波動関数は実在するか

物質的存在ではない．二つの世界をつなぐ窓口である

谷村　省吾

1. 存在を問う

[*1] 人は，幼い頃から，また太古の昔から，この世界に何があるのか問い続けているようだ．世界は目に見え手に触れるものがすべてではなく，背後に何か本性のようなものが潜んでいるらしい．人は原因や正体がわからない出来事に不安を感じ，正体をつきとめたいと願う．

人は道具を使い，観察を重ねることによって，ものごとの正体に肉薄する．「すべての物質は原子でできている」，「原子の運動が熱や圧力の正体であり，原子の組み換えが燃焼などの化学変化の正体である」といった世界理解の体系は自然科学と呼ばれている．自然科学は，世界を秩序立てて理解するための描像であり，世界にどう働きかければどういう反応が返ってくるか予測する手段であり，世界に介入するための方針でもある．人間に感覚神経（外界で起きたことを脳に伝える神経）と運動神経（脳から筋肉に運動の指令を伝える神経）があるように，科学は，自然界を写し取る目耳（めみみ）のような役割と，自然界に働きかける手足のような役割を果たしている．

とりわけ物理学は，誰でもいつでもそっくり同じように再現可能な自然現象に関する秩序・法則性を追究する科学である．主として非人為的・非生物的な現象を対象とし（人は恣意的に行動できるので，人自体の自然な法則性を調べにくい，生物は複雑であり個性が強いので，同じ条件での実験がしにくい），正確さを担保するために定量的・数学的方法を多用し，種々の機械を用いて実験検証するのが物理学の特徴だ．

物理学は比較的単純な現象を扱うが，それでも，いろいろなレベルの「存在」を扱っている．例えば，石や水のような「いかにもそこにある存在」を扱うし，電磁場やニュートリノのように「目には見えないが，そういうものがあると想定すると現象をうまく説明・予測できるもの」も扱う．また，エネルギーや質量や電荷のように，自立的に存在していると言うよりは，物体に備わっている物理量もある．しかし，物理量は物質に付随した添え物なのかと言うと，突き詰めると，例えば「電子はこれこれの質量と電荷とスピンを持つ粒子だ」としか言いようがなく，物理量が存在物そのものを規定しているとも言える．また，ポテンシャルやエントロピーのように，直接測定はできないが，諸々の物理量の関係を見通し良く整理するために導入され，他の物理量よりも基本的と見なされる物理量もある．このように物理学における存在概念は奥行きがあり，「存在」の一言では一括しにくい．

数ある「物理的存在」の中でも，とりわけ間接的で奥ゆかしく，実在性が疑問視され議論の的になりやすいのが，今回とりあげる「波動関数」である．

*1） 本稿は数理科学（サイエンス社）2013 年 12 月号 (Vol.51-12, No.606), 特集テーマ「物理学における存在とは」, pp.14-21 に掲載された．

2. 波動関数の歴史と解釈

波動関数について簡単におさらいしておこう．電子や原子などミクロの世界の物理法則は量子力学という理論にまとめられる．標準的な量子力学の枠組みでは，一つの物理系（一つの粒子とは限らない．複数の粒子のセットでもよい）に一つの Hilbert 空間を対応させ，その系の各状態に Hilbert 空間の元を一つずつ対応させる．この元が**状態ベクトル** (state vector) とか**波動関数** (wave function) と呼ばれる．また，その系が持つ物理量（エネルギーや運動量など）の一つ一つに Hilbert 空間上の自己共役演算子を一つずつ対応させる．

量子力学の建設期の歴史を概観しよう[1)]．波動関数という概念を最初に導入したのは Schrödinger だ．彼は，de Broglie が提唱した物質波という概念に明確な数学的形式を与えた．3 次元空間内を動く電子の状態は波動関数 $\psi(x,y,z,t)$ で表される．これは 4 つの実数変数 x,y,z,t の関数であり，ψ の値は複素数である．この関数は Schrödinger の波動方程式に入っており，この方程式を解くと水素原子のエネルギー準位などが求まる．そのような計算の媒介物として波動関数は使われるが，波動関数それ自体の物理的意味は明らかではなかった．ただ，波動関数の絶対値の 2 乗は流体の質量保存則のような方程式を満たすので，Schrödinger は，電子は流体のようなもので，波動関数の絶対値 2 乗は電荷分布の濃淡の密度を表すと解釈した．

Schrödinger に前後して，Heisenberg，Born，Jordan そして Dirac は，行列力学と呼ばれる量子力学の別形式を創り出していた．その理論は物理量を行列として扱い，非可換代数の表現から原子のエネルギー準位を決める．さらに「演算子が作用する波動関数」と「行列が作用するベクトル」を対応させて Schrödinger の波動力学と Heisenberg たちの行列力学が統一的に理解できることを，Schrödinger や Dirac が示した．そうすると波動関数という概念は状態ベクトルという概念に包摂されるが，では，この状態ベクトルは物理的には何を表しているのか？という謎はかえって深まった．

波動関数に対するうまい解釈を与えたのは Born であった．状態ベクトル ψ が規格直交関数系 ϕ_n で

$$\psi = \sum_n c_n \phi_n \tag{1}$$

のように展開されるなら，この粒子が状態 ϕ_n に見出される確率は，展開係数（複素数）c_n の絶対値 2 乗 $|c_n|^2$ に比例するだろうと Born は考えた．そして，アルファ粒子の散乱のような実験に照らし合わせれば，この解釈の可否を試せると考え，散乱波の近似計算の方法を示した[2,3)]．

正電荷を持ったアルファ粒子が直進して，正電荷を持った他の原子核に近づけば，電気的力を受けて進行方向を曲げられる．このアルファ粒子がいろいろな角度にはじき出される確率を計算するのが Coulomb 散乱の問題である．その 1 次 Born 近似は Wentzel が計算した．結果は，それより以前に Rutherford が古典力学を使って計算していた結果と一致した．こうして確率解釈はうまくいきそうだという感触を得た．

アルファ粒子は，途切れなく連続的に流れる流体ではなく，ぽつりぽつりと一粒ずつやって来る粒子である．Schrödinger の流体解釈が不適切なのは明白である．波動関数の絶対値 2 乗は「流体の密度」ではなく「粒子の存在確率密度」を表しているというのが Born の解釈の巧妙な点だ．

なお，Coulomb 散乱の確率分布は，i) 古典力学の厳密計算，ii) 量子力学の 1 次 Born 近似，iii) 量子力学の厳密計算の 3 通りの計算結果が一致することが後にわかった．これは幸運な一致だった[4)]．

一般的な物理量に Born の解釈を適用するには，物理量 A を表す演算子 $\hat{A}$ のスペクトル分解

$$\hat{A} = \sum_n a_n \hat{\Pi}_n \tag{2}$$

を用いる．ここで $\hat{\Pi}_n$ は射影演算子である．状態ベクトル ψ において A を測ったときに測定値 a_n を得る確率は $p_n = \langle\psi|\hat{\Pi}_n|\psi\rangle$ で与えられ，測定値の平均値は $\langle A\rangle = \sum_n a_n p_n = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ で与えられる．より一般の状態は，von Neumann と

Landau が導入した密度行列 $\hat{\varrho}$ で表され，物理量 A を測って測定値 a_n を得る確率は $p_n = \mathrm{Tr}(\hat{\Pi}_n \hat{\varrho})$，$A$ の平均値は $\langle A \rangle = \mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{\varrho})$ で与えられる．

Einstein は「神はサイコロを振らない」と言い，確率解釈をよしとしなかったのは有名な逸話である[1)]．他方，Born は「光子の発生確率は電磁波の振幅の 2 乗に比例する」という Einstein の洞察にヒントを得て確率解釈を思いついたと公言している[5)]．

3. 非可換性と干渉効果

量子論の最大の特徴は物理量の積の非可換性である．つまり物理量 $\hat{A}, \hat{B}$ の積 $\hat{A}\hat{B}$ と $\hat{B}\hat{A}$ は必ずしも等しくない．ちなみに Heisenberg は，自分の計算規則によれば $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ となることに気づいて，「重大な困難に遭遇した (A significant difficulity arises)」と 1925 年の論文に書いており[6)]，1963 年のインタビューでも，「$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ になることは気に食わなかった．これさえなければ安心なのにと思っていた」と述懐している[7)]．また，量子力学では位置 $\hat{Q}$ と運動量 $\hat{P}$ は非可換であり，

$$\hat{Q}\hat{P} - \hat{P}\hat{Q} = i\hbar \tag{3}$$

を満たす．この関係式は正準交換関係とか Heisenberg 代数と呼ばれるが，これは 1925 年に Born, Jordan および Dirac の論文に初出した式である[6)]．それ以前の Heisenberg の論文にはこんな式 (3) は書かれていない．1933 年の Nobel 賞受賞講演でも Heisenberg は，(3) は Born, Jordan, Dirac が発見したものだと，はっきり述べている[8)]．世の中には Heisenberg が正準交換関係を発見したと言う人が数多くいるが[9)]，それは不注意な言い伝えである．また，今日「Heisenberg の運動方程式」と呼ばれている式も発明者は Heisenberg ではない[10)]．気をつけよう．

非可換性から導かれる重要な性質の一つに干渉効果がある．話を簡単にして

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

という行列で表される物理量と

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

というベクトルで表される状態を考える．状態 ϕ_1 で物理量 A を測れば値はつねに 1 であり，状態 ϕ_2 での A の測定値はつねに -1 である．また，状態 ϕ_1, ϕ_2 のどちらでも物理量 B を測れば半々の確率で ± 1 の測定値を得て，B の期待値は 0 になる．

次に，状態 ψ で物理量 A を測ると半々の確率で ± 1 の値を得る．その意味で，状態 ψ は状態 ϕ_1 と ϕ_2 を 1 対 1 の割合で混ぜ合わせたようなものだ．しかし，状態 ψ において物理量 B の期待値を求めると $\cos\alpha$ になる．B の期待値が 0 であるような 2 つの状態を混ぜたのに，B の期待値がノンゼロになるのは奇妙だ．ϕ_1, ϕ_2 のどちらの状態でも $B = 1$ が出る確率は $1/2$ だったのに，ψ 状態ではその確率が $(1 + \cos\alpha)/2$ になっている．確率が強め合ったり弱め合ったりしているかのようである．このように単純な確率混合が成り立たない現象を**干渉効果**と言う．

遡れば，A と B の非可換性が (4) の行列が同時対角化できないことを意味しており，同時対角化できない行列が干渉効果を誘発している．

逆に，マクロ古典系ではすべての物理量が可換であり，すべての物理量が同時対角化できるので，マクロ系では干渉効果は起きない．

4. 波束の収縮仮説

波動関数の解釈問題の次に来るのが，測定後の波動関数はどうなっているかという問題である．これについては von Neumann が一つの仮説を示した[11)]．

物理量を表す演算子 $\hat{A}$ について $\hat{A}\phi_n = a_n \phi_n$（$a_n$ は実数）を満たす ϕ_n を固有ベクトルと言う．状態ベクトルが ϕ_n なら A を測れば 100%確実に測定値 a_n を得る．一般の状態ベクトル ψ に対し

ては，展開式 (1) の係数 c_n の絶対値 2 乗 $|c_n|^2$ の確率で測定値 a_n を得る．そして,「最初の状態ベクトル ψ が固有ベクトル ϕ_n でなくても，測定値 a_n を得た後の状態ベクトルは ϕ_n になっているだろう」というのが von Neumann の仮説である．

とくに位置の測定にこの仮説を適用すると，もとの波動関数 $\psi(x,y,z,t)$ が雲のように広がった確率分布を表していても，粒子の位置を測定した途端に雲が測定箇所の一点に縮む，というイメージになるところから，これは「波束の収縮」仮説とも呼ばれる．

ただし，一つの固有値 a_n に対して $\hat{A}\phi_n = a_n\phi_n$ を満たす ϕ_n として一次独立なものが複数ある場合（固有値が縮退している場合）は，この仮説を適切に拡張する必要があるが，von Neumann 自身は拡張の仕方を間違えていた．正しい拡張は Lüders（リューダース）が与えた[12]．系の初期状態が密度行列 $\hat{\varrho}$ で表されるなら，スペクトル分解 (2) を持つ物理量 A を測ったときに測定値として a_n を得る確率は $p_n = \mathrm{Tr}(\hat{\Pi}_n\hat{\varrho}) = \mathrm{Tr}(\hat{\Pi}_n\hat{\varrho}\hat{\Pi}_n)$ であり，測定直後の密度行列は

$$\hat{\varrho}_n = \frac{1}{p_n}\hat{\Pi}_n\,\hat{\varrho}\,\hat{\Pi}_n \tag{7}$$

で与えられるというのが von Neumann-Lüders の射影仮説だ．しかしこのように修正された射影仮説も現実には正しくないことが今ではわかっている．このことは後で述べよう．

5. Schrödinger の猫のパラドクス

状態ベクトル・確率解釈・波束の収縮というアイテムがそろうと，Schrödinger の猫のパラドクスを呼び寄せる[13]．その要点は,《外からは内部の見えない箱に毒薬容器と猫が閉じ込められている．生きている猫の状態ベクトルを ϕ_1 とし，死んでいる状態のベクトルを ϕ_2 とすると，量子力学によれば，複素数 c_1, c_2 を係数として重ね合わせたベクトル $\psi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ が猫の状態になる．このとき猫が生きている確率は $|c_1|^2$，死んでいる確率は $|c_2|^2$ である．箱を開けて猫の生死を観測した途端に猫の状態は ϕ_1 か ϕ_2 に波束の収縮を起こす．これは変ではないか !?》というストーリーである．これはさほど出来のよいパラドクスとは思えないが，パラドキシカルな点を列挙して分析しよう．

第 1 に，直観的には「猫は生きているか死んでいるかのどちらかであり，それらの中間の状態は考えられない」が，論理的には「生と死の重ね合わせ状態がある」という点がパラドキシカルだ．しかし，外部の観測者にとって箱の中の猫の生死が確定していないこと自体は，間違いではない．そもそも猫の死という言葉が，猫のすべての体細胞の死滅を意味しているのか，心臓停止か，脳幹の活動停止を指しているのか，判然としない．こんなに複雑で多義的な事象をたった一つの量子状態 ϕ_2 で表すのは大変粗雑な論理である．もしも，猫の生死が単純な量子状態で表されたとしても，本当に懸念すべきことは，行列要素 $\langle\phi_1|\hat{B}|\phi_2\rangle$ がノンゼロになる物理量 B はあるかという問題である．もしもそのような B があれば,「生きている状態と死んでいる状態の干渉効果」が観測されることになる．しかし，そのような物理量 B がなければ（実際，ない），不気味な干渉は見られない．

第 2 の問題は「箱を開けた途端に猫の状態が生か死の状態に収縮を起こす」のは奇妙だ，ということだろう．観測行為が猫の状態を急激に強制的に変えてしまうとは考えにくい．たしかに，波動関数が箱の中に漂っている物質状のものだとしたら，箱を開けた途端に変わるのは不思議だが，波動関数はそのような存在物ではない．例えば，サイコロの各目の出る確率が 1/6 だからと言って，1/6 の何か物質的なものがサイコロの面に宿っているわけではない．確率は空間中のどこかにある物質ではない．確率は空間を超越した概念である．別の例を挙げれば，選挙の「当選確率」というものが投票箱の中にあるわけではない．予想確率というのはあくまで観測者の視点で定義されるものである．投票箱を開けて票を数え始めれば予想当選確率が更新されるように，猫が入っている箱を開けて何らかの観測をすれば予想確率が変わるこ

とはおかしくない．

第 3 に，波束の収縮は観察者に依存するのかという問題がある．猫も知能を持った生物であり，自分が生きていることくらいは観察・自覚できるだろう，だったら箱を開けなくても波束の収縮は起こるのではないか．もしも人間ではなくロボットが観測したら波束の収縮は起きないのか．あるいは，A さんが箱を開けて見た結果を B さんに電話で伝えるのであれば猫の波動関数が変化するのは B さんが電話を受けた時点なのか，といった疑問が生ずる．これも「波動関数は誰から見ても同一の客観的な物質状のものだ」と思うからパラドクスになるのであって，A さんの立場では猫についての予想確率を記述する波動関数があり，B さんの立場では「猫プラス A さん」についての予測確率を記述する波動関数があって，二通りの波動関数が数学的に整合しているなら，別物でもかまわない．

第 4 に，現実の観測過程は連鎖的だが，波束の収縮はいつ起こるか，という問題がある．例えば猫をカメラで写すなら，波束が収縮するのは，カメラに光が入った瞬間か，それともモニターに映し出された画像を肉眼で見た瞬間か，といった疑問が生じる．これについては慎重な考察が必要だが，基本的には，物理的に消去不可能な記録・痕跡が生じた時点で観測は完了したと考えるのがよい．そのことは後で状態遷移則の議論をするときに考察しよう．

6. 波動関数は実在物か？

波動関数の確率解釈が Born によって提案された後，Schrödinger は猫のパラドクスを提唱した 1935 年の論文の中で「**予測目録** (Erwartungskatalog) としての波動関数」,「波動関数は測定値の確率を予言する手段にほかならない」,「測定のたびごとに波動関数が予見不可能な突発的変化をするとなると，波動関数をそのまま実在の代用物と見なすことはできない」,「この点において素朴実在論との訣別を余儀なくさせられる」と述べている[4, 13]（言葉づかいは若干変えてある）．

予測目録としての波動関数という考え方を前面に押し出したのは，Segal（シーゲル）という数学者だ[14]．彼は，物理系について測定し得る物理量全体の集合 $\mathscr{A}$ を考えた．この枠組みでは物理量 $A, B \in \mathscr{A}$ は演算子ではない．物理量は和 $A+B$, スカラー倍 cA（c は複素数）, 積 AB などが定義された抽象的なシンボルである．ただし可換律 $AB = BA$ は必ずしも成立しない．物理量のシンボルの非可換代数は，遡れば Dirac の着想である．Dirac は積が非可換な物理量を q-number と呼び，可換な物理量を c-number と呼んだ．q, c は quantum（量子）と classical（古典）を表す．

そして Segal は，物理系の状態 ω は，各物理量 A の期待値 $\omega(A) = \langle A \rangle$ を与える写像であると定義した．つまり，波動関数や密度行列をすっ飛ばして，物理量の期待値（平均値）を与える写像 $\omega : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ こそが**状態** (state) であると規定した．ここで $\mathbb{C}$ は複素数全体の集合である．この意味での状態さえあれば，Hilbert 空間も状態ベクトルも，物理量を表す演算子も，後付けで構成できることを彼は示した（Gelfand と Naimark[15] は state という言葉こそ使わなかったが，同様のことを考えていたため，これは GNS 構成と呼ばれる）．つまり，状態とは，量子的な非可換物理量を古典的な可換データに変換する写像であり，ミクロ量子系がマクロ古典系にはどう見えるかという見え方を決める窓口のようなものだ．

こう考えると，状態は，観測されるミクロ系と，観測するマクロ系の間に位置するものであって，ミクロ系に備わっている物理的実体なんかではないことが了解できる．通常の言葉づかいでは,「胃腸の状態」や「地球内部の状態」のように,「状態」という言葉は「外からは直接見えない，内にこもったもの」を指すことが多いが，ここでは，物理量がミクロ系の内にあり，状態はミクロ系の表面のようなところにあって，この表面を通して物理量が数値となって外のマクロ系に見える形になる，というイメージを描いている．

観測されるものと観測するものの境目は便宜的

に選ばれ，変更も可能だから，被観測系と観測系の境目ごとに異なった状態が定義されても問題はない．また，ミクロ系の外に引き出された測定値を観測者を知れば，ミクロ系についての予測は更新される．つまり，ミクロ系からマクロ系への窓口である状態が測定過程の前後で変化するのは格別おかしなことではない．以下では，このことを数学的に定式化しよう．

7. 系の合成・縮小

物理量代数 $\mathscr{A}_1$ と $\mathscr{A}_2$ を持つ 2 つの系をまとめて 1 つの合成系として扱うことができる．例えば，毒薬の容器と猫をまとめて一つの系として扱うような場合である．合成系の物理量代数は $\mathscr{A}_1$ と $\mathscr{A}_2$ のテンソル積代数 $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ で与えられる．また，各系の状態が ω_1, ω_2 なら，合成系の状態は $\omega_1 \otimes \omega_2$ で与えられる．ただし，合成系の状態はつねに $\omega_1 \otimes \omega_2$ のような形とは限らず，一般には $\omega : \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \to \mathbb{C}$ という期待値写像なら何でもよい．物理量代数 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ の表現 Hilbert 空間 $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ がある場合は，テンソル積空間 $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ の元で合成系の状態を表せる．

逆に，大きな系の一部分だけに関心がある状況もある．毒薬容器と猫のうち，毒薬容器だけに注目するような場合だ．数学的には，全体系の物理量代数 $\mathscr{A}$ の部分代数 $\mathscr{B}$ に注目する．このとき，$\mathscr{A}$ に対する状態 ω から，部分系の $\mathscr{B}$ だけに対する状態 $\omega|_{\mathscr{B}}$ が写像の制限によって誘導される．

8. 間接測定モデルと状態遷移則

物理的に有用な「系の変更例」は，ミクロ対象系と測定機器とを合成した系を考えたり，再びミクロ系だけに注目したりする「視点の移動」である．物理ではいろいろなものを測るが，測定とは，対象系と測定器を相互作用させて，測定器に生じた変化を読み取ることによって対象系について何らかの推測をすることだ．

測定過程を記述するには，対象系の Hilbert 空間 $\mathscr{H}_1$ 上の密度行列 $\hat{\varrho}_1$ と測定器の Hilbert 空間 $\mathscr{H}_2$ 上の密度行列 $\hat{\varrho}_2$ を用いて，対象系の物理量 $\hat{A} = \sum_n a_n \hat{\Pi}_A(a_n)$ と測定器の物理量（メーター物理量）$\hat{M} = \sum_i m_i \hat{\Pi}_M(m_i)$ を測るという状況を考える．対象系と測定器が相互作用すると，$\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ 上のユニタリ演算子 $\hat{U}$ によって全体系の状態は $\hat{\varrho}_1 \otimes \hat{\varrho}_2$ から $\hat{U}(\hat{\varrho}_1 \otimes \hat{\varrho}_2)\hat{U}^\dagger$ に変化する．このとき「A の測定値が a であり，かつ M の測定値が m である確率」は

$$P(A=a, M=m) = \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2}(\hat{\Pi}_A(a) \otimes \hat{\Pi}_M(m) \hat{U} \hat{\varrho}_1 \otimes \hat{\varrho}_2 \hat{U}^\dagger) \quad (8)$$

で与えられる．これを結合確率という．また「M の測定値が m である確率」は

$$P(M=m) = \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2}(\hat{\Pi}_M(m)\, \hat{U} \hat{\varrho}_1 \otimes \hat{\varrho}_2 \hat{U}^\dagger). \quad (9)$$

「$M = m$ という測定値を読み取った場合に $A = a$ になる確率」を $P(A=a|M=m)$ と書き，**条件付き確率**と言う．例えば,「人の体重 (A) が 80kg 以上である確率」と,「胴回り (M) が 100cm 以上という条件の下で体重が 80kg 以上である確率」はちょっと別物である．そのような条件付き確率は

$$P(A=a|M=m) = \frac{P(A=a, M=m)}{P(M=m)} \quad (10)$$

で定義される．この条件付き確率を

$$P(A=a|M=m) = \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1}(\hat{\Pi}_A(a)\, T_m(\hat{\varrho}_1)) \quad (11)$$

で与える密度行列 $T_m(\hat{\varrho}_1)$ は

$$T_m(\hat{\varrho}_1) = \frac{\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_2}(\hat{\Pi}_M(m)\, \hat{U} \hat{\varrho}_1 \otimes \hat{\varrho}_2 \hat{U}^\dagger)}{\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2}(\hat{\Pi}_M(m)\, \hat{U} \hat{\varrho}_1 \otimes \hat{\varrho}_2 \hat{U}^\dagger)} \quad (12)$$

で定まる．$T_m(\hat{\varrho}_1)$ は $M = m$ という測定値を得た後の対象系の状態を表している．つまり，写像 $\hat{\varrho}_1 \mapsto T_m(\hat{\varrho}_1)$ は測定による系の状態変化を記述している．これは波束の収縮の一般化になっている．$\hat{\varrho}_1 \mapsto T_m(\hat{\varrho}_1)$ を状態遷移則と呼ぼう．

このように遷移則を導くと,「波束の収縮はいつ起きるのか?」という問いは大した意味をなさないことがわかる．測定後の状態 $T_m(\hat{\varrho}_1)$ はメーターの読み取り値 m を知っている人が対象系について

何らかの予測をするために使うべき「予測目録」である．メーターが多種類あって選べる場合は，どのメーターを用いるか実験中に選んでもよい．メーターの読み取りは一通り実験が完了した後に行ってもかまわない．そのような実験を Wheeler は**遅延選択実験** (delayed choice experiment) と呼んだ[16)]．そのような実験でも状態遷移則を使って計算した理論値は実測値と合う．予測目録が $\hat{\varrho}_1$ から $T_m(\hat{\varrho}_1)$ に更新された瞬間などというものはない．実験結果が世界のどこかに痕跡を留めていてメーターの値が読める限り，$M=m$ という値を読んだ場合に起こることは $T_m(\hat{\varrho}_1)$ で予測できる．

特別な場合として，**誤差ゼロの間接測定**モデルを定式化しよう．対象系の物理量 A の値 a_n ごとにメーター M も忠実な値 a_n を指し，しかも，$M=a_n$ という測定値を得た直後にもう一度同じ測定を行えば同じ値 $M=a_n$ が得られるような，理想的な測定過程は

$$\hat{U}=\sum_i \hat{\Pi}_A(a_i)\otimes\hat{V}_i, \tag{13}$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_2}(\hat{\Pi}_M(a_n)\,\hat{V}_i\hat{\varrho}_2\hat{V}_i^\dagger)=\delta_{ni} \tag{14}$$

を満たす $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ 上のユニタリ演算子 $\hat{U}$ と $\mathscr{H}_2$ 上のユニタリ演算子 $\hat{V}_i$ で記述できる．このとき，読み取り値 a_n の出現確率の公式 (9) は

$$p_n=P(M\!=\!a_n)=\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1}(\hat{\Pi}_A(a_n)\,\hat{\varrho}_1) \tag{15}$$

となり，Born の公式に帰着する．遷移則 (12) は

$$T_{a_n}(\hat{\varrho}_1)=\frac{1}{p_n}\hat{\Pi}_A(a_n)\,\hat{\varrho}_1\,\hat{\Pi}_A(a_n) \tag{16}$$

となって，Lüders の射影仮説 (7) を再現する．

9. 条件付き期待値と量子消去

誤差ゼロとは限らない一般の測定で，メーター M の読み取り値が m だったという条件の下での対象系の物理量 B の期待値を

$$\begin{aligned}E(B|M\!=\!m)&=\sum_n b_n\cdot P(B\!=\!b_n|M\!=\!m)\\&=\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1}(\hat{B}\,T_m(\hat{\varrho}_1))\end{aligned} \tag{17}$$

で定義する．また，メーターの読み取り値に関する場合分けをせずに B の期待値を計算すると，

$$\begin{aligned}E(B)&=\sum_i E(B|M\!=\!m_i)P(M\!=\!m_i)\\&=\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2}(\hat{B}\,\hat{U}\hat{\varrho}_1\otimes\hat{\varrho}_2\hat{U}^\dagger)\end{aligned} \tag{18}$$

となる．

もともと B の期待値 $\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1}(\hat{B}\hat{\varrho}_1)$ がノンゼロの値（干渉効果）だったのに，測定器が働きかけた後，無条件期待値 (18) がゼロになることがある（非干渉化）．しかし，このような場合でもメーターを読み取って B の条件付き期待値 (17) を集計するとノンゼロの値が回復することがある（干渉の回復）．これを**量子消去** (quantum eraser) と言う[16)]．

消去と呼ぶ理由：(4) の例では，物理量 A の固有状態では B の期待値がゼロだった．対偶的に，遷移後の状態 $T_m(\hat{\varrho}_1)$ において B の期待値 (17) がノンゼロなら，その状態は A の固有状態ではない．「測定行為のせいで A の値を確実には予測できなくなった，A の測定値に関する情報が消された」ので「量子消去」と呼ぶ．

10. 弱測定

条件付き期待値は，測定器のメーターの読み取り値を限定して対象系の物理量のデータを集計したものであった．それとは逆に，対象系の物理量の値を限定して測定器の読み取り値データを集計すると，どんなことが起こるか？

対象物理量 A の値が a だった場合に，メーター値が $M=m$ となる確率は

$$P(M\!=\!m|A\!=\!a)=\frac{P(A\!=\!a,M\!=\!m)}{P(A\!=\!a)} \tag{19}$$

となり，$A=a$ という条件の下での M の期待値は

$$\begin{aligned}E(M|A\!=\!a)&=\sum_i m_i\,P(M\!=\!m_i|A\!=\!a)\\&=\frac{\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2}(\hat{\Pi}_A(a)\otimes\hat{M}\,\hat{U}\hat{\varrho}_1\otimes\hat{\varrho}_2\hat{U}^\dagger)}{\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2}(\hat{\Pi}_A(a)\,\hat{U}\hat{\varrho}_1\otimes\hat{\varrho}_2\hat{U}^\dagger)}\end{aligned} \tag{20}$$

で求められる．とくに初期状態が $\hat{\varrho}_1=|a_1\rangle\langle a_1|$ で，

測定過程ユニタリ演算子が $\hat{U} = \exp(ig\hat{B} \otimes \hat{J})$ という形をしていて係数 g が小さい場合は,

$$E_{\mathrm{w}}(B) = \frac{\langle a|\hat{B}|a_1\rangle}{\langle a|a_1\rangle},\ \hat{R} = \exp(igE_{\mathrm{w}}(B)\hat{J}) \quad (21)$$

を使って (20) は

$$E(M|A{=}a) \simeq \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_2}(\hat{M}\,\hat{R}\hat{\varrho}_2\hat{R}^{\dagger}) \qquad (22)$$

で近似できる．これらの式はメーター M の振れ幅が対象系の物理量 B の値で決まることを意味しているが，通常の期待値ではなく，(21) の $E_{\mathrm{w}}(B)$ という値で決まっている．測定相互作用の強さのパラメータ g が 0 に近い極限のことを**弱測定** (weak measurement) と言い，$E_{\mathrm{w}}(B)$ は B の**弱値** (weak value) と呼ばれる．素朴に考えれば，測定相互作用を弱くすればメーターはほとんど振れなくなりそうだが，Aharonov たちは弱測定がメーターの振れを増幅することを発見した[17, 18]．また，この方法なら，A と B が非可換な量であっても A の値と B の弱値の両方を測ることができるので，従来のやり方では測れないと思われていたものが測れる．また，弱値 $E_{\mathrm{w}}(B)$ は負の実数にも複素数にもなり得るが，このことを逆手に取って量子論の確率解釈を拡張しようという試みが最近なされている[19, 20]．

11. ミクロとマクロの橋渡しとしての波動関数

ミクロ量子の世界は非可換な物理量代数を内蔵しており，マクロ古典の世界は可換な物理量代数で記述される．Segal 流の状態 ω は，非可換な物理量 $A = \sum_n a_n \mathit{\Pi}_n$ を可換な期待値 $\omega(A)$ や確率 $\omega(\mathit{\Pi}_n)$ に変換する写像であり，量子世界から古典世界への窓口であり，変換アダプタである．窓口だからこそ，ミクロとマクロの境界状況に依存するし，引き出された情報次第で更新される．状態（波動関数）は対象系の属性や存在物ではないし，観測者独自の属性でもない．そう認めてしまえばパラドクスに悩まされることもない．

量子力学がミクロ世界の物理理論として成功を収めると,「古典力学は近似理論であり，人間の粗雑な観察を直接的に記述した現象論に過ぎない」という考えが物理学者の間に広まったが，果たしてそれは自然界に対する適切な描像だろうか？

量子的な系の記述には古典論の概念が必要だということを Bohr は強調していた[21, 22]．少し長くなるが，Bohr の 1949 年の言葉を引用しよう：**《現象が古典物理学で説明のつく範囲からどれほど外れていても，すべての証拠の説明は古典論の用語で表されなければならない…要するに,「実験」という言葉で私たちが指しているものは，私たちが何を行い何を学んだのかを他人に語ることが可能な状況であり，それゆえ，実験設定や観測結果の説明は，古典物理学の用語を適切に用いることで曖昧さなく表現されなければならない》**.

たしかに測定値や確率は古典物理的な装置で測定され記録される．状態は量子的な物理量に測定値と確率を割り当てる写像であり，結局，状態 (state) とは「どういう実験を行うか」という設定 (setting, situation) に他ならない.「実験の準備＝状態の準備」であり，実験は古典物理的な方法で用意され記述される．量子論が登場したことによって古典論が用済みになったのではなく，量子論だけでは世界の記述は完結せず，量子的世界に対面する古典的世界を必要としているのである．

謝辞：渡辺圭亮君との議論のおかげで弱値に関する理解が深まりました．彼に感謝しています．

参考文献

1) マンジット・クマール（青木薫 訳）『量子革命—アインシュタインとボーア，偉大なる頭脳の激突』新潮社 (2013).

2) M. Born, *Z. Phys.* **37**, 863 (1926), p.865 の「校正で付け足した註」に「注意深く考察すると，確率は波動関数の展開係数の 2 乗に比例することがわかる」と書かれている．原文はドイツ語．英訳が J. A. Wheeler and W. H. Zurek, *Quantum Theory and Measurement*, Princeton Univ. Press (1984), p54.

3) M. Born, *Z. Phys.* **38**, 803 (1926), 序文と (3), (4) 式の辺りで確率解釈を提示．英訳：`http://www.physics.rutgers.edu/~dbrookes/research/Born/Born.pdf`

4) 湯川秀樹・江沢洋 編著『量子力学 I, II』岩波書店 (1978). Coulomb 散乱は II 巻 12.3 節，射影仮説は

I 巻 4.6 節,「予測目録」は II 巻 16.1 節.
5) M. Born, "The statistical interpretation of quantum mechanics," Nobel Lecture (1954), p.262. Nobel 財団の web page に講演原稿が公開されている.
6) B. L. van der Waerden (editor), *Sources of Quantum Mechanics*, Dover (1968).
7) Interview with Dr. Werner Heisenberg by Thomas S. Kuhn (1963). `http://www.aip.org/history/ohilist/4661_5.html` "this fact that xy was not equal to yx was very disagreeable to me. I felt this was the only point of difficulty in the whole scheme, otherwise I would be perfectly happy."
8) W. Heisenberg, "The development of quantum mechanics," Nobel Lecture (1933), p.293.
9) 数理科学 2012 年 4 月号 p.26, 5 月号 p.20, p.56 など.
10) 谷村省吾「ハイゼンベルク方程式を最初に書いた人はハイゼンベルクではない」素粒子論研究 電子版 10 巻 (2011).
11) J. v. ノイマン（井上健 他共訳）『量子力学の数学的基礎』みすず書房 (1957), III.3, V.1 節．原著ドイツ語 1932 年.
12) G. Lüders, *Ann. Phys.* **8**, 322 (1951). 原論文はドイツ語．英訳 arXiv: quant-ph/0403007v2.
13) シュレーディンガー「量子力学の現状」，湯川・井上編『現代の科学 II』（世界の名著，第 66 巻）p.357, 中央公論社 (1970)．原文 1935 年．第 5 節で猫のパラドクス，第 7 節で予測目録としての波動関数が登場.
14) I. E. Segal, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53**, 73 (1947). *Ann. Math.* **48**, 930 (1947).
15) I. Gelfand and M. Naimark, *Matematicheskii Sbornik* **54**, 197 (1943).
16) 谷村省吾「光子の逆説」日経サイエンス 2012 年 3 月号 p.32.
17) I. M. Duck, P. M. Stevenson, and E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. D* **40**, 2112 (1989). 弱値の解説.
18) S. Tamate, H. Kobayashi, T. Nakanishi, K. Sugiyama, and M. Kitano, *New J. Phys.* **11**, 093025 (2009). 弱値と量子消去の関係を明らかにした.
19) H. F. Hofmann, arXiv: 0911.0071.
20) B. L. Higgins *et al.*, arXiv: 1112.3664.
21) ニールス・ボーア（山本義隆 編訳）『因果性と相補性』岩波書店 (1999), p.223, 225, 236, 267.
22) 谷村省吾「量子古典対応—量子化の技法，古典系創発の機構」数理科学 2012 年 4 月号 p.19.

（たにむら・しょうご，名古屋大学大学院情報科学研究科）