第 7 回新潟・山形合宿　2002 年 11 月 8, 9 日

エキゾチックな対称性の破れとゲージ場の幾何学[1]

谷村 省吾 (京都大学工学研究科)

概要

トポロジーが自明でない空間の上では場の値を一価連続関数で表示できないことを，いくつかの例を挙げて説明し，ファイバー束の理論の動機づけを与える．この理論にもとづいて空間の並進対称性や回転対称性が自発的に破れる機構を見つけたので，簡単に説明する．場と空間の関係を双対性の観点から見直し，可換代数と位相空間が互いに双対であるというゲリファントの定理を説明する．最後に，非可換幾何学の思想を紹介する．

1　場の値とは何か？

いまさらですが，場とは何でしょうか？電磁場とか重力場とか電子場とかクォーク場とか．空間[2]の各点で定義されている物理量のことですよね．ところで，場の量と，場の値というものを我々はほとんど同義のように扱いますが，この間には少しギャップがあります．このことをいろいろな例をとって反省してみましょう．

1.1　Dirac モノポール

例えば Dirac モノポール磁場中の電子の量子力学を考えてみます．3 次元空間の次の領域に注目します．

$$U_+ = \boldsymbol{R}^3 - \{(x, y, z) \,|\, x = y = 0, z \leq 0\}, \quad U_- = \boldsymbol{R}^3 - \{(x, y, z) \,|\, x = y = 0, z \geq 0\}. \tag{1.1}$$

ここで引き算は，集合の意味での引き算です．原点を中心とする球面を地球だと思って言葉を使うと，U_+ は原点から南方向に伸びる半直線をくりぬいて，U_- は原点から北方向に伸びる半直線をくりぬいてできる領域です．それぞれの領域の上でベクトルポテンシャルは，Wu-Yang によれば

$$\boldsymbol{A}_\pm = \frac{g(\pm 1 - \cos\theta)}{r \sin\theta}\, \boldsymbol{e}_\phi \tag{1.2}$$

で与えられます．極座標を使いました．$\boldsymbol{A}_+$ は北極点 $\theta = 0$ でちゃんと定義されて $\boldsymbol{A}_+ = 0$ という値を持つけれど，南極点 $\theta = \pi$ に持って行こうとすると，値がうまく定まらないことに注意して下さい．ベクトルポテンシャルは微分形式で書くともっとスマートに

$$A_\pm = g(\pm 1 - \cos\theta) d\phi \tag{1.3}$$

[1]素粒子論研究 2003 年 3 月 106 巻 6 号, F2-21 に掲載．

[2]この講義では，時空と空間を厳格に区別せずに用いている．

と書けます．これに対応する磁場は

$$B = dA_\pm = g \sin\theta \, d\theta \wedge d\phi \tag{1.4}$$

で与えられます．これも通常のベクトル解析の記法で書くと，

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A}_\pm = \frac{g}{r^2}\, \boldsymbol{e}_r \tag{1.5}$$

のことです．このとき電子の波動関数 ψ （ここでは場である必要はなくて波動関数を考えれば十分なのですが）は共変微分

$$D\psi_\pm = d\psi_\pm - ieA_\pm \psi_\pm \tag{1.6}$$

によってゲージ場と結合しています．北の波動関数 ψ_+ と南の ψ_- は同一点であっても値が違っていて，重なり領域 $U_+ \cap U_-$ ではゲージ変換

$$\psi_- = e^{-2ieg\phi}\psi_+, \qquad A_- = A_+ - 2g\, d\phi \tag{1.7}$$

で結ばれています．そして $U_\pm$ の上で $\psi_\pm$ がそれぞれちゃんと一価の関数になっていなければならないとすると，しかも $\psi_\pm$ が恒等的にゼロではないとすると，

$$e^{-2ieg2\pi} = 1 \tag{1.8}$$

でなければならない．つまり $2eg$ は整数でなければならない．これが有名なモノポールの磁荷の量子化ですね．

いまやったことはじつに初等的な考察なのですが，いろいろのことを含んでいます．ψ や A は場の量なのだけれど，その値というのは一意的でなくてもいいらしい．むしろ全空間にわたって場の値を一価連続的に測ることの方に無理があるらしい．ψ や A の値は一価に決まらなくてもいいけれど，$|\psi|^2$ や B の値は一価に決まっていなければいけないらしい．また，ゲージ変換関数 $e^{-2ieg\phi}$ は $U_+ \cap U_-$ の上では一価関数でなければいけないらしい．何々は一価でなくてもいいけれど，何々は一価でなくてはならない．こういう微妙な使い分けを，我々はいつ習ったかも知らないうちに，こなしているわけです．

脱線ですが，言葉の習得というのはこれに似ていると思います．子供は明示的にルールを教えられたわけでもないのに，使っているうちに文法や話法を身につけてしまいます．皆さん鉛筆をどう数えますか？1本，2本，3本と数えるでしょう．ビールびんはどう数えますか？これも本で数えるでしょう．野球のホームランは1本2本と数えますね．特訓で1000本ノックなんてことも漫画ではありますね．映画やビデオは本で数えるでしょう．2本立ての映画とか言うでしょう．音楽CDは本では数えないですね．「電話1本でOK」と言うように電話の通話は本で数えますね．ところが葉書や手紙は本では数えない．プロレスは1本勝負です．論文も1本2本と数えますね．どういうものは本で数えて，どういうものは本で数えたらおかしいか，きちんと言うのは難しいです．あえていえば，細く長く伸びるものを本で数えて

いるわけです．ホームランは，打球の軌跡が長く伸びるので「本」で数えるのでしょう．ビデオは，テープが細長く伸びているし，再生すると長いストーリーが展開されるので,「本」で数えるのでしょう．こういう，ふだんは意識にのぼらなくて，いざ説明しようとすると根拠の薄い規則というのが，学問にも生活にも潜んでいると思います[3].

1.2 Cooper pair

場の値の使い分けが案外難しいという例をもう一つ挙げてみましょう．超伝導の Cooper 対のことを考えます．スピン上向きと下向きの電子が対になって束縛状態をつくり，Bose 凝縮を起こした状態が，BCS 理論の言うところの超伝導相ですね．話をうんと単純化すると，$\psi_\uparrow$, $\psi_\downarrow$ をそれぞれのスピンの向きの電子の場として，Cooper 対の場は boson 的で,

$$\varphi(x) = \psi_\uparrow(x)\psi_\downarrow(x) \tag{1.9}$$

と書かれます．電子の電荷を e とすると，対は電荷 $2e$ を持っています.

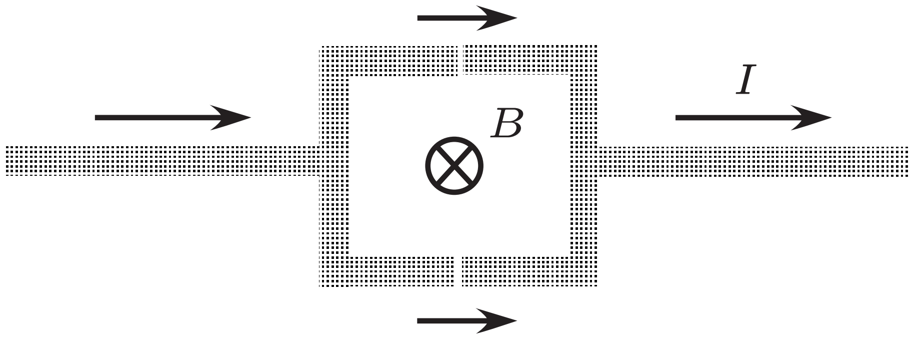


図　超伝導量子干渉計

超伝導体で，上図のように，電流が二股に分かれて合流する回路を作って，磁場を印加して電流を測ることができます．有名な SQUID(superconducting quantum interference device) です．上の経路をたどる Cooper 対と下の経路をたどる Cooper 対が干渉して，電流

$$I \propto \left|e^{i\alpha_1}\varphi_1 + e^{i\alpha_2}\varphi_2\right|^2 = I_0 + \Delta I\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = I_0 + \Delta I \cos\left(\frac{2e}{\hbar}\varPhi\right) \tag{1.10}$$

を与えます．α_i は各経路に沿っての Aharonov-Bohm 位相で，$\alpha_i = (2e/\hbar)\int_{C_i} A ds$ で与えられます．$\varPhi$ は回路を貫く磁束です．電荷 $2e$ を単位として，干渉効果が生じていることに注意して下さい．また，第 2 種の超伝導体に侵入した磁束は

$$\frac{2e}{\hbar}\varPhi = 2\pi n \tag{1.11}$$

の n が整数になるように量子化されます．Abrikosov 磁束渦糸の量子です．これは渦糸の周りで Cooper 対の波動関数 φ が一価になるための条件です．ところがこのとき，電子の波動関数 ψ は一価になっていない．上の式は電荷 $2e$ の波動関数が一価になるための条件であって，電荷 e の波動関数に対しては二価性を許しているわけです.

[3]元ネタは，井上京子「もし「右」や「左」がなかったら」(大修館書房) という本に載っていた話です.

1.3　生々しいベクトル空間と人工的な数ベクトル空間

人間は量というものを数で表すことに慣れています．量を数値化することを計量というのですが，考えてみると量と数の間には人為が介在しています．

ちょっと線形代数の復習として，ベクトル空間を考えてみましょう．生々しいベクトルというのはこういうもので，

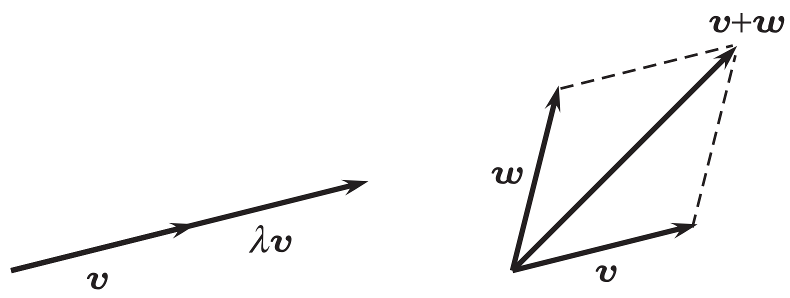


図　生々しいベクトル演算

とにかくスカラー倍や，和の演算ができてしまうわけです．スカラー倍は数でやりますが，ベクトルの和の方は数の出る幕はありません．ベクトルの演算を数の演算に写し取ろうとすると，基底を導入しなければいけません．基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ を決めると，任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を

$$\boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v^n\boldsymbol{e}_n \tag{1.12}$$

のように基底ベクトルの実数倍の線形結合で表現できるわけです．そうすると，ベクトルのスカラー倍や和といった演算は

$$\lambda\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v^1 \\ \vdots \\ \lambda v^n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 + w^1 \\ \vdots \\ v^n + w^n \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

といった数の積・和で計算できるものになります．

もっと極端に1次元のベクトル空間を考えましょう．これは，ものの長さとか，質量とかを表していると思ってもらえばいい．そうすると，ものの長さを2倍，3倍にスカラー倍することはできるし，ものの長さを継ぎ足すことによって長さの和もできるわけです．で，ここに基底を決めるということは，単位長さを決めるということです．unit vector $\boldsymbol{e}$ を決めれば，任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ は，その何倍なのか，ということで計量される．

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e} \tag{1.14}$$

$\boldsymbol{v}$ が生々しいベクトルで，$\boldsymbol{e}$ が人為的な基準で，v が結果としての測定値です．基準を変えれば，測定値も変わります．しかし，基底が $\boldsymbol{e} = a\boldsymbol{e}'$ と変わっても，生々しい実体としてのベクトルが人間の都合で変わるわけにはいきませんから，

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e} = v'\boldsymbol{e}' = va\boldsymbol{e}' \tag{1.15}$$

が成り立たなければならない．こうして係数の変換則 $v' = av$ が誘導されます．式 (1.14) は具体的な場面では

$$\boldsymbol{v} = 300\,\mathrm{cm} = 3\,\mathrm{m} = 9.8\,\mathrm{feet} = 3.3\,\mathrm{yard} \tag{1.16}$$

などとなります．これらの式は,（物理量）=（数）×（単位物理量）という意味で理解されるべきものです[4]．100 cm = 1 m, 1 feet = 30.48 cm などの基底変換を施したわけです．基底が変われば，係数も変わる．でも，生々しいベクトルは不変にとどまる．

余談ですが，アメリカとイギリスはどうしていつまでたってもメートル法以外の単位系を使い続けるのでしょう．飛行機の速さは時速何マイルで測って，高度はフィートで測る．気温は華氏で測る．牛乳の体積はパイントで測って，ガソリンはガロンで測る．しかも 1 マイル = 5280 フィートなんて訳の分からない比だし，1 ガロン = 8 パイントもどうかと思うし．1 パイント = 1 立方フィートとなっているかというと，そういうわけでもないし．とにかく dimensional analysis という考え方がない．不合理です．お前らのスタンダードはおかしい，と叫びたくなります．

1.4　フレーム

いまの話を数学的にきちんと定式化するとこんなふうになります．V を実数体上の n 次元ベクトル空間とします．$\boldsymbol{v} \in V$ が生々しいベクトルです．基底を何か選んで，$p = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ と置いて，p のことをフレームとか枠と呼びます．フレームは線形同形写像

$$p : \boldsymbol{R}^n \to V, \qquad \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \mapsto v^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v^n\boldsymbol{e}_n \tag{1.17}$$

を誘導します．この写像は，係数ベクトルを生々しいベクトルに移します．フレーム全体の集合

$$F = \{p \,|\, p = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \text{ は } V \text{ の基底}\} \tag{1.18}$$

を考えてもいいでしょう．数学では何かをありったけ集めたら空間と呼ぶ習慣があるので，それにならって F をフレーム空間[5]と呼んでおきましょう．$g \in GL(n, \boldsymbol{R})$ を n 次の正則行列とします．行列 g は線形同形写像 $g : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ ですから，合成写像 $p \circ g : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n \to V$ が定義されて，$p' = p \circ g$ もフレームになります．つまり

$$p(g\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}) \tag{1.19}$$

[4] この理解のしかたは，田崎晴明「熱力学」（培風館）に明確に書いてあります．

[5] フレーム空間にはシュティーフェル (Stiefel) 多様体という由緒正しい名前があります．

は，係数ベクトルを変換していると思ってもいいし，基底を変換していると思ってもいいわけです．これは(1.15)をn次元に拡張したものになっています．行列gは基底pの方にかかっているんだと思うと，群$G = GL(n, \boldsymbol{R})$のフレーム空間上の作用が定まります．

$$F \times G \to F, \qquad (p, g) \mapsto p \circ g \tag{1.20}$$

何のことはない，基底変換のことをおおげさに書いているだけのことです．

さて，この群作用(1.20)には次の性質があります．

(i) 結合律 ：$(pg)g' = p(gg')$

(ii) 単位元$e \in G$は任意の$p \in F$を動かさない：$pe = p$

(iii) 単純推移律：任意の$p, p' \in F$に対して$pg = p'$となるような$g \in G$が唯一存在する．

そうすると，フレーム空間はほとんど群だ，ということが言えます．つまり reference となる $p_0 \in F$を選んで固定すれば，勝手な$p \in F$に対して$p_0 g = p$となる$g \in G$はただ一つ存在するのですから，$p \mapsto g$という対応が定義されて，フレーム空間の元は，群の元と1対1に対応します．問題は，reference frame を一つ選ばなければいけないところで，どのフレームも特別扱いする理由がないことです．だからフレーム空間は，単位元が選ばれていない群のようなもの[6]です．

似たようなものとして，ベクトル空間による単純推移的な平行移動の作用は受けるけれど，それ自身に原点を持たないような空間のことをアフィン空間と言います．標語的に言えば，ベクトル空間は天動説，アフィン空間は地動説．ベクトル空間は絶対空間，アフィン空間は相対空間．と言えましょう．単位元や原点の決まっていないところが奥ゆかしい，と言えましょう．

また，フレーム空間と数ベクトル空間から，生々しいベクトル空間は次のように再構成されます．数ベクトルを縦に書いていると紙面を取りすぎるので，横に書きますが，縦だと思っていて下さい．$F \times \boldsymbol{R}^n$に次のように関係$\sim$を定めます：

$$\begin{aligned}&(p, (v^1, \ldots, v^n)), (q, (w^1, \ldots, w^n)) \in F \times \boldsymbol{R}^n,\\&(p, (v^1, \ldots, v^n)) \sim (q, (w^1, \ldots, w^n)) :\Leftrightarrow \exists g \in G,\ pg^{-1} = q,\ g(v^1, \ldots, v^n) = (w^1, \ldots, w^n)\end{aligned}$$

要するに(1.17)の意味で，$p(v^1, \ldots, v^n) = (p \circ g^{-1})(g(v^1, \ldots, v^n))$であり，$(p, v)$と$(pg^{-1}, gv)$は同一の$V$の元を定めるということです．$\sim$は同値関係になります．同値類のスカラー倍，和も素直に定められます：

$$\lambda[p, (v^1, \ldots, v^n)] = [p, \lambda(v^1, \ldots, v^n)], \tag{1.21}$$

$$[p, (v^1, \ldots, v^n)] + [p, (w^1, \ldots, w^n)] = [p, (v^1, \ldots, v^n) + (w^1, \ldots, w^n)] \tag{1.22}$$

[6] こういう集合のことを 亜群 (groupoid) と言います，と講義のときに言いましたが，それは間違いでした．亜群はもっと別物でした．フレーム空間は単純推移的作用を受ける等質空間の例であると言うべきでした．

この同値関係による商集合 $(F \times \boldsymbol{R}^n)/\sim$ が元のベクトル空間 V と一致するわけです．フレームと数ベクトルが反変な関係になっているものの総体が，生々しいベクトルだ，ということです．

1.5 爽やかな風をあなたに

なぜ生々しいベクトルやらフレームやらの話をしたかと言うと，場の量というのは生々しいベクトルのようなもので，それを実数なり複素数の値として測ろうとすると，何らかの基準，枠が必要だからです．そして，この枠を張りめぐらせるというところに，トポロジーの障害が待ち構えているからです．

また妙なタイトルをつけてしまいましたが,「爽やか（さわやか）な風をあなたに」という私の大好きなネタを披露します．いきなりですが，地球の表面に爽やかな風を吹かせたい，世界中の人たちに爽やかな風を送りたい，という願いを考えます．爽やかな風の条件は二つあります．一つは無風点を作らないこと．風が吹かずに空気がよどんでいると爽やかじゃないですから．もう一つの条件は，風は連続的であること．風は地表の各点にベクトルを定めるベクトル場です．場所が変われば，風の強さや向きも変わるでしょうが，この変化が連続的であってほしい．これは不自然な要求のように聞こえるかもしれませんが，風が不連続だったら，つまり一歩場所を変えたら，急に風向きが変わったりしたら，爽やかじゃないでしょう．

さて，爽やかな風を地表に吹かせることができるでしょうか？やってみると，できないということがわかります．これは Poincaré-Hopf の定理というやつで，

$$\text{無風点の指数の和} = \text{Euler 数} \tag{1.23}$$

という関係があります．で，球面の Euler 数は 2 なので，無風点の出現は避けられません．トーラスなら Euler 数がゼロなので，無風点なしのベクトル場を実現できます．

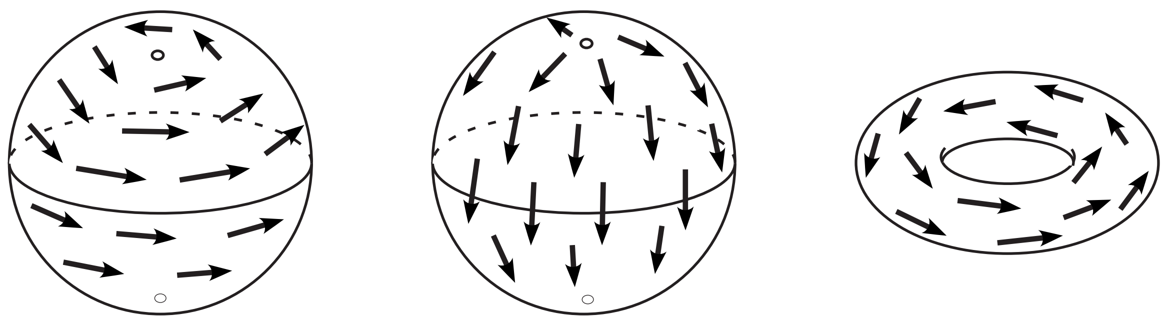


図　無風点を作らずに風を吹かせることができるか？

この話が場の値というテーマにどう関係しているかというと，こういうことです．風はベク

トル場であり，地球表面の各点 x に $\boldsymbol{v}(x)$ を定めます．これは生々しいベクトルです．これを測ろうとすると，接ベクトル空間の基底 $\{\boldsymbol{e}_1(x), \boldsymbol{e}_2(x)\}$ が必要です．これがあれば

$$\boldsymbol{v}(x) = v^1(x)\boldsymbol{e}_1(x) + v^2(x)\boldsymbol{e}_2(x) \tag{1.24}$$

と 2 つの係数 $(v^1(x), v^2(x))$ が測れることになります．さて，ここが問題です．$\{\boldsymbol{e}_1(x), \boldsymbol{e}_2(x)\}$ が基底であるというからには，これらは球面上の至るところでノンゼロ・ベクトルでなければならないし，係数を連続関数にしようとすると連続ベクトル場でなければならない．ところが，球面上にはそんなベクトルはないのです！だから球面上の風を測る基準を全世界共通に張りめぐらせることは不可能なのです．テレビの気象情報では，北東の風 4 メートルといった表現をしていますが，この表現方法は北極点と南極点で破綻します．北極点ではどっちを向いても南です．南極点で北風と言ったって，どっち向きに吹けばいいのかわかりません．

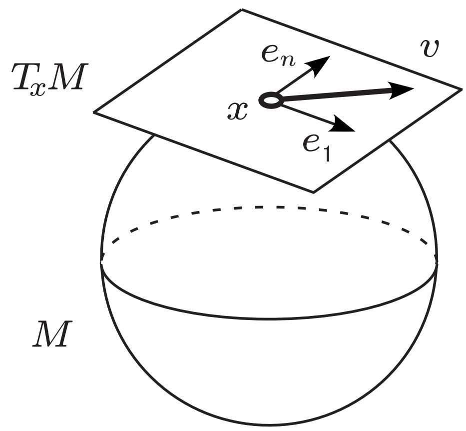


図　多様体 M の接ベクトル空間 T_xM のフレーム

地表は 2 次元球面 S^2 ですが，この話は n 次元の多様体にすぐ拡張されます．n 次元多様体 M 上のベクトル場を数ベクトルとして測ろうとすると，各点 $x \in M$ の接ベクトル空間 T_xM のフレーム $(\boldsymbol{e}_1(x), \cdots, \boldsymbol{e}_n(x))$ が必要です．で，こういうフレームをどこまで構成できるかどうかが問題です．S^2 の場合はいきなり一個目でコケます．つまりノンゼロベクトル場 $\boldsymbol{e}_1(x)$ 一つさえ球面上に構成することができません．多様体の種類によっては，$(\boldsymbol{e}_1(x), \cdots, \boldsymbol{e}_k(x))$ までは頑張って線形独立にとれたけど，$\boldsymbol{e}_{k+1}(x)$ はもう無理だ，ということもあります．こういうフレームを作る障害がどれだけあるのか判定する道具として，特性類の理論[7]は作られたようです．

いまの話が，物理の場の理論とどう関係しているのでしょう？最初の節で，Dirac モノポールを背景とする電子の場が，3 次元空間全体にわたって連続で一価な複素数値関数としてとらえることができない，ということを見ました．電子の場を複素数として測ろうと思ったら，実軸はこっち，虚軸はこっち，というフレームが必要だったのです．そしてこのフレームが，

[7]講義のときに，障害理論がフレーム作りの障害を測るものだ，と言ってしまいましたがこれも私の勘違いでした．障害理論はもうちょっと別物でした．いろいろ間違いを言ってしまっています．

モノポールのせいで，具体的には (1.7) というゲージ変換のせいで北側と南側の間でねじれて貼り合わされていて，全空間にわたって連続的にフレームを張りめぐらせることができなくなっていたのです．生々しい電子場はあったのですが，それを複素数値場として飼いならすことはできなかったのです．

これから話はどう進むかというと，結局，生々しいものは生のまま扱いましょう，ということになります．場を数値関数として扱うことはあきらめましょう，ありのまま記述する形式を作りましょう，ということになりました．それは私がしたことではなくて，そういうことに気づいた人たちが，ファイバー束の理論というのを創り上げました．それについてはいい本がいっぱいあるので，そちらを読んでもらえばいいと思います．私は，本に書かれていないこと，とくにその本が書かれる前にどういった裏事情があったか，ということを話して，ああ，そういう魂胆だったわけね，それでこんな理論が作られたわけね，ということを皆さんにつかんでもらいたかったわけです．

2　ファイバー束

微分幾何学については多様な本があります．お勧めなのは，中原幹夫（中原幹夫, 佐久間一浩訳）「理論物理学のための幾何学とトポロジー」（2 巻）（ピアソン・エデュケーション），小林昭七「接続の微分幾何とゲージ理論」（裳華房）などです．また，私の修士論文：谷村省吾「トムとベリー」（素粒子論研究, 1992 年 4 月 85 巻 1-89）にもレヴューがあります．ここでは小林昭七による定義を述べます．

・ベクトル束の定義：多様体 M 上のベクトル束 (vector bundle)E とは

(i) E も多様体であり，

(ii) 微分可能な全射 $\pi_E : E \to M$ があり，

(iii) 各点 $x \in M$ に対して $E_x = \pi_E^{-1}(x)$ は一定次元（r 次元とおく）のベクトル空間で，

(iv) M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ がある．つまり，開集合 $U_\alpha \subset M$ の族で $\cup_\alpha U_\alpha = M$ となっている．各 U_α に対して微分同相写像

$$\phi_\alpha : \pi_E^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \boldsymbol{R}^r \tag{2.1}$$

が存在して，$x \in U_\alpha$ を固定すると，$\phi_\alpha(x) : E_x = \pi_E^{-1}(x) \to \{x\} \times \boldsymbol{R}^r \approx \boldsymbol{R}^r$ は線形同形写像になっている．

・切断の定義：ベクトル束 (E, M, π_E) の切断 (section) とは，微分可能な写像 $\sigma : M \to E$ で，任意の $x \in M$ に対して $\pi_E(\sigma(x)) = x$ となるものである．

・主ファイバー束の定義：Lie 群 G を構造群とする多様体 M 上の主ファイバー束 (principal fiber bundle) P とは

(i) P も多様体であり，

(ii) 微分可能な全射 $\pi_P : P \to M$ があり，

(iii) 群 G が P に右からファイバー上に単純推移的に作用している．すなわち，微分可能な写像

$$P \times G \to P, \quad (p, g) \mapsto pg \tag{2.2}$$

が与えられていて，

(iii-a) 任意の $p \in P$ と $g, g' \in G$ に対して $(pg)g' = p(gg')$

(iii-b) 任意の $p \in P$ と単位元 $e \in G$ に対して $pe = p$

(iii-c) 任意の $p \in P$ と $g \in G$ に対して $\pi_P(pg) = \pi_P(p)$

(iii-d) $\pi_P(p) = \pi_P(p')$ ならば $pg = p'$ となる $g \in G$ が一意的に存在する．

(iv) M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ があって，各 U_α 上の微分可能な局所切断 $\sigma_\alpha : U_\alpha \to P$ が存在する．つまり，各点 $x \in U_\alpha$ で $\pi_P(\sigma_\alpha(x)) = x$ が成立している．

・自明なファイバー束：直積空間 $E = M \times \boldsymbol{R}^r$，$P = M \times G$ を自明なファイバー束という．主ファイバー束の場合，大域的切断 $\sigma : M \to P$ が存在することが，ファイバー束が自明であるための必要十分条件である．

・変換関数の定義：主ファイバー束 $(P, M, \pi_P, G, \{U_\alpha, \sigma_\alpha\})$ に対して，$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ のとき

$$\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x)\psi_{\alpha\beta}(x), \qquad x \in U_\alpha \cap U_\beta \tag{2.3}$$

により，写像 $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ が一意的に定められる．$\psi_{\alpha\beta}$ を P の変換関数という．

・同伴ベクトル束の定義：主ファイバー束 P と，その構造群 G の表現 $\rho : G \to GL(r, \boldsymbol{R})$ が与えられているとき，表現 ρ によって P に同伴するベクトル束 (associated vector bundle) が次のように定義される．群の元 $g \in G$ を $P \times \boldsymbol{R}^r$ に

$$(p, v) \mapsto (pg^{-1}, \rho(g)v) \tag{2.4}$$

で作用させる．この商空間を

$$E = P \times \boldsymbol{R}^r / G = P \times_\rho \boldsymbol{R}^r \tag{2.5}$$

と書いて，同伴ベクトル束と呼ぶ．

以上の定義を，場の理論の言葉で言い換えておきます．ファイバー $E_x = \pi_E^{-1}(x)$ は，素粒子のいわゆる内部自由度の空間です．ベクトル束 E の切断 σ が生々しい場の量と呼ばれるものです．場の値を測ろうとすることは $\phi_\alpha \circ \sigma$ を求めることですが，これは領域 $U_\alpha \subset M$ に限定されていて，M 全体にわたって測ることはできません．主ファイバー束のファイバー $P_x = \pi_P^{-1}(x)$

は，各点 $x \in M$ でベクトルファイバー E_x のフレームを集めたものです．reference frame を横断的・連続的にとるのが写像 σ_α ですが，これも領域 U_α に限定されます．2 つの領域 U_α と U_β をまたぐときはゲージ変換 $\psi_{\alpha\beta}$ で乗り換えます．逆に，フレームが用意されていれば，数ベクトルから生々しいベクトル束を再構成できます．

主ファイバー束の例として代表的なものはホップ (Hopf) 束です．これは $U(1)$ を構造群とする S^2 上の主ファイバー束です．インターネットで Hopf fibration, Hopf bundle などのキーワードで検索すると，きれいなグラフィックスつきの解説をいくつか見つけることができます．本当はこのあと接続や共変微分の話を続けるべきなのですが，その話は省略します．

3　空間の対称性の破れを起こす模型

ざくっと本質だけを言います．多様体 M を考えます．これはコンパクトな余次元空間と思って下さい．その上の場 $\phi(x)$ を考えます．これは M 上の適当なベクトル束の切断です．何か相転移が起きて，場の真空期待値 $\langle\phi(x)\rangle$ がノンゼロになったとしましょう．もしベクトル束が自明であれば，真空期待値 $\langle\phi(x)\rangle$ はノンゼロな定数になることが可能です．ところが，ベクトル束が自明でないようなときは，つまりフレームがねじれて貼りつけられているようなときは，真空期待値 $\langle\phi(x)\rangle$ はノンゼロな定数になることができません．ノンゼロになろうとしてもどこかでゼロになってしまいます．爽やかな風の話で言えば，無風点ができてしまいます．そういうゼロ点は空間の一様性を壊します．いわゆる topological defect というやつです．vortex とも言います．これが空間中に特別な位置を作ってしまうので，空間の並進対称性や回転対称性を破ります．

こういう現象を引き起こす場の理論の模型を作ることができます．S^2 上であれば，モノポールの背景場の上で複素スカラー場模型を作ると，スカラー場の真空期待値に vortex が現れて回転対称性の自発的破れを起こします．T^2 上では，ちょっと事情は複雑なのですが，背景に磁場があると，一様磁場であっても，やはり複素スカラー場は vortex を生成して，トーラスの並進対称性を破ります．こうした模型を私は坂本眞人氏（神戸大学）と作って調べています．興味を持った方はぜひプレプリントサーバーをあたってみて下さい．hep-th/0105196, hep-th/0108208, hep-th/0205053 などです．

坂本氏や竹永氏，橘氏たちは，もっと以前に，この種の機構で超対称性が破れる模型を見つけています．空間並進は超対称変換の 2 乗で与えられますから，並進対称性の破れは超対称性の破れを含意します．これは，超対称性を自発的に破る新しい機構として，とても面白いと思います．hep-th/9902070 hep-th/9912229 などを見て下さい．

4　非可換幾何学への道

ここから話ががらっと変わります．双対性と非可換幾何学という，最近流行のテーマについて話をします．それは，場とは何か，点とは何か，という本質に関わる話であります．た

ぶんストリング理論とも関係があると思います．でも私は多くの人たちとはちょっと違った観点から話をします．と言うか，日本の物理の人たちが知っていなさそうな，非可換幾何学の本来のモチベーションについて話をします．もうわかっていらっしゃる方には退屈な話だと思いますが，知らない人はここからの話も聞いて下さい．

4.1 射影幾何学の双対性

まず平面幾何の話を通して双対性に対する感覚を養いたいと思います．

デザルグ (Desargues 1593〜1662) の定理というのがあります．こういう主張です．

$$\left.\begin{array}{l} 2\text{点}\,A, A'\text{を結ぶ直線}\,l \\ 2\text{点}\,B, B'\text{を結ぶ直線}\,m \\ 2\text{点}\,C, C'\text{を結ぶ直線}\,n \end{array}\right\}\text{が}\,1\,\text{点}\,P\,\text{で交わる}$$

ための必要十分条件は

$$\left.\begin{array}{l} 2\text{直線}\,BC, B'C'\text{の交点}\,L \\ 2\text{直線}\,CA, C'A'\text{の交点}\,M \\ 2\text{直線}\,AB, A'B'\text{の交点}\,N \end{array}\right\}\text{が}\,1\,\text{直線}\,p\,\text{上にある}$$

ことである．それから，パップス (Pappos 320 頃) の定理というのがあります

$$\left.\begin{array}{l} 3\text{点}\,A, B, C\,\text{が}\,1\,\text{直線上にあり} \\ 3\text{点}\,A', B', C'\text{が}\,1\,\text{直線上にある} \end{array}\right\}\text{ならば}\left\{\begin{array}{l} \text{結線}\,BC', B'C\,\text{の交点}\,P \\ \text{結線}\,CA', C'A\,\text{の交点}\,Q \\ \text{結線}\,AB', A'B\,\text{の交点}\,R \end{array}\right\}\text{は}\,1\,\text{直線上にある．}$$

次はパップスの定理の双対版です：

$$\left.\begin{array}{l} 3\text{直線}\,a, b, c\,\text{が}\,1\,\text{点で交わり} \\ 3\text{直線}\,a', b', c'\text{が}\,1\,\text{点で交わる} \end{array}\right\}\text{ならば}\left\{\begin{array}{l} \text{交点}\,bc', b'c\,\text{を結ぶ直線}\,p \\ \text{交点}\,ca', c'a\,\text{を結ぶ直線}\,q \\ \text{交点}\,ab', a'b\,\text{を結ぶ直線}\,r \end{array}\right\}\text{は}\,1\,\text{点で交わる．}$$

いかがですか？眺めているうちに双対な感覚がわかってきましたか？ポンスレ (Poncelet 1788〜1867) の双対性の原理 (1822) というのがありまして，こういうことを主張しています．平面上の幾何学において「点，直線，結ぶ，交わる」だけで述べられる正しい命題があれば，その文中の

$$\begin{array}{ccc} \text{点} & \leftrightarrow & \text{直線} \\ \text{結ぶ} & \leftrightarrow & \text{交わる} \end{array}$$

という言葉の置き換えをして得られる双対命題もまた正しい命題である．パップスの定理は互いに双対な二つのバージョンがあったと言えるし，デザルグの定理は自己双対であると言えます．

ただし，双対性を完全に保証するためには，無限遠点を導入する必要があります．平面上の相異なる 2 点を結ぶ直線は一意的に存在します．これと双対に，相異なる 2 直線の交点は

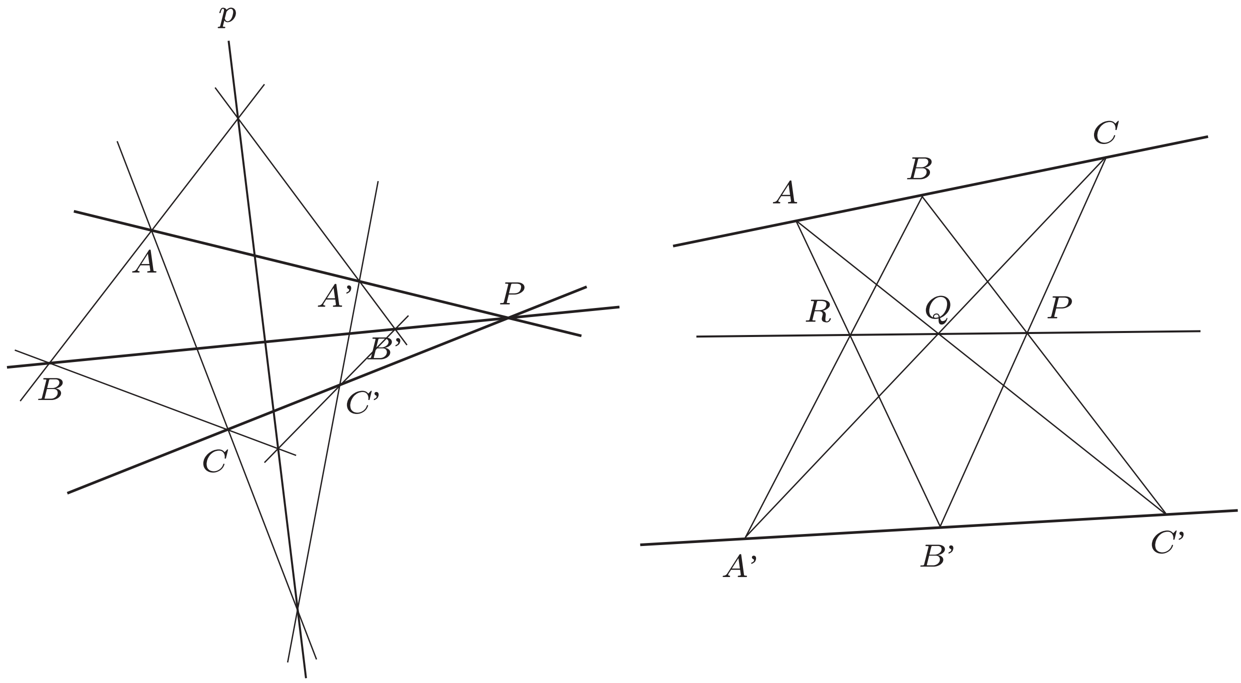


図　デザルグの定理とパップスの定理（パップスの双対版の図はご自分で描いてみて下さい.）

一意的に存在してほしいのですが，2 直線が平行になると，平面上に交点は存在しません．そこで，平行線は無限遠点で交わると約束すれば，双対性は例外なしに成り立ちます．こうして無限遠点を付与した平面を射影平面と言います．

双対性をちゃんと理解するには代数幾何の立場が便利です．きちんと述べるためには射影平面と斉次座標を定義しないといけないですね．ちょっと面倒ですが，言いましょう．実数の組 $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \boldsymbol{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ に対して関係 $\sim$ を

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) :\Leftrightarrow \exists \lambda \in \boldsymbol{R},\ (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (y_1, y_2, y_3) \tag{4.1}$$

で定めます．これは同値関係になります．(x_1, x_2, x_3) を代表元とする同値類を $[x_1 : x_2 : x_3]$ と書きます．これを斉次座標と言います．$x_1 : x_2 : x_3$ の比だけが意味を持ちます．要するに，3 次元空間中の原点を通る直線を 1 つの object だと思いましょう，ということです．同値類の全体の集合を $\boldsymbol{R}P^2 = \boldsymbol{R}^3 - \{0\}/\sim$ と書いて，射影平面と呼びます．この世界では $[x_1 : x_2 : x_3]$ が 1 つの点です．連立方程式

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \tag{4.2}$$

$$a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 = 0 \tag{4.3}$$

は，$[a_1 : a_2 : a_3]$ を定数とすると 2 点 $[x_1 : x_2 : x_3]$, $[y_1 : y_2 : y_3]$ を通る直線を表します．逆に，$[x_1 : x_2 : x_3]$, $[y_1 : y_2 : y_3]$ を定数，$[a_1 : a_2 : a_3]$ を変数とみなすと 2 直線の交点を表していま す．なんだか禅問答みたいで，めまいがしそうでしょう．この，どっちがどっちなんだかわからなくなる感覚が双対性なのです．

こういう言い方をしてもいいと思います．我々はよく関数

$$f(x) \tag{4.4}$$

というものを考えますね．x が変数で f が関数です．式 (4.2) を $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ と書けば，(x_1, x_2, x_3) が変数で，(a_1, a_2, a_3) が関数を規定している定数ですね．ところが上式を

$$x(f) \tag{4.5}$$

と書いたらどうでしょう．いろいろな関数 $f(x), g(x)$ があるときは，x の方は固定しておいて，そこでの f や g の値を比較しよう，という気持ちがこの表式にはこめられています．定点観測ですね．さらに，いろいろな変数の値 x, y をいろいろな関数 f, g に代入して，$f(x)$ や $f(y), g(x), g(y)$ を考えるときは，どっちを関数と呼んで，どっちを変数と呼ぶかは，一時的な立場の取り方でしかないわけです．関数と変数は，主客逆転されてしまうのです．この状況を標語的に表現すると,「見ている君も見られている」と言えましょうか．f は x を見て $f(x)$ という値踏みしているつもりだったのですが，そういう f もじつは x によって $x(f)$ と値をつけられていたとも言えるのです．いっそのこと，

$$f(x) = x(f) = \langle f, x\rangle \tag{4.6}$$

と対峙する立場に置いてしまってもいい気がしてきます．f に x を入れるというより，f と x の pairing と言った方がいいでしょう．注意してほしいのは，pairing は完全に対等なもの同士では普通はやらないということです．pairing は自と他でやるものであって，自同士ではやらない．変数同士で $\langle x, y\rangle$ という計算はしません．それをやるときは，pairing とは呼ばずに内積と呼ぶのが通例です．

x のことを変数と言うより点と呼んだ方がいいですね．そうすると関数 f と点 x のことを，点 f と関数 x と呼んでもいい気分になるわけです．この自他反転可能性が双対性の正体と言えるでしょう．このことを竹中直人はいみじくも

「双対性とは何様だ — お互い様だ」

と表現しています[8]．そう，点と関数はお互い様なのです．まことに正鵠を得た至言だと思います．

線形代数の言葉で言うと，x は縦ベクトル，f は横ベクトルです．もうちょっとカッコよく言うと，$x \in V$ はベクトル空間の元，$f \in V^*$ は双対ベクトル空間の元です．線形空間だと双対性は簡単で，あまりたいしたことを言っていないように思えてしまいますが，双対性というのは恐ろしい広がりと深みを持っています．そのほんの一端を次に見ましょう．

[8]数学のたのしみ No.10 「双対性をさがす」（日本評論社, 数学セミナー別冊）p.60 にある．本当にあの俳優の竹中直人がそう言ったのだろうか？以前このことを議論したとき（議論したのだ），国友氏の意見は,「○○とは何様だ — お互い様だ」というセリフはどこかで言ったのだろうが，○○は双対性ではなかったであろう，とのこと．誰か真相を知っている人いませんか？

4.2 可換代数のゲリファント双対

またちょっと準備が必要ですね．バナッハ代数 (Banach algebra) というものを定義します．
・バナッハ代数の定義：次を満たす集合 $\mathcal{A}$ をバナッハ代数という．

(i) $\mathcal{A}$ は（実数体か複素数体上の）ベクトル空間である．(以下では複素数体上で考えます.）

(ii) $\mathcal{A}$ には結合的な積が定義されている．すなわち，$A, B, C \in \mathcal{A}$ に対して $AB \in \mathcal{A}$ が定まり，$(AB)C = A(BC)$ が成立する．

(iii) 積は双線形である：$\lambda_i, \mu_i \in \boldsymbol{C}$, $A_i, B_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2)$ に対して
$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)(\mu_1 B_1 + \mu_2 B_2) = \lambda_1\mu_1 A_1 B_1 + \lambda_1\mu_2 A_1 B_2 + \lambda_2\mu_1 A_2 B_1 + \lambda_2\mu_2 A_2 B_2$

(iv) $A \in \mathcal{A}$ のノルム $||A||$ が定められている．すなわち，$||A||$ は非負の実数であり，$||A|| = 0$ ならば $A = 0$ であり，$||\lambda A|| = |\lambda| \cdot ||A||$ であり，$||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$，$||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$ が成立している．

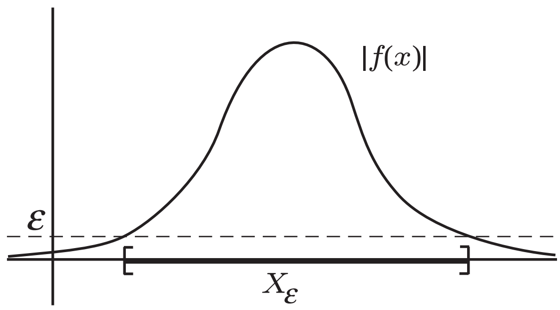
(v) $\mathcal{A}$ はノルム $||\cdot||$ につき完備である．

例1）$\mathcal{A} = \mathrm{Mat}(n, \boldsymbol{C})$：複素数 n 次正方行列全体のなす集合は，行列のスカラー倍，和，積に関して代数をなします．この積は非可換です．$A \in \mathrm{Mat}(n, \boldsymbol{C})$ のノルムは $||A||^2 = \mathrm{Tr}(A^\dagger A) = \sum_{i,j} |A_{ij}|^2$ で定義すればよい．

例2）$\mathcal{A} = C_0(X)$：説明が必要です．X は局所コンパクト・ハウスドルフ (Hausdorff) 空間[9]とします．複素数値連続関数 $f : X \to \boldsymbol{C}$ が無限遠方で消えるということを，任意の $\varepsilon (> 0) \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$X_\varepsilon = \{x \in X \,|\, |f(x)| \geq \varepsilon\} \tag{4.7}$$

がコンパクトであること，と定めます．



$f(x), g(x)$ のスカラー倍，和，積は，関数の値のスカラー倍，和，積で定義します．つまり

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x) \tag{4.8}$$

[9] こういう名前はおまじないだと思ってもらっていいです．球面とか，平面とか，ともかく普通の空間だと思えばいい．局所コンパクトでない空間や，ハウスドルフでない空間を思いつく方がたいへんです．そういうものは，固定観念にとらわれない自由な発想の持ち主か，ものすごくへそ曲がりな人しか思いつきません．

和と積だけに注目すると，関数環とも言います．ノルムは

$$||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)| \tag{4.9}$$

で定義します．そして，無限遠方で消える連続関数の集合を $C_0(X)$ と書くと，これはバナッハ代数になります．この積は可換です．そうすると，次のような著しい結果があります：

ゲリファント (Gel'fand) の定理：**任意の可換バナッハ代数** $\mathcal{A}$ に対して，局所コンパクト・ハウスドルフ**空間** X が**存在して**，$\mathcal{A}$ は $C_0(X)$ に同形である．しかもこのような X は同相の意味で**一意的である**．$C_0(X)$ は抽象的な代数 $\mathcal{A}$ を具体的に表現したものになっているので，これをゲリファント表現と呼ぶ．

空間 X は点の集合です．代数 $\mathcal{A} = C_0(X)$ は関数の集合です．空間から代数を作ることは，その点 x の上で値を持つ関数 $f(x)$ を考えることによって達成できるわけですが，ゲリファントの定理は，その双対が成り立つ，と言っています．つまり，いかなる抽象的な可換代数 $\mathcal{A}$ も，どこかの空間の上の関数になってしまっているのだ．しかも代数のありかたが，空間のありかたを一意的に規定してしまうのだ，という恐ろしく強烈な主張なのです．

ゲリファントの定理の証明のアイディアは，双対性の考え方に沿ったものです．先に抽象的な $A \in \mathcal{A}$ が与えられていたら，それ上の複素数値関数 $x(A)$ を考えろ，と言うのです．で，そういう x をいっぱい集めて来る．そうすれば空間 X を再構成できるし，抽象的だった A を関数 $A(x)$ として表現できると言うのです．ただ，$x(A)$ はどんな関数でもいいというわけではなくて，少し代数・位相的な条件が必要です．すなわち，$x : \mathcal{A} \to \boldsymbol{C}$ は代数の準同形であり，かつ連続写像であることを要求します．つまり，

$$x(\lambda A) = \lambda x(A), \quad x(A+B) = x(A) + x(B), \quad x(AB) = x(A)x(B), \tag{4.10}$$

$$|x(A)| \le M_x ||A|| \tag{4.11}$$

で，M_x は適当な実数です．なんだか (4.8) の書き方を変えただけですね．でもここでは $A \in \mathcal{A}$ が先に与えられた点で，その上で関数 $x(A)$ を考えているのです．それから，こういう x を全部集めた集合 X を位相空間にしなければいけません．それにはザリスキー (Zariski) 位相を説明するのがいいでしょう．ちょっと代数学の言葉が必要ですね．

代数には部分代数とイデアルという部分構造を考えることができます．話の簡単のために積は可換とします．部分代数 (sub-algebra) とは，代数 $\mathcal{A}$ の部分集合 S で，スカラー倍，和，積について閉じているものです．イデアル (ideal) とは，代数 $\mathcal{A}$ の部分集合 I で，スカラー倍，和について閉じているだけでなく，任意の $A \in \mathcal{A}$ と $L \in I$ に対して，積 AL が I の元になっていることを要請します．

例を挙げましょう．多項式環を考えます．

$$\mathcal{A} = \boldsymbol{C}[x] = \{f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \,|\, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \boldsymbol{C}\} \tag{4.12}$$

複素数を係数とする任意の次数の多項式を考えろということです．$\boldsymbol{C}[x]$ はスカラー倍と和と積について閉じた代数ですが，ノルムや完備性については考えないので，バナッハ代数ではありません．そのことはいまの説明にあまり問題にならないので，気にしないでおきましょう．多項式 $p(x)$ を適当に選んで，

$$I_p = \{\, p(x)f(x) \mid f(x) \in \boldsymbol{C}[x]\,\} \tag{4.13}$$

とおけば，これはイデアルです．I_p は $p(x)$ で割り切れる多項式の集合です．

$$p(x)f(x),\, p(x)g(x) \in I_p \text{ ならば } p(x)f(x) \pm p(x)g(x) \in I_p \tag{4.14}$$

$$p(x)f(x) \in I_p,\, h(x) \in \boldsymbol{C}[x] \text{ ならば } p(x)f(x)h(x) \in I_p \tag{4.15}$$

が成立していることは明らかでしょう．イデアルの元と，他の何をかけても，イデアルの中に入ってしまう，ということに注意して下さい．

もっと具体的に，$\alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$ を適当に固定して

$$I_{\alpha,\beta} = \{\, (x-\alpha)(x-\beta)f(x) \mid f(x) \in \boldsymbol{C}[x]\,\} \tag{4.16}$$

と置いてもイデアルです．

$$I_\alpha = \{\, (x-\alpha)f(x) \mid f(x) \in \boldsymbol{C}[x]\,\} \tag{4.17}$$

もイデアルです．ここで $I_{\alpha,\beta} \subset I_\alpha \subset \boldsymbol{C}[x]$ という包含関係があります．イデアルにはいろいろあって，それらの間に大小関係を考えることができます．ここで I_α というイデアルはちょっと特殊で，もし

$$I_\alpha \subseteq J \subseteq \boldsymbol{C}[x] \tag{4.18}$$

というイデアル J があったとすると，$J = I_\alpha$ であるか，$J = \boldsymbol{C}[x]$ となってしまいます．つまり I_α よりも大きくて，$\boldsymbol{C}[x]$ そのものよりは小さいイデアルがありません．この意味で I_α を極大イデアルと呼びます．

多項式 $g(x) \in I_\alpha$ はどんな多項式かというと，$g(\alpha) = 0$ となるような多項式です．だから $g(x) = (x-\alpha)f(x)$ と因数分解できるわけですね．そういう意味で，極大イデアル I_α は複素平面上の一点 $x = \alpha$ を指している，とみなせます．極大でないイデアルの元 $h(x) \in I_{\alpha,\beta}$ は $h(\alpha) = h(\beta) = 0$ となりますから，$x = \alpha, \beta$ の 2 箇所を根に持つわけで，一点に絞り切れていません．イデアルを極大化することによって，空間の一点に極小化されるわけです．ここまで来ると，代数的にどうやって幾何学的な点を再構成するか，見えて来たと思います．双対原理の働きも見えてきたと思います．

ゲリファントの定理に戻りましょう．$\mathcal{A}$ は抽象的な可換バナッハ代数です．それのイデアル I を考えます．また

$$\mathcal{A}^* = \{x : \mathcal{A} \to \boldsymbol{C} \mid x \neq 0\} \tag{4.19}$$

を，(4.10), (4.11) を満たす，恒等的にはゼロではない連続準同形写像の全体とします．そうすると，イデアル $I \subset \mathcal{A}$ に対応して

$$F_I = \{x : \mathcal{A} \to \boldsymbol{C} \,|\, x(A) = 0,\, A \in I\,\} \subset \mathcal{A}^* \tag{4.20}$$

という $\mathcal{A}^*$ の部分集合を考えることができます．F_I を $\mathcal{A}^*$ の閉集合だと宣言してしまいます．すべてのイデアル $I \subset \mathcal{A}$ に対応して閉集合 $F_I \subset \mathcal{A}^*$ を集めれば，$\mathcal{A}^*$ に位相が定まります．これがザリスキー位相です．特に，I が極大イデアルのとき，F_I は一点になります．このことは，準同形定理の定める同形写像 $\mathcal{A}/I \cong \boldsymbol{C}$ が一意的だということからわかります．詳しくは代数の教科書を見て下さい．例えば，上野健爾「代数幾何入門」（岩波書店）の付録などが読みやすいです．

上の話を普通の関数と点という関係で言い直します．$\mathcal{A}$ が関数の集合で，$\mathcal{A}^*$ が点の集合になるように見直したいのです．イデアル $I \subset \mathcal{A}$ に入っている関数は，閉集合 $F_I \subset \mathcal{A}^*$ の上でゼロになるような関数です．イデアル I, J 同士のかけ算 IJ は，閉集合 F_I, F_J の合併 $F_I \cup F_J$ を与えます．閉集合の補集合は開集合ですから，$O_I = (F_I)^c$ とおけば，これは開集合の交わり $O_I \cap O_J$ を定義したことになります．こうして $\mathcal{A}^*$ に位相が入りました．恐ろしいことに，$\mathcal{A}^*$ は局所コンパクト・ハウスドルフ空間になっていることが証明されます．$A(x)$ が無限遠方で消えるという条件も証明されるのでしょう．私は証明を読んだことがありませんが．そうすると $X = \mathcal{A}^*$ が求めるべき underlying space だったということになります．これで $\mathcal{A} \cong C_0(\mathcal{A}^*)$ となっています．以上がゲリファント表現の構成のあらましです．

4.3　非可換幾何学

位相空間 X があれば，その上の連続関数の可換代数 $\mathcal{A} = C_0(X)$ が定まりました．ゲリファントの定理によって，可換代数 $\mathcal{A}$ があれば，位相空間 $\mathcal{A}^*$ が定まって，$\mathcal{A} = C_0(\mathcal{A}^*)$ であることが言えました．代数と空間の関係は，元と元の対応ではありません．イデアルが閉集合に対応したり，極大イデアルが一点に対応したりする，という関係です．これはお互いに相手を特徴づけるという関係です．この双対性のため，可換バナッハ代数の理論と，局所コンパクト・ハウスドルフ空間の理論は，見かけは違っていても，じつはまったく等価な内容になっています．

さて，そうすると次のようなことを考えたくなります．非可換代数に対して，何らかの双対な空間は存在するでしょうか？もちろんそれは普通の意味での位相空間ではないでしょう．非可換代数ではイデアルの積も可換ではないですから，$IJ \neq JI$ です．それを開集合の言葉に移し変えると $O_I \& O_J \neq O_J \& O_I$ ですね.「開集合の非可換交わり」とでも言えばいいのでしょうか，奇妙なことになります．とにかく非可換代数は，何らかの underlying space 上の関数の pointwise な積 $(AB)(x) = A(x)B(x)$ では捉えられないものになるはずです．非可換代数に双対な空間を想定して，代数的な言葉をできるだけ幾何学的な言葉に移し換えたい．そして幾何についての新しい展望をひらきたい．これが非可換幾何学の心意気だと思います．

非可換幾何学を具体的に構成できるでしょうか？具体的にというのは，我々になじみのある言葉で語ったり，普通の図で示したりできるか，という意味です．それができる例があります．モヤル (Moyal) 積とか星 (star) 積と呼ばれる代数をシンプレクティック空間の上に作ることができます．これを簡単に紹介して私の話は終わりにしたい．

まずフーリエ変換の反転公式

$$\psi(x) = \int \frac{dy\,dp}{2\pi\hbar}\, e^{ip(x-y)/\hbar}\, \psi(y) \tag{4.21}$$

を考えます．運動量は微分作用素で，こう作用しますね：

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) = \int \frac{dy\,dp}{2\pi\hbar}\, e^{ip(x-y)/\hbar}\, p\,\psi(y) \tag{4.22}$$

で，これを一般化して，適当な関数 $A(x,p)$ を持って来て，擬微分作用素 (pseudodifferential operator)$P(A)$ というものを

$$P(A)\psi(x) = \int \frac{dy\,dp}{2\pi\hbar}\, e^{ip(x-y)/\hbar}\, A(x,p)\,\psi(y) \tag{4.23}$$

で定義します．A を $P(A)$ の表象 (symbol) と言います．(4.23) の積分が収束するためには，表象はあまり勝手な関数ではいけないのですが，まあ適当に収束するような関数のクラスで考えます．擬微分作用素 $P(A)$, $P(B)$ は作用素の合成の意味で積が定義されるので，

$$P(A)\circ P(B) = P(C) \tag{4.24}$$

となるような表象 C を考えることには意味があるでしょう．テイラー展開を使って，ちょこっと計算すると，

$$C(x,p) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-i\hbar)^n\frac{\partial^n A}{\partial p^n}\frac{\partial^n B}{\partial x^n} \tag{4.25}$$

を得ます．何か思わせぶりな形になってきましたよね．表象 $A(x,p)$ に対して擬微分作用素を

$$W(A)\psi(x) = \int \frac{dy\,dp}{2\pi\hbar}\, e^{ip(x-y)/\hbar}\, A\left(\frac{x+y}{2},p\right)\psi(y) \tag{4.26}$$

で定義することにします．作用素の積から

$$W(A)\circ W(B) = W(A*B) \tag{4.27}$$

で表象の積を誘導すると，

$$(A*B)(x,p) = \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{m!n!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{m+n}\frac{\partial^{m+n}A}{\partial x^m\,\partial p^n}\frac{\partial^{m+n}B}{\partial p^m\,\partial(-x)^n} = A\exp\left(\frac{i\hbar}{2}(\partial_x\partial_p - \partial_p\partial_x)\right)B \tag{4.28}$$

であることが確かめられます．最後の行の $(\partial_x\partial_p - \partial_p\partial_x)$ は左右の関数にかかる微分作用素として形式的に書いただけです．この関数 $(A*B)(x,p)$ がモヤル積です．モヤル積は無限回

の微分を含んでいるので，局所的な積ではありません．積分作用素として理解すべきものです．そういう表式も得られていて，

$$(A * B)(x,p) = \int \frac{dx_1\,dp_1\,dx_2\,dp_2}{\pi\hbar} \exp\left(\frac{4}{i\hbar}\int_\Delta dp \wedge dx\right) A(x_1,p_1)B(x_2,p_2) \tag{4.29}$$

と書けます[10]．ここで，Δ は (x,p), (x_1,p_1), (x_2,p_2) を頂点とする相空間上の三角形です．積分 $\int_\Delta dp \wedge dx$ はこの三角形の面積 $\{(p_1-p)(x_2-x)-(p_2-p)(x_1-x)\}/2$ です．積分 $\int dx_1 dp_1 dx_2 dp_2$ は全領域にわたって取ります．そのために $A * B$ は非局所的な積になっています．しかも非可換です．しかし $\hbar \to 0$ の極限では，

$$\lim_{\hbar\to 0}(A * B)(x,p) = A(x,p)B(x,p) \tag{4.30}$$

という pointwise な積に帰着します．もちろんこれは可換な積です．それから，モヤル交換子の極限は

$$\lim_{\hbar\to 0}\frac{1}{i\hbar}(A * B - B * A) = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial x} \tag{4.31}$$

となり，ポアソン括弧に帰着します．モヤル積は量子論と古典論の橋渡しをするので，こういう代数を考えることは変形量子化と呼ばれています[11]．

4.4 場と空間を再び考える

さていままで何の話をしてきたのでしょう．空間の上の関数としての場のありかたや，抽象的な可換代数の下に横たわる空間のありかたを見直してきたつもりです．

我々は空間そのものを直接観測しているのではありません．空間に置かれた「もの」や「場」[12]や「事象」[13]を観測しています．空間の点は，そこに置かれている「もの」をどけた後に残る「その場所」として想定されていますが,「もの」をどけてしまうとそこには見えるものはないし,「その場所」という identity もありません．また禅問答になってしまいましたが，空間の点を，そこに置かれる「もの」を離れた独立の実在として考えることは，幻想のようです．しかも,「もの」も置き場所なしには存在できません．とくに「場」は容器としての空間なしには考えられません.「もの」が先か「空間」が先かという問いは禅問答のようです．双対だ，というのが答えではないでしょうか．

場のありかたが変われば，空間のありかたも変更せざるを得ない，というのが非可換幾何学の思想だと思います．何が正解かはまだわかりません．いろいろの試みがあります[14]．ス

[10] I. A. Batalin, I. V. Tyutin: Nucl. Phys. B345 (1990) 645. あいにくこの論文には何の証明もついていませんが，上の式はテイラー展開とフーリエ積分を形式的に用いればすぐ示せます．

[11] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, S. Steinheimer: Ann. Phys. 111 (1978) 61, 111.

[12] この講義では量子場についてはほとんど触れませんでしたが，量子場は空間上の作用素値関数であり，無限次元ベクトル束の切断として理解されるべきものなのでしょう．

[13] Hawking, Ellis の有名な教科書 “The large scale structure of space-time” では，時空とはすべての事象の集合であり，ローレンツ符号のリーマン多様体はその数学的モデルであるとしており，物理的な時空と，数学的な模型とを慎重に区別しています．

[14] 例えば，A. Connes, M. R. Douglas, A. Schwarz: hep-th/9711162 の論文など．

トリング理論が正解なのか，マトリクス理論が正解なのか，今世紀中に答えは得られるのか，私にはわかりません．でも探求する価値はあると思います．

謝辞

新潟大学・山形大学の合同合宿は，豊かな自然に囲まれた環境の中で，刺激的な議論の場となりました．参加者の皆さんに感謝します．とくに新潟大学の山田義久さんには，合宿世話人としていろいろアレンジをしていただきました．この研究会を支援してくださった基礎物理学研究所に感謝します (研究会番号 YITP-S-02-05)．私は，大学院生時代に，同級生であった数学科の友人，古結明男氏から数学的な知識や視点を大いに学びました．彼との議論から得たことが今回お話した哲学に反映されています．彼への感謝の気持ちを忘れることはできません．