

ハイゼンベルクの不確定性関係と小澤の不等式の検証実験¹

谷村 省吾

名古屋大学大学院情報科学研究科²

論争と検証

不確定性関係は、原子や電子などのミクロ世界が我々の日常感覚からいかにかけ離れているか見せつける。1925年にハイゼンベルク (W. Heisenberg), ボルン (M. Born), ヨルダン (P. Jordan) が量子力学を創り上げた。彼らの理論では、粒子の位置や運動量は「行列」という数学記号で表され、「粒子の位置」というイメージは湧いてこない。ミクロの粒子の位置や運動量はどのようなものかとハイゼンベルクは考え、粒子の位置を正確に測ると粒子の運動量に制御不能な擾乱を与えてしまうので「はっきりした位置と運動量を持つ粒子」という描像はミクロ世界には通用しないと結論した。ハイゼンベルクはいくつかの思考実験を経て1927年に不確定性関係の考えに達したが、彼の推論はあくまでもケーススタディであって、あらゆる場合に成り立つ形で不確定性関係を証明したわけではなかった。

普遍的な数式の形で不確定性関係を証明したのはケナード (E. Kennard, 1927年) とロバートソン (H. Robertson, 1929年) だ。同じ状態のミクロ系を多数用意して、物理量 A を何度も測定すると、 a_1, a_2, a_3, \dots といった値を得る。状態が同じでも毎回測定値が同じとは限らないが、 A の測定値の平均値 $\langle A \rangle$ や標準偏差 (測定値のばらつき具合) $\sigma(A)$ は定義できる。標準偏差がゼロであることは、物理量の値が一定値に確定していることと同義である。また、同じ状態の系を多数用意して物理量 B の測定を繰り返し、 B の測定値の平均 $\langle B \rangle$ と標準偏差 $\sigma(B)$ を定義する。このとき

$$\sigma(A)\sigma(B) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle \right|$$

という関係が成り立つことをロバートソンは証明した。ここで、右辺の $[A, B] = AB - BA$ は物理量 A と B の交換関係と呼ばれる。右辺がゼロでない一定値ならば、 A の測定値のばらつきが小さな状態では B の測定値のばらつきが大きくなり、 A と B の両方の値が確定することはない。とくに粒子の位置 Q と運動量 P に関しては、上の関係式は

$$\sigma(Q)\sigma(P) \geq \frac{1}{2}\hbar$$

となる。右辺の \hbar はプランク定数 h を 2π で割ったものである。ケナードが証明したこの式によれば、位置の標準偏差 $\sigma(Q)$ をゼロにすると、運動量の標準偏差 $\sigma(P)$ は無限大に発散してしまう。

¹本稿は、パリティ (丸善出版株式会社) 2013年1月号 (Vol.28, No.1) pp.37-38 に掲載された。

²2017年4月から情報学研究科。

さて、これでハイゼンベルクの不確定性関係は確固たる物理法則になったと思われていたのだが、意外なところでそのほころびがあらわになった。きっかけは重力波の検出方法をめぐる論争だった。重力波とはアインシュタインの一般相対論によって予言されている、時空の伸び縮みのひずみが波動となって光速で伝わる現象だが、この伸縮があまりにも小さいために重力波の検出はまだ誰も成功していない。1980年代に重力波の検出方法がいくつか提案され、どれが一番有望な方法か検討された。測定装置の位置と運動量の不確定性関係が重力波の検出限界を決めるだろうという意見があったが、不確定性関係にもとづく評価には不備があることをユエン (H. Yuen) という物理学者が指摘した。そこで小澤正直は、ケナード・ロバートソンの不確定性関係は重力波検出の障害にはならないことを理論的に示して見せた。1988年頃のことである [1]。

一方で、そもそも不確定性関係の内容は何かということの一部の物理学者たちは気にかけていた。ロバートソンが扱ったのは、同じ状態の粒子を多数用意して、そのうち半数については物理量 A を測定し、残りの半数については物理量 B を測定して、それぞれの標準偏差を計算すればどんな関係が成り立つか、という問題設定である。ここでは A と B は別々に測定されており、「 A を測ったことが B を乱した」という関係を検証してはいない。

考えてみると、測定とは物理量のありのままの値を知ることではない。対象系に測定器をあてがい、測定器に何らかの変化を生じさせ、測定器の目盛りを読み取るという操作である。例えば、体重計は、体重そのものを測るというよりは、体重によって生じたばねの伸縮を提示している。となると、物理量 A の真の値と、測定器の目盛り M の読み取り値は等しいとは限らない。

小澤は、 A と M の値の差 (の2乗平均の平方根) を測定誤差 $\varepsilon(A)$ と定めることを提案した。また、測定直前と直後の物理量 B の値の差 (の2乗平均の平方根) を B に生じた擾乱 $\eta(B)$ と定めた。小澤はこれらの定義にもとづいて

$$\varepsilon(A)\eta(B) + \varepsilon(A)\sigma(B) + \sigma(A)\eta(B) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle \right|$$

という不等式を2003年に証明した [2]。この式なら「誤差 $\varepsilon(A)$ の小さな測定行為は、物理量 B の大きな擾乱 $\eta(B)$ を引き起こす」という不確定性関係の意味内容が盛り込まれている。注目すべきは、この式では誤差 $\varepsilon(A)$ がゼロでも標準偏差 $\sigma(A)$ や擾乱 $\eta(B)$ は有限の大きさにとどまるという点だ。この不確定性関係なら重力波検出の邪魔にはならない。

長谷川祐司らのチームは、中性子のスピンを用いて、この不等式の検証実験を行った (発表は2012年1月。長谷川自身による解説記事がパリティ2012年11月号に掲載) [3]。物理量 A はスピンの x 成分、 B はスピンの y 成分、対象系の状態はスピンの z 成分が上向きの状態という設定で彼らは実験を行い、小澤の不等式を実証した。また、スタインバーグ (A. Steinberg) らはアハラノフ (Y. Aharonov) の弱値というアイデアと光を使った検証実験に成功している [4]。

決着はついたのか？

これで万事めでたしと思われたが、検証実験に関する性急な報道は若干の混乱を招いた。まず「量子力学の根本原理が間違っていた？」という風評が流れた。しかし、ケナード・ロバートソンの式も小澤の式も量子力学の枠組みで証明された式であり、それらが実験で確かめられたことにより量子力学の正しさが再確認されたのが実態である。また、不確定性関係は「不確定性原理」とも呼ばれるが、現代の物理学者の大多数は、不確定性関係は「定理」であって「原理」には位置づけられないと理解している [5]。

「ハイゼンベルクが誤っていた？」と取りざたもされた。しかしハイゼンベルクは、個別のケースに対しては正しい式を書いており、何度も手を替え品を替え、思考実験を繰り返して不確定性関係が成立することを確認していた [6]。ただ、彼が「不確定性」と呼んでいた概念は曖昧で、そのつど定義が変わるようなものであった。それが彼のアプローチの限界でもあったが、当時は量子力学そのものが創られた直後で、概念整理もできていなかった中で最善を尽くしたと見るべきであろう。なお、ハイゼンベルクは「正準交換関係」や「ハイゼンベルク方程式」の発見者であるかのように言われるが、これらはボルン、ヨルダン、ディラックが発見したものだとしてハイゼンベルク自身が公言している [7]。ハイゼンベルクは有名であるがゆえに成功も失敗も押し付けられやすいのであろう。

小澤は誤差と擾乱を明確に定義することによって、不確定性関係を明瞭に記述し、証明し、実験で検証できるものにした。しかし、ケナード・ロバートソンの不等式が誤差と擾乱の関係式になっていないことは一部の物理学者や注意深い学生も気づいていたことであり、アーサー (E. Arthurs), ケリー (J. Kelly, Jr.), グッドマン (M. Goodman), 石川史郎, 清水明などが妥当な定義と関係式を探っていたことを見過ごすべきではない。また「小澤が定義した誤差・擾乱は本当に物理的意味があるか？」という疑問も提起され、渡辺優らは新しい誤差・擾乱の定義や新しい不確定性関係を提案している [8]。

今回の不確定性関係のブレークスルーは、科学の問題解決は同時に新たな問題提起をスタートさせるという興味深い展開を見せている。

参考文献

- [1] J. Maddox: *Nature* **331**, 559 (1988).
- [2] M. Ozawa: *Phys. Rev. A* **67**, 042105 (2003).
- [3] J. Erhart, Y. Hasegawa *et al.*: *Nature Physics* DOI: 10.1038/NPHYS2194 (2012).
- [4] L. A. Rozema, A. M. Steinberg *et al.*: *Phys. Rev. Lett.* **109**, 100404 (2012).
- [5] 上田正仁:「新時代の量子力学教育」数理科学 2012年3月号 p.64.

- [6] W. Heisenberg: The physical principles of the quantum theory (Dover, 1930).
- [7] 谷村省吾 :「ハイゼンベルク方程式を最初に書いた人はハイゼンベルクではない」素粒子論研究 電子版 Vol. 10, No. 3 (2011).
- [8] Y. Watanabe *et al.*: Physical Review A **84**, 042121 (2011),
<http://jp.arxiv.org/abs/1106.2526>.