，現代でも利用されているのはもちろんのこと，今も研究され発展しつつある．

古典力学と量子力学の相違点を言う前に共通点を言おう．私は「力学」というものを「系・状態・物理量・値・運動」という 5 者の存在様式と関係を記述する理論だと規定したい[2]．力学の構文は「A という系が，B という状態にあるとき，C という物理量は，D という値をとる」という形式である．例えば「質量 144g のボールが時速 120km で飛んでいるときエネルギーは 80J である」という文は力学の文である.「水素原子が第 1 励起状態にあるとき電子の束縛エネルギーは 3.4eV である」という文も力学の構文にのっとっている．これら

*1） 本稿は数理科学（サイエンス社）2012 年 4 月号 (Vol.50-4, No.586), 特集テーマ「量子力学の数学的技法」, pp.19-25 に掲載された.

の例文には「運動」が現れていないが，運動とは状態の変化あるいは物理量の変化のことを言う．

古典力学と量子力学の相違点は何か？ 第一に対象とする系が違う．古典力学は惑星や振り子や流体など，人間の目に見え手に触れるような大きさの系を対象にする．量子力学は原子・電子・素粒子など，人間の通常の感覚では検知するのが困難であるような小さな系を対象にする．しかし目に見えるほどの大きな系でも古典力学では説明のつかない「巨視的量子効果」と呼ばれる挙動を示すことがあるので，「大きければ古典，小さければ量子」という分け方は絶対的なものではない．

第二に，物理量の代数構造が異なる．物理量にはスカラー倍・和・積などの演算規則があるが，古典力学の物理量の積は可換 ($AB = BA$)，量子力学の物理量の積は非可換 ($AB \neq BA$) である．この点が両者の決定的な違いである．

この他に，古典力学ではエネルギーや角運動量の値が連続的に変動できるが，量子力学では離散的な飛び飛びの値しか許されないという，連続値と離散値の違いがある．また，古典力学では系の状態を適切に調節すればすべての物理量の測定値を一意的に予測できるが，量子力学では状態をどう選んでもすべての物理量の測定値は一意的には決められず確率的なゆらぎを免れないという，決定論と確率論の違いもある．しかし，これらの差異もまた物理量代数の可換・非可換という差異に由来すると言ってよい．非可換代数に基づく力学は 1925 年の Heisenberg の行列力学に始まるが，以下では Segal[3)] が 1947 年に定式化した代数的量子力学の観点から古典力学と量子力学を対比させよう．

2. なぜ非可換だと離散値なのか？

力学では物理量 (observable) と値 (value) の概念を区別する．例えば「エネルギー」は物理量であり，「80J」はエネルギーの値である．非可換なのは物理量の積であり，値の積ではない．物理量は抽象的なシンボルでしか表せないものだ．物理量 A, B の和 $A + B$ や積 AB や，複素数 $\lambda \in \mathbb{C}$ によるスカラー倍 λA が定められる．単位元と呼ばれる特別な元 $\mathbf{1}$ があり $A\mathbf{1} = \mathbf{1}A = A$ を満たす．線形性と結合律と分配律を満たす集合は**代数**と呼ばれる．さらに各元 A の共役 A^* が定まっていると **$*$（スター）代数**，各元 A のノルム $||A||$（非負実数）が定義され $||A^*A|| = ||A||^2$ という性質と完備性が備わっていると **C*（シースター）代数**と呼ばれる．物理量全体の集合は $*$ 代数になり，有界物理量全体の集合は C^* 代数になる．

物理量の値をどう定めるか？ 物理量代数 $\mathscr{A}$ の元 A に対し $AA' = A'A = \mathbf{1}$ となる $A' \in \mathscr{A}$ があれば A' を A の逆元という．しかし逆元は存在するとは限らない．とくに 0 には逆元が存在しない．物理量 A と複素数 c に対し $A - c\mathbf{1}$ の逆元が存在しないとき，c は A の**スペクトル値** (spectral value) であるという．ニュアンスとしては，「$A - c\mathbf{1}$ の逆元がない」ことは「$A - c\mathbf{1}$ の値が 0 になることがある」つまり「A の値が c になることがある」と解釈できる．A のスペクトル値全体の集合を $\sigma(A)$ と書く．

スペクトル値は一つの物理量 A だけで決まるものではなく，物理量代数 $\mathscr{A}$ によって決まる[4)]．スペクトル値は「$A - c\mathbf{1}$ の逆元が代数 $\mathscr{A}$ の中にあるかないか」という条件で規定されるからだ．

可換代数の例を挙げると，Q, P は $Q^* = Q$, $P^* = P$ と $[Q, P] := QP - PQ = 0$ を満たす物理量で，そのスペクトル集合は $\sigma(Q) = \sigma(P) = \mathbb{R}$（実数全体）だとする．このとき調和振動子のエネルギーと呼ばれる物理量

$$H := \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 Q^2 \qquad (1)$$

のスペクトルは $\sigma(H) = [0, \infty)$（非負実数全体）になる．ここで m, ω は正の実数である．P も Q も連続的な実数値をとるとしたら H が連続的な非負の実数値をとるのは当たり前に見える．

ところが $[Q, P] = 0$ という仮定を $[Q, P] = i\hbar\mathbf{1}$（$\hbar$ は正の実数）で置き換えて非可換代数に移行すると，$\sigma(Q) = \sigma(P) = \mathbb{R}$ であっても H のスペクトルは

$$\sigma(H) = \left\{ \hbar\omega\Big(n + \frac{1}{2}\Big) \,\Big|\, n = 0, 1, 2, \cdots \right\} \quad (2)$$

という離散値に限られる．物理量としての H は式 (1) で定められているが，H の値はたんに「P の値と Q の値を 2 乗して足した値」ではない．

同様に，物理量 Q_j, P_j ($Q_j^* = Q_j, P_j^* = P_j; j = 1, 2$) から角運動量と呼ばれる物理量

$$L := Q_1 P_2 - Q_2 P_1 \quad (3)$$

を定めると，可換代数の中では L のスペクトルは $\sigma(L) = \mathbb{R}$ である．しかし，Q_j, P_j が

$$[Q_j, Q_k] = 0, \qquad [P_j, P_k] = 0,$$
$$[Q_j, P_k] = i\hbar\delta_{jk}\mathbf{1} \quad (4)$$

を満たす非可換量だとすると L のスペクトルは $\sigma(L) = \hbar\ell$ ($\ell = 0, \pm1, \pm2, \cdots$) となる．つまり，同じ式 (3) で規定される物理量 L であっても，それが可換代数の中にあるか非可換代数の中にあるかによって，L が取り得る値は連続になったり離散になったりする．

実数や複素数は可換代数をなす．物理量代数が可換ならば物理量の演算とスペクトル値の演算は準同形対応がつくが，物理量代数が非可換な場合は，物理量の演算とスペクトル値の演算は対応がつかず，スペクトル値は物理量の定義式から素朴に予想される値とは食い違ってくる．

3. なぜ非可換だと確率論なのか？

この表題の言い方は不正確で，正しくは，可換代数でも確率論を使う場面はあるが，非可換代数では確率論の使用が不可避になると言うべきである．

前節で物理量のスペクトル値という概念を導入したが，じつは値には 2 種類の値があり，もう一つは期待値と呼ばれる．各物理量 $A \in \mathscr{A}$ に値 $\nu(A) \in \mathbb{C}$ を対応させる写像 $\nu : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ が任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ と任意の $A, B \in \mathscr{A}$ に対して

$$\nu(\lambda A) = \lambda\,\nu(A), \quad (5)$$
$$\nu(A + B) = \nu(A) + \nu(B), \quad (6)$$
$$\nu(A^* A) \in \mathbb{R} \text{ かつ } \nu(A^* A) \geq 0, \quad (7)$$
$$\nu(\mathbf{1}) = 1 \quad (8)$$

を満たしていれば ν を物理量代数 $\mathscr{A}$ 上の**状態** (state) といい，$\nu(A)$ を物理量 A の**期待値** (expectation value) という．

状態 χ が $\chi(AB) = \chi(A)\chi(B)$ も満たしていれば χ を $\mathscr{A}$ 上の**指標** (character) という．指標の値 $\chi(A) = c$ は A のスペクトル値である．なぜなら $A - c\mathbf{1}$ の逆元 T が存在したとすると $T(A - c\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ となり，これを指標に代入すれば

$$\chi(T(A - c\mathbf{1})) = \chi(\mathbf{1}) = 1$$

となるが，この式の左辺は，$\chi(A) = c$ を代入すると

$$\chi(T(A - c\mathbf{1})) = \chi(T)\,\chi(A - c\mathbf{1})$$
$$= \chi(T)\,(\chi(A) - c) = 0$$

となるので矛盾を生ずる．従って $A - c\mathbf{1}$ の逆元は存在せず，$\chi(A) = c$ は A のスペクトル値である．そうすると**指標状態** $\chi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ は各物理量 A にスペクトル値 $\chi(A)$ を割り当てる写像であり，すべての物理量の値が一意的に確定している状態だと言える．

しかし，一般に非可換代数に対する指標は存在しない．例えば正準交換関係 $[Q, P] = i\hbar\mathbf{1}$ で定まる代数に対して指標 χ がもしあれば

$$0 = \chi(Q)\chi(P) - \chi(P)\chi(Q)$$
$$= \chi(QP - PQ) = \chi(i\hbar\mathbf{1}) = i\hbar$$

となって矛盾を生ずる．ゆえに Q と P に同時にスペクトル値を割り当てるような指標状態は存在しない．

可換代数 $\mathscr{A}$ に対しては指標が存在する．しかも指標全体の集合 $Sp(\mathscr{A})$ に適当な位相を入れると，任意の物理量 A は $Sp(\mathscr{A})$ 上の連続関数

$$\check{A} : Sp(\mathscr{A}) \to \mathbb{C}, \quad \chi \mapsto \check{A}(\chi) := \chi(A) \quad (9)$$

とみなせる（Gelfand-Naimark の双対性）．また，任意の状態 ν に対し

$$\nu(A) = \int_{Sp(\mathscr{A})} \chi(A)\rho_\nu(\chi)d\chi \qquad (10)$$

となる確率測度 ρ_ν が一意的に存在する（Riesz-Radon-Markov の表現定理）．つまり状態 ν は確率 $\rho_\nu(\chi)$ の重みで指標状態 χ が混合した状態だと解釈できる．

非可換代数 $\mathscr{A}$ に対しては指標は存在しないのが普通だが，それでも $\mathscr{A}$ の可換部分代数 $\mathscr{M}$ に限定すれば指標は存在し，物理量 $A \in \mathscr{M}$ は (9) と同様に関数 $\check{A} : Sp(\mathscr{M}) \to \mathbb{C}$ とみなせる．とくにただ一つの物理量 A に注目すれば A が生成する代数 $\mathscr{G}(A)$ は必ず可換代数なのでこれに対する指標があり，スペクトル値 $\chi(A)$ の出現確率が (10) の $\rho_\nu(\chi)$ で定められる．このことは (10) の $\nu(A)$ を「平均値」と解釈することと整合している．物理的には，同一の状態 ν の系を多数用意して，それぞれに対して物理量 A の測定を行うと，A のスペクトル値のうちのどれかが測定値として得られ，そうして集めた測定値の平均が期待値になる．

念のために言うが，非可換な量 A, B に対しては，一般に A, B のスペクトル値 a, b に対して $\nu(A) = a$ かつ $\nu(B) = b$ となるような状態 ν は存在しない．両方の物理量の値が確定した状態がないのは不確定性関係の一種である．しかも「$A = a$ かつ $B = b$ が得られる確率」を定義することもできない．確率的にでも A, B が同時に何らかの値を持っていると想定すると，量子力学と矛盾し，かつ実験で否定される命題（例えば Bell の不等式）が導かれる[2]．

4. 量子化の技法

歴史的には古典力学では説明のつかない原子や輻射の現象を説明するために量子力学が創られたわけだが，量子力学は古典力学とは無関係に創られたのではなく，古典力学を足掛かりにして**量子化** (quantization) という手順を踏んで構築された．もともと量子化という言葉はエネルギーなどの物理量の値が飛び飛びの離散値に限定されることを指しており，その離散値を決める条件を「量子条件」と呼んでいた．Bohr, Wilson, 石原, Sommerfeld の量子論はそういうものだった（日本人も先駆的な研究をしていたのである）[1]．

Born, Jordan, Dirac によって古典力学から量子力学に移行する明確な手続きが与えられた．それは可換代数を非可換化する手続きである．どんな可換代数でも量子化できるわけではなく，当初与えられたのは正準構造を持つ古典力学系の量子化である．

正準古典力学系は偶数次元空間 $\mathbb{R}^{2s}$ を状態空間とし，$\mathbb{R}^{2s}$ 上の微分可能関数を物理量とし，それらのスカラー倍・和・積で定まる代数を持ち，Poisson 括弧が定義されている．$\mathbb{R}^{2s}$ の座標を $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = (q_1, \cdots, q_s, p_1, \cdots, p_s)$ とすると，物理量はこれらを変数とする実数値（あるいは複素数値）関数 $u(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), v(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ であり，これらの Poisson 括弧は

$$\{u, v\} := \sum_{j=1}^{s} \Big(\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial q_j} \Big) \qquad (11)$$

で定義される．Dirac 流の量子化は，関数 u, v に抽象的な記号 $\hat{u}, \hat{v}$ を対応させ，

$$[\hat{u}, \hat{v}] = i\hbar\, \widehat{\{u, v\}} \qquad (12)$$

が成り立つことを要請する．左辺は交換子 $[\hat{u}, \hat{v}] = \hat{u}\hat{v} - \hat{v}\hat{u}$ である．物理量は Planck 定数と Poisson 括弧の分だけ非可換だ，という式である．不思議だが，このように Poisson 括弧を交換子で置き換えた非可換代数で調和振動子や水素原子のエネルギーのスペクトル値を計算してみると，実験測定値と，また前期量子論で計算された値と完全に一致したのである．

厳密に言うと，すべての $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^{2s})$ について条件 (12) を満たす写像 $u \mapsto \hat{u}$ は存在しないことが証明されている（Groenewold-van Hove の定理[5]）．表現空間の有限可約性を仮定すると $[\widehat{q^3}, \widehat{p^3}] = 3[\widehat{q^2 p}, \widehat{qp^2}]$ という式が導かれ，これが矛盾を生ずる．要するに高次の多項式について条

件 (12) を整合的に満たすことができないのである．従って (12) はあくまで「非可換化の指針」と呼ぶべきものであり，実際には 1 次式の交換子 $[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar\hat{1}$ だけを用いて非可換代数を定める．そのため q,p の 2 次以上の多項式あるいは級数による変数変換は非可換代数の同形写像にならないという不便さがある．

Born-Jordan-Dirac 流の量子化は，物理量代数という視点から古典力学と量子力学が地続きであることを明らかにした．また，前期量子論で扱われた静力学的なスペクトル値の計算問題だけでなく，一般的な運動方程式を書いてダイナミクスを扱うことも可能にした．さらに場の量子論への拡張の地平をも切り開いた．

Groenewold-van Hove の定理の前提条件であった有限可約性という制約を取り払ってでも量子化の指針 (12) を忠実に守ろうとする試みとして**幾何学的量子化** (geometric quantization)[6) と，(12) の条件を緩めて非可換化する試みとして**変形量子化** (deformation quantization)[7) がある．どちらも一長一短あるが，変形量子化の方は関数 $u(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}), v(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ の**スター積** (star product) $u*v$ を定める．$u*v$ は $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\hbar)$ の関数である．スター積は結合律や

$$\lim_{\hbar\to 0}(u*v - v*u) = 0, \tag{13}$$

$$\lim_{\hbar\to 0}\frac{1}{i\hbar}(u*v - v*u) = \{u,v\} \tag{14}$$

を満たすとする．これらは $\hbar\to 0$ の極限で成立すればよいので，有限の大きさの $\hbar$ に対する Dirac の量子条件 (12) よりは緩い条件になっている．スター積は一意的に存在することが証明されており，古典力学の可換代数の非可換化としてはなかなかよい路線のように思えるが，スター積代数は C* 代数にはならないことが知られており，量子力学の構成としては不満足な段階にとどまる．

もう一つ量子化（非可換化）の方法として Mackey の**非原始的系** (imprimitivity system) がある[8)．この名称は言いにくいので Mackey 系と呼ばせてもらおう．測度空間 $(M,\mathfrak{B},\mu)$ に位相群 G が推移的かつ保測的に作用して，Borel 集合 $\Delta\in\mathfrak{B}$ ごとに $P(\Delta)$ と，$g\in G$ ごとに $U(g)$ というシンボルがあり，

$$P(\Delta)^* = P(\Delta), \tag{15}$$

$$P(\Delta_1\cap\Delta_2) = P(\Delta_1)P(\Delta_2), \tag{16}$$

$$\Delta_1\cap\Delta_2 = \varnothing \Rightarrow P(\Delta_1\cup\Delta_2) = P(\Delta_1)+P(\Delta_2), \tag{17}$$

$$P(M) = \mathbf{1}, \tag{18}$$

$$U(g)P(\Delta)U(g)^* = P(g\Delta) \tag{19}$$

が成り立つとき $P(\Delta), U(g)$ $(\Delta\in\mathfrak{B},\ g\in G)$ で生成される代数を Mackey 系と呼ぶ．$P(\Delta)$ $(\Delta\in\mathfrak{B})$ は可換代数を生成し，従って確率解釈が可能で，$P(\Delta)$ は領域 $\Delta\subset M$ に粒子が見つかる確率を与える．とくに関係式 (19) が空間の対称性と代数の非可換性を特徴付ける．Euclid 空間 $M=\mathbb{R}^s$ に平行移動群 $G=\mathbb{R}^s$ が作用している場合の (19) は正準交換関係に他ならない．Mackey の方法は質点の量子力学の定式化としては非常に完成度が高い[8)．

5. 古典化の機構

我々の世界は量子力学で閉じているわけではなく，現実には古典力学で記述できる系が存在している．量子力学の方が基本的な理論であるなら，何らかの意味で量子力学から古典力学が導出されるべきである．

量子から古典へという方向性として**対応原理**あるいは**古典極限**という考え方がある．エネルギーのスペクトル値に小さいものから順に付けた番号を**量子数**と言う．標語的に言えば「量子数が大きくなると量子系の挙動は古典力学的な挙動に近づいてくる」というのが対応原理である．これは原理と言うよりは量子力学を構築する上での目標宣言であり，量子力学が出来上がった今となっては字句通りに受け止めてよいか微妙である．

量子数が極端に大きな原子は **Rydberg（リュードベリ）原子**と呼ばれる．実験室では量子数

$n = 50 \sim 100$ の原子が作られており，電子の運動は古典力学の Kepler 運動に近づいてくる．希薄な宇宙空間ではもっと大きな量子数の原子が安定して存在し，量子数 $n = 600 \sim 700$ の原子が確認されている[9]．原子半径は n^2 に比例するので，これほどの高励起状態の原子の半径は 0.02mm ほどになっている（人の髪の毛の直径は約 0.08mm）．

数学的には，量子数が大きいときの波動関数の漸近挙動を古典力学を援用して解析する方法として WKB 近似がある．Sommerfeld の量子条件を精密化した Maslov 量子化という半古典論的方法もあり，特性類・トレース公式・擬微分作用素などとの関係も深い[10]．

以上は高エネルギー状態の漸近挙動を通して量子力学から古典力学を再現しようというアプローチだが，物理量代数の視点に戻ると，いかにして量子的非可換代数から古典的可換代数が出現するか？という疑問が浮かぶ．この点については Hepp, Wightman, 小嶋などが，対称性の自発的破れに伴う**秩序変数** (order parameter) が古典力学的物理量の役割を演じることを論じている[11]．秩序変数は，相転移に伴って生じる非同値な基底状態を分類する変数であり，例えば強磁性体（永久磁石）の中の莫大な数の電子のスピンの向きがそろっている度合いを表す．Anderson は秩序変数の「ゆらぎない固さ」という特性を**一般化剛性** (generalized rigidity) と呼んだ[12]．低エネルギー基底状態は長波長の現象に対応するし，Lanford と Ruelle が秩序変数を**無限遠方の物理量** (observable at infinity) と規定したように，秩序変数の現れ方はマクロなスケールで古典力学変数が顕在化するという経験則と合致している．

秩序変数・可換代数の出現機構の概略を述べると[2]，物理量代数と状態から GNS 構成という手続きを通して物理量 $A \in \mathscr{A}$ の表現演算子

$$\pi(A) = \begin{pmatrix} \pi_1(A) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \pi_2(A) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \pi_3(A) & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \quad (20)$$

が定まる．各 π_i は代数 $\mathscr{A}$ の既約表現．そうすると

$$Z = \begin{pmatrix} z_1\mathbf{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & z_2\mathbf{1} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & z_3\mathbf{1} & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}, \ z_i \in \mathbb{C} \quad (21)$$

はすべての $\pi(A)$ と可換な演算子であり，このような Z を秩序変数という．各 z_i が，量子的なゆらぎのない，古典力学的な値になっている．すべての $z_i \in \mathbb{C}$ について Z を集めた集合は可換代数をなす．とくに無限自由度の正準交換代数系には非同値表現が存在し，$\pi_1 \neq \pi_2$ となり，$z_1 \neq z_2$ であるような非自明な秩序変数が現れる余地がある[11]．また，正準交換代数では表せない多様体上の量子力学は，有限自由度であっても非同値表現を持ち，磁場などの古典力学変数を顕在化させる[2,8]．注目すべきは，量子系を定める物理量代数と状態だけを材料にして，外から何も追加することなく可換代数が出現した点である．

小嶋はこの視点をさらに精密化・双方向化し，量子系から古典系が創発する向きと，古典系によって量子系が観測・記述・制御される向きの相互関係を**ミクロ・マクロ双対性** (Micro-Macro duality) と呼んでいる[13]．

量子系から古典系へ移行する道筋として**デコヒーレンス** (decoherence) という概念がある[14]．量子系の特徴として重ね合わせの原理と干渉性があるが，この性質が失われることをデコヒーレンスという．これもまた非対角的で非可換な (20) から対角的で可換な (21) への移行として理解できる．量子化は一方的なものではなく，古典化への道筋も開けている．

6. 量子が先か？古典が先か？

物理世界の基本構成要素がミクロ量子系であることは疑いようがなく，古典力学よりも量子力学の方が論理的にも宇宙史的にも先行するのは真実だろう．一方で，決定論的・古典論的物理観が我々の世界で成立していることも確かであり，そうい

う視点や言語がなければそもそも量子力学を語ることすらできなかったであろう．量子論の建設者の一人である Bohr はこの点を強調していた[15)]．Bohr は，量子力学が絶対的に正しく，古典力学はその近似理論にすぎない，というような考え方をしていなかった．量子・古典の両方がそろって対峙しているのが自然界のありようだと考えていた．今でも Bohr の思想は生きていると思う．

Berezin は量子化を圏論の関手という概念で捉えた[16)]．古典と量子の関係は集合・写像の概念では捉えきれず，多対多対応まで含めて記述できる柔軟な数学言語が必要であり，その候補として圏論を使ったということだろう．最近 Döring と Isham はトポスを用いて理論物理全体の再定式化を企図している[17)]．物理を語る数理言語を開拓する挑戦は今も続いている．

21 世紀に入り，古典力学も量子力学も成熟期を迎えたかに見えるが，両者の意義を見直し，調和を回復することは 21 世紀ならではの課題であろう．

参考文献

1) 広重徹『物理学史　』培風館 (1968). M. ヤンマー（小出昭一郎 訳）『量子力学史 1, 2』東京図書 (1974). 石井茂『ハイゼンベルクの顕微鏡—不確定性原理は超えられるか』日経 BP 社 (2005). 佐々木隆「ハイゼンベルグ方程式」数理科学 2009 年 6 月号 p.24. 谷村省吾「ハイゼンベルク方程式を最初に書いた人はハイゼンベルクではない」素粒子論研究（電子版：ネット閲覧可）10 巻 (2011).

2) 谷村省吾「21 世紀の量子論入門」理系への数学（現代数学社）2010 年 5 月以降連載．GNS 構成 2010 年 6 月号, 確率論・Gelfand-Naimark 双対 7-10 月号, Bell の不等式 12 月号, 対称性の破れ 2011 年 4-5 月号.

3) I. E. Segal, “Irreducible representations of operator algebras,” Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 73 (1947), “Postulates for general quantum mechanics,” Ann. Math. **48**, 930 (1947). 梅垣壽春，大矢雅則，日合文雄『作用素代数入門』共立出版 (1985, 復刊 2003). 大矢雅則, 小嶋泉 編著『量子情報と進化の力学』牧野書店 (1996) 第 I 部第 2 章.

4) 河東泰之「作用素環論」数学セミナー 2004 年 1 月号 p.27. 単独の作用素ではなく作用素の集まりが環になって醸し出す性質を調べるのが作用素環論だという意味のことを語っている．

5) R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, AMS Chelsea Pub, 2nd ed. (2008), Theorem 5.4.9.

6) N. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Clarendon, Oxford (1980).

7) F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer, “Deformation theory and quantization I-II,” Ann. Phys. **111**, 61-151 (1978).

8) G. W. Mackey, *Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics*, Benjamin (1968). Y. Ohnuki and S. Kitakado, “Fundamental algebra for quantum mechanics on S^D and gauge potentials,” J. Math. Phys. **34**, 2827 (1993). D. McMullan and I. Tsutsui, “On the emergence of gauge structures and generalized spin when quantizing on a coset space,” Ann. Phys. **237**, 269 (1995). S. Tanimura and I. Tsutsui, “Induced gauge fields in the path-integral,” Mod. Phys. Lett. A**10**, 2607 (1995).

9) 松澤通生「膨脹した原子：高リュードベリ状態のダイナミクス」日本物理学会誌 1986 年 5 月号 p.402.

10) V. P. Maslov and M. V. Fedoriuk, *Semi-Classical Approximation in Quantum Mechanics*, Reidel Pub. (1981). A. Sugita, “Semiclassical trace formulas in terms of phase space path integrals,” Ann. Phys. **288**, 277 (2001).

11) O. E. Lanford and D. Ruelle, “Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics,” Comm. Math. Phys. **13**, 194 (1969). K. Hepp, “Quantum theory of measurement and macroscopic observables,” Helv. Phys. Acta **45**, 237 (1972). A. S. Wightman, “Superselection rules; old and new,” IL Nuovo Cim. B **110**, 751 (1995). G. L. Sewell, *Quantum Mechanics and Its Emergent Macrophysics*, Princeton University (2002), 2.6.5 節. I. Ojima, “A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria,” Open Sys. Info. Dyn. **10**, 235 (2003).

12) P. W. アンダーソン〔対称性の破れと，剛性と観測の理論の間にある，むしろ深い関連性ついて注意しておきたい…(中略)…標準的な実験には，すべて固い装置…古典的に振る舞う物体すなわち対称性の破れたものが関係している.〕『凝縮系物理学の基本概念』p.61, 吉岡書店 (1985). 〔一つ一つの電子にとって，実験装置—シュテルン・ゲルラッハの磁石やスリットなど—というものは，我々が電子の性質を見る場合に比べて，遥かに不可思議に見えるはずです．これらの物体は電子に対して単に境界条件としてしか作用せず，自分自身の量子状態が変化することがない，という不思議な性質を備えているのです.〕東京大学学内広報 No.1254, p.6, 2003 年 1 月（ネット閲覧可）.

13) I. Ojima, “Micro-Macro duality in quantum physics,” arXiv math-ph/0502038（会議録論文）. 小嶋泉，谷村省吾「双対性をめぐる物理学対話—量子と古典，ミクロとマクロ」別冊・数理科学『双対性の世界』p. 34 (2007). 小嶋泉「代数的量子論とミクロ・マクロ双対性」数理科学 2007 年 7 月号 p.18.

14) ウォイチェシ・ズーレク（町田茂 訳）「非干渉化：量子論から古典論へ」パリティ1992 年 5 月号 p.8. W. Zurek, “Decoherence and the transition from quantum to classical,” Physics Today (1991) の記事だったが増

補版が arXiv に出ている：quant-ph/0306072. 〔古典性は量子系の選ばれた物理量から創発する性質でなくてはならない〕と述べている．

15) ニールス・ボーア（山本義隆 編訳）『因果性と相補性』岩波書店 (1999), p.223, 267.
16) F. A. Berezin, “General concept of quantization,” Comm. Math. Phys. **40**, 153 (1975).
17) A. Döring and C. J. Isham, “A topos foundation for theories of physics I-IV,” J. Math. Phys. **49**, 053515-053518 (2008).

（たにむら・しょうご，名古屋大学大学院情報科学研究科）